

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

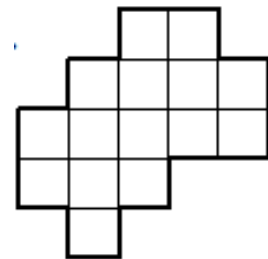
II етап

10 листопада 2018 р.

6 клас

1. Назвемо число дзеркальним, якщо зліва направо воно «читається» так само, як і справа наліво. Наприклад, число 123321 – дзеркальне.
 - а) Запишіть одне дзеркальне п'ятизначне число, яке ділиться на 5.
 - б) Скільки існує п'ятизначних дзеркальних чисел, які діляться на 5?
2. Заможний Кріт восени добув 8 мішків зерна. На кожний зимовий місяць йому потрібно або 3 мішки зерна, або 1 мішок зерна і 3 мішки пшона. Кріт може обмінювати в інших кротів 1 мішок зерна на 2 мішки пшона. Але в його нору не вміщається більше 12 мішків, а зимою Кріт з нори не виходить і не може займатись обміном. Допоможіть Кроту зробити запаси на зиму.

3. Розріжте дану фігуру на три однакові частини.



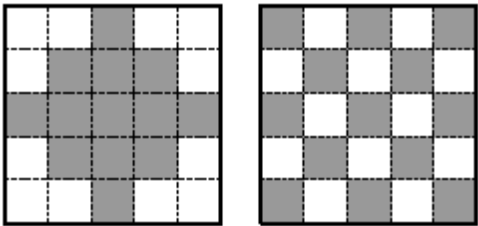
4. На дошці записаний ряд з чисел і зірочок: 5, *, *, *, *, *, *, 8. Замініть зірочки числами так, щоб сума будь-яких трьох чисел, що стоять поруч, дорівнювала 20.
5. На галявині зібрались сонечка. Якщо у сонечка на спині 6 крапочок, то воно завжди каже правду, а якщо 4 крапочки – то воно завжди бреше, а інших сонечок на галявині не було. Перше сонечко сказало: «У нас однакова кількість крапочок на спинці». Друге сказало: «Разом у нас 30 крапочок». «Ні, у всіх разом 26 крапочок на спинці», – заперечило третє. «З них рівно одне сказало правду», – заявило кожне з решти сонечок. Скільки всього сонечок зібралось на галявині?

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

II етап

10 листопада 2018 р.

7 клас

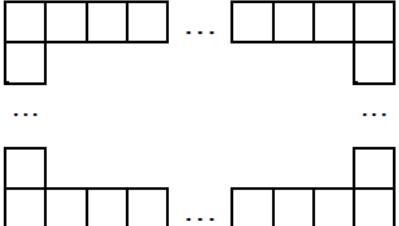
1. На годиннику пів на дев'яту. Знайдіть кут між годинниковою та хвилиною стрілкою.
2. Гаррі, Рон і Герміона хотіли придбати однакові мантиї невидимки. Однак їм не вистачало коштів: Рону – третини ціни мантиї, Герміоні – чверті, а Гаррі одної п'ятої ціни мантиї. Коли на розпродажі ціна мантиї впала на 9,4 срібних серпиків, друзі склали разом свої заощадження і придбали три мантиї. Скільки бронзових кнатів коштувала одна мантия до зниження ціни? (В світі магів використовується немаглівська валюта: золоті галеони, срібні серпики, бронзові кнати. 1галеон=17серпиків, 1серпик=29кнатів)
3. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $\frac{10^n+8}{9}$ рівний цілому числу.
4. За одну операцію можна поміняти місцями будь-які дві стрічки або два стовпці квадратної таблиці. Чи можна за декілька таких операцій із зафарбованої фігури, що зображена на рисунку зліва, отримати зафарбовану фігуру, зображену справа? Відповідь обґрунтуйте.

5. Біолог послідовно розкладав 150 жуків в десять банок. Причому в кожну наступну банку він поміщував жуків більше, ніж у попередню. Кількість жуків у першій банці складає не менше половини від кількості жуків у десятій банці. Скільки жуків у шостій банці?

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

II етап

10 листопада 2018 р.

8 клас

1. Доведіть, що якщо $b = a - 1$, то
$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \dots (a^{32} + b^{32}) = a^{64} - b^{64}$$
2. В трапеції $ABCD$ точка M – середина бічної сторони CD . Відрізки BD і BM ділять кут ABC на три рівні частини. Діагональ AC є бісектрисою кута BAD . Знайдіть кути трапеції.
3. Точки перетину графіків чотирьох функцій, заданих формулами $y = kx + b$, $y = kx - b$, $y = mx + b$ і $y = mx - b$ є вершинами чотирикутника. Знайдіть координати точки перетину його діагоналей.
4. З 1812 однакових квадратів зі стороною 1 мм зробили прямокутну рамку для групової фотографії (див. рисунок, краї фотографії співпадають з внутрішніми краями рамки). Потім фотографію розрізали по лінії міліметрової сітки на дві прямокутні частини.

Тепер знадобилось дві рамки, на які використали 2018 таких самих квадратів. Знайдіть розміри початкової фотографії.
5. Доведіть, що з 8 цілих чисел завжди можна вибрати два таких, різниця яких ділиться на 7.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

II етап

10 листопада 2018 р.

9 клас

1. Визначте значення параметра a при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ буде найменшою.
2. В трикутнику із сторонами 15 см, 15 см, 24 см знайдіть відстань від точки перетину медіан до сторін трикутника.
3. Доведіть нерівність $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$, де $a > 0, b > 0, c > 0$.
4. Кожна клітинка шахової дошки 2018×2018 пофарбована в один з чотирьох кольорів (білий, чорний, синій, червоний) так, що будь-які дві сусідні клітинки мають різний колір (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону або вершину). Скільки клітинок пофарбовано у білий колір?
5. Андрій склав десять послідовних натуральних чисел, а потім поділив отриману суму на суму наступних десяти послідовних натуральних чисел. Чи міг він отримати в результаті 0,8?

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

II етап

10 листопада 2018 р.

10 клас

1. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(0,5; 1,5; -1)$ і $\vec{b}(-0,5; 1,5; -2)$.
2. Про квадратний тричлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ відомо, що $|f(x)| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$. Знайдіть найбільше можливе значення a .
3. Від двох шматків сплавів з різним вмістом свинцю масою 6 кг і 12 кг відрізали по шматку рівної маси. Кожний з відрізаних шматків сплавляли з залишком другого сплаву, після чого відсотковий вміст свинцю в обох сплавах став рівним. Знайдіть маси відрізаних шматків.
4. Невід'ємні числа x, y, z задовольняють співвідношення $xuz = 1$. Доведіть, що

$$x + y + z \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{z}}{2}.$$

5. В прямокутнику 3×4 розташовано 6 точок. Доведіть, що знайдеться пара точок, віддалених одна від одної не більше ніж на $\sqrt{5}$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

II етап

10 листопада 2018 р.

11 клас

1. Доведіть, що коли a та b – довжини катетів, а c – довжина гіпотенузи, то

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a.$$

2. Графіки функцій $y = ax^2$, $y = bx$, і $y = c$ перетинаються в точці, яка розміщена вище осі абсцис. Визначте, скільки коренів може мати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Невід'ємні числа x, y, z задовольняють співвідношення $xuz = 1$. Доведіть, що

$$x + y + z \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{z}}{2}.$$

4. В вершинах дев'ятнадцятикутника записали різні цілі числа (по одному у кожній вершині). Потім всі числа одночасно замінили на нові: кожне замінили на різницю двох наступних за ним за годинниковою стрілкою (із сусіднього віднімали наступне за ним). Чи міг добуток отриманих чисел виявитись числом непарним?
5. В правильній шестикутній піраміді $SABCDEF$ ($ABCDEF$ — основа) бічне ребро рівне a , плоский кут при вершині S рівний 10° . Мурашка повзе по поверхні піраміди з вершини A , намагаючись побувати на всіх бічних ребрах (можливо в вершинах) і повернутись у точку A . Яка довжина її найкоротшого маршруту?