6 клас

1. $512 = 8\times8\times8$. Після зняття верхнього шару кубиків (з хоча б однією зафарбованою гранню) їх залишиться $6\times6\times6 = 216$.
2. Оскільки понеділків більше, ніж вівторків, а неділь більше, ніж субот, то місяць повинен починатися з неділі і мати 30 днів. Тому це квітень, а 7 число цього місяця — субота.
3. Поділимо монети на три купки: А, Б та В, що містять 10,10 та 20 монет. Порівняємо маси купок А і Б. Можливі два варіанти.

   1) Маси купок А і Б однакові; тоді або в кожній купці по одній фальшивій монеті, або в жодній з них фальшивих монет немає. Порівняємо маси А+Б і В. Якщо маса А+Б менша, то В – шукана купка. Якщо маса А+Б більша, то ні в А ні в Б не має фальшивих монет і шукана купка А+Б.

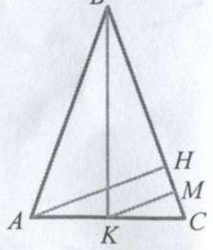
   2) Маса купки А більша за масу купки Б (якщо навпаки, то поміняємо позначення купок А і Б). У цьому випадку монети в А справжні, а у Б є хоча б одна фальшива, тому в купці В не більше однієї фальшивої монети. Тепер розіб'ємо В на дві купки Г і Д по 10 монет та зважимо купки Б і Г. Якщо Г важча, ніж Б, то у ній фальшивих монет немає, і разом з А вона утворює шукану купку. Інакше – шукана купка А+Д.
4. Збільшиться на 36.
5. 13.

7 клас

1. Ведмідь схуд на 4,96%.
2. Ні. Якщо равлик опиниться у початковій точці, то кількість відрізків прямолінійного руху буде кратна 4 (кількість відрізків у перпендикулярних напрямках однакова і кратна 2). А це можливо лише через ціле число годин ($4k\cdot15$ хв $= 60k$ хв $= k$ год).
3. 30 яблук.
4. Оскільки, 96^7 закінчується цифрою 6, 22^5 — цифрою 2, а 48^6 — цифрою 4, то $96^7 - 22^5 - 48^6$ закінчується цифрою 0, а отже, кратне 10.
5. Оскільки сума найбільшого та найменшого з кутів AOC, AOM, BOC, BOM та COM менша, ніж 90°, то найменшим з них є кут COM. Тоді найбільший з вказаних кутів має 75°. Промені OC та OM, розбивають кут AOB на кути 15°, 10° та 65°.

8 клас

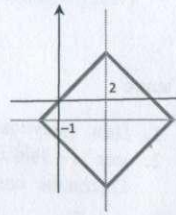
1. Якщо равлик опиниться у початковій точці, то кількість відрізків прямолінійного руху буде кратна 4 (кількість відрізків у перпендикулярних напрямках однакова і кратна 2). А це можливо лише через ціле число годин ($4k\cdot15$ хв $= 60k$ хв $= k$ год).
2. $\{-1;5;11\}$.
3. Нехай ABC — шуканий рівнобедрений трикутник, BK — висота, проведена до основи AC, AH — висота проведена до бічної сторони BC. Проведемо до сторони BC перпендикуляр KM. Гіпотенуза прямокутного трикутника BKM дорівнює висоті, проведеній до основи, а його катет — половині висоти, проведеної до бічної сторони. Побудова: Будуємо прямокутний трикутник BKM за гіпотенузою, що дорівнює одній з висот, і катетом, що дорівнює половині іншої. Через спільну вершину цього катета і гіпотенузи проводимо перпендикуляр до гіпотенузи, а інший катет продовжуємо до перетину з ним. Третю вершину знаходимо, відображаючи цю точку перетину симетрично щодо гіпотенузи. Задача має два розв'язки, якщо половина більшої висоти менша, ніж менша з висот. В іншому випадку розв'язок єдиний.



4. $\dfrac{2a-b}{3a-b}+\dfrac{5b-a}{3a+b}=\dfrac{3(a^2+5ab-2b^2)}{9a^2-b^2}=\dfrac{3(a^2+3b^2-10a^2-2b^2)}{9a^2-b^2}=\dfrac{3(-9a^2+b^2)}{9a^2-b^2}=-3$.
5. Нехай x – кількість чоловіків, а y – кількість жінок, що проживають у містечку. Тоді у містечку $\frac{2}{3}x=\frac{3}{5}y$, звідки $x=\frac{9}{10}y$. Частка одруженого населення містечка дорівнює

$$\frac{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}{x+y}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}y+\frac{3}{5}y}{\frac{9}{10}y+y}=\frac{12}{19}.$$

9 клас



1. Графік залежності симетричний відносно прямих $x=2$ та $y=-1$, а для $x\le2, y\ge-1$ залежність має вигляд $y=x$.
2. Позначимо $7^{2014}=a$, тоді $\dfrac{a+1}{7a+1}-\dfrac{7a+1}{49a+1}=\dfrac{36a}{(7a+1)(49a+1)}>0$ і $\dfrac{7^{2014}+1}{7^{2015}+1}>\dfrac{7^{2015}+1}{7^{2016}+1}$.
3. Див. задачу **3** для 8 класу.
4. $\sqrt{2012\cdot(2012+1)\cdot(2012+2)\cdot(2012+3)+1}=\sqrt{(2012^2+3\cdot2012)(2012^2+3\cdot2012+2)+1}=$
$=\sqrt{(2012^2+3\cdot2012+1-1)(2012^2+3\cdot2012+1+1)+1}=\sqrt{(2012^2+3\cdot2012+1)^2-1+1}=$
$=\sqrt{(2012^2+3\cdot2012+1)^2}=2012^2+3\cdot2012+1=4054181$.
5. Нехай S_1, S_2, S_3 – площі многокутників, S_{12}, S_{23}, S_{13} – площі їх попарних перетинів, а S_{123} – площа перетину всіх трьох многокутників. Тоді площа квадрата $6=S_1+S_2+S_3-(S_{12}+S_{23}+S_{13})+S_{123}$. $S_{12}+S_{23}+S_{13}=9-6+S_{123}=3+S_{123}\ge3$. Тому хоча б одне з чисел S_{12}, S_{23}, S_{13} не менше 1.

10 клас

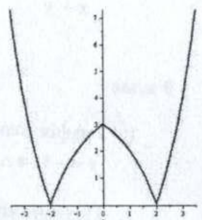
1. Не існують. Система рівнянь $\begin{cases}x+2015y=m,\\2015x+y=n\end{cases}$ має розв'язки для будь-яких m та n, зокрема, наприклад, для $m=0, n=1$ та $m=0, n=2$. Але тоді $f(0)=1$ і $f(0)=2$, що суперечить означенню функції.
2. Оскільки $x^2+y^2\ge2xy$, то $a^4+a^2b^2+b^4=\frac{3}{4}(a^4+b^4)+a^2b^2+\frac{1}{4}(a^4+b^4)\ge\frac{3}{4}(a^4+b^4)+$
$+a^2b^2+\frac{1}{4}2a^2b^2=\frac{3}{4}(a^4+a^2b^2)+\frac{3}{4}(b^4+a^2b^2)\ge\frac{3}{4}(2a^3b+2ab^3)=\frac{3}{2}(a^3b+ab^3)$.
3. Вираз $\sqrt{x^2+y^2+1-2x}+\sqrt{x^2+y^2+1-2y}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ є сумою відстаней від точки $M(x, y)$ до точок $A(1, 0)$ і $B(0, 1)$. Найменшого значення вираз набуватиме, коли $M\in AB$, і дорівнюватиме довжині AB, тобто $\sqrt{2}$.

4. Введемо систему координат з початком у центрі кола і віссю Ox вздовж діаметра. Тоді шукана сума квадратів дорівнює $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+y^2+x^2+y^2+\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+y^2+$ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=5\left(x^2+y^2\right)+5\frac{a^2}{8}=5\left(\frac{a}{2}\right)^2+5\frac{a^2}{8}=15\frac{a^2}{8}$.

5. $x^4+1=2x^2\sin y$, $x^4-2x^2+1=2x^2\sin y-2x^2$, $\left(x^2-1\right)^2=2x^2(\sin y-1)$. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, а права недодатна, то $\begin{cases}x=\pm 1,\\ \sin y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\pm 1,\\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\end{cases}$.

11 клас

1. Див. рисунок.



2. $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0$, $\quad 2\cos^2 x-3\sin x\cos x+\sin^2 x=0$.
Оскільки $\cos x\neq 0$, то $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg}x+2=0$, $\operatorname{tg}x=1, \operatorname{tg}x=2$.
$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$.

3. Не існують. Система рівнянь $\begin{cases}2016x+2015y=m,\\ 2015x+2016y=n\end{cases}$ має розв'язки для будь-яких m та n, зокрема, наприклад, для $m=5, n=1$ та $m=5, n=2$. Але тоді $f(5)=1$ і $f(5)=2$, що суперечить означенню функції.

4. $\left|x^2-3x-3\right|\geq\left|x^2+7x-13\right|$, $\left(x^2-3x-3\right)^2\geq\left(x^2+7x-13\right)^2$, $\left(x^2-3x-3\right)^2-\left(x^2+7x-13\right)^2\geq 0$, $(10-10x)\left(2x^2+4x-16\right)\geq 0$, $20(1-x)(x+4)(x-2)\geq 0$, $x\in(-\infty;-4]\cup[1;2]$.

5. Припустимо, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Нехай $A_1B_1C_1D_1$ та $A_2B_2C_2D_2$ — вказані проекції чотирикутника $ABCD$. Площини ABB_1A_1 та DCC_1D_1 паралельні, бо $AA_1\parallel DD_1$, $A_1B_1\parallel C_1D_1$. Так само паралельними є площини ABB_2A_2 та DCC_2D_2. Але через дві мимобіжні прямі AB та CD можна провести лише одну пару паралельних площин. Тому A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 лежать в одній площині, а точка A_2 належить прямій A_1B_1. Аналогічно доводимо, що точка A_2 належить прямій A_1D_1. Отже, точка A_2 збігається з точкою A_1. Так само показуємо, що збігаються точки B_1 і B_2, C_1 і C_2, D_1 і D_2, що суперечить умові. Отже, точки A, B, C і D лежать в одній площині. Але тоді AB і CD паралельні, як лінії перетину площини паралельними площинами. Аналогічно, $BC\parallel AD$ і $ABCD$ — паралелограм.