ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

II етап

10 листопада 2018 р.

Розв'язки. 6-11 класи

6 клас

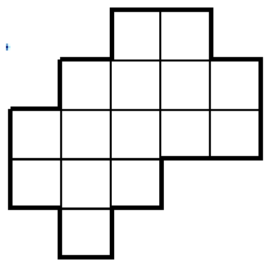
1. Назвемо число дзеркальним, якщо зліва направо воно «читається» так само, як справа наліво. Наприклад, число 123321 – дзеркальне.
   а) Запишіть одне дзеркальне п'ятизначне число, яке ділиться на 5.
   б) Скільки існує п'ятизначних дзеркальних чисел, які діляться на 5?

   а) Будь яке дзеркальне число, що закінчується на 5. Наприклад 53635.
   б) Число, яке ділиться на 5, повинно закінчуватись на 5 або на 0. Дзеркальне число закінчуватись на 0 не може, тому що тоді воно повинно починатись на 0.Отже, перша і остання цифра повинна бути 5. Друга та третя цифра можуть бути будь-якими – від комбінації 00 до комбінації 99 – всього 100 варіантів. Так як четверта цифра повторює другу, всього різних чисел буде 100.

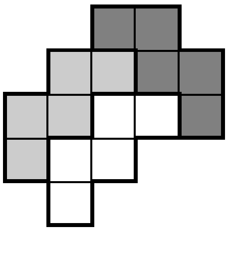
2. Заможний Кріт восени добув 8 мішків зерна. На кожний зимовий місяць йому потрібно або 3 мішки зерна, або 1 мішок зерна і 3 мішки пшона. Кріт може обмінювати в інших кротів 1 мішок зерна на 2 мішки пшона. Але в його нору не вміщається більше 12 мішків, а зимою Кріт з нори не виходить і не може займатись обміном. Допоможіть Кроту зробити запаси на зиму.

   Кріт може обміняти 3 мішки зерна на 6 мішків пшона, тоді у його норі буде 11 мішків: 5 мішків зерна і 6 мішків пшона. За один місяць він витратить 3 мішки зерна, а за кожний з двох наступних - 1 мішок зерна і 3 мішки пшона.

3. Розріжте дану фігуру на три однакові частини.



Відповідь:



4. На дошці записаний ряд з чисел і зірочок: $5, *, *, *, *, *, *, 8$. Замініть зірочки числами так, щоб сума будь-яких трьох чисел, що стоять поруч, дорівнювала 20.

5, 8, 7, 5, 8, 7, 5, 8.
Сума першого, другого і третього числа повинна дорівнювати 20, і сума другого, третього і четвертого числа також повинна бути рівна 20. Звідси випливає, що четверте число повинно бути рівне першому, тобто рівне 5. Аналогічно сьоме число повинно бути рівним четвертому, тобто, сьоме число також 5. Звідси знаходимо шосте число: 20-8-5=7, а потім знаходимо решта чисел.

5. На галявині зібрались сонечка. Якщо у сонечка на спині 6 крапочок, то воно завжди каже правду, а якщо 4 крапочки – то воно завжди бреше, а інших сонечок на галявині не було. Перше сонечко сказало: «У нас однакова кількість крапочок на спинці». Друге сказало: «Разом у нас 30 крапочок». «Ні, у всіх разом 26 крапочок на спинці », – заперечило третє. «З них рівно одне сказало правду», – заявило кожне з решти сонечок. Скільки всього сонечок зібралось на галявині?

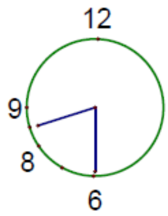
Якщо перше сонечко говорить правду, то друге та третє теж повинні говорити правду, так як у них на спинках повинно бути стільки ж крапочок, скільки у першої. Але друге та третє протиріччять одне одному, отже принаймі, одне з них бреше, звідси випливає, що перше також бреше.
Якщо кожне з трьох перших сонечок збрехало, тоді збрехали і всі решта, тому що жодне з цих трьох не сказало правду. Отже всі сонечка – брехуни, тоді, у кожного сонечка повинно бути по чотири крапочки на спинці. Але у цьому випадку виявиться, що переше сонечко все ж таки сказало правду, чого бути не може. Тому, перших три сонечка не можуть брехати одночасно, отже, або друге, або третє сказало правду, а решта два брехуни.
Таким чином, кожне з решти сонечок сказало правду.
Звідси випливає, що є два сонечка, в яких по 4 крапочки на спинці, і декілька сонечок, у яких на спинці по 6 крапочок, а в сумі на спинках у всіх сонечок або 30 крапочок, або 26.

1) Нехай крапочок 30, тоді $30 - 2 \cdot 4 = 22$, що не ділиться на 6, тому цей випадок неможливий.
2) Нехай крапочок 26, тоді $(26 - 2 \cdot 4) : 6 = 3$.
   Отже, на галявині зібралось 2+3=5 сонечок.

7 клас

1. На годиннику пів на дев’яту. Знайдіть кут між годинниковою та хвилинною стрілкою.

У момент коли, годинник показує пів на дев’яту, хвилинна стрілка вказує на цифру 6, а годинникова на середину дуги між цифрами 8 і 9. Кут між двома сусідніми позначками годинника рівний $360°: 12 = 30°$. Кут між стрілками годинника, коли вони показують пів на дев’яту, у два з половиною рази більший. Отже, він рівний $75°$.



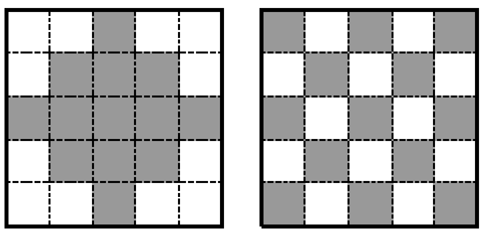
2. Гаррі, Рон і Герміона хотіли придбати однакові мантії невидимки. Однак їм не вистачало коштів: Рону – третини ціни мантії, Герміоні – чверті, а Гаррі одної п’ятої ціни мантії. Коли на розпродажі ціна мантії впала на 9,4 срібних серпиків, друзі склали разом свої заощадження і придбали три мантії. Скільки бронзових кнатів коштувала одна мантія до зниження ціни? (В світі магів використовується немаґлівська валюта: золоті ґалеони, срібні серпики, бронзові кнати. 1ґалеон=17серпиків, 1серпик=29кнатів)

Нехай початкова ціна мантії x серпиків, тоді у Рона було $\frac{2}{3}x$ серпиків, у Герміони – $\frac{3}{4}x$ серпиків, а у Гаррі – $\frac{4}{5}x$ серпиків. На розпродажі мантія коштувала $(x - 9{,}4)$ серпиків, а три мантії $3(x - 9{,}4)$ серпиків. Так як друзі придбали три мантії, витративши всі кошти, то $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x = 3(x - 9{,}4)$. Отже, $x = 36$ серпиків, або $36 \times 29 = 1044$ бронзових кнатів.

3. Доведіть, що при будь якому натуральному значенні n вираз $\frac{10^n+8}{9}$ рівний цілому числу.

10^n це число в записі якого одна одиниця і n нулів, тому сума цифр числа $10^n + 8$ рівна 18, тобто ділиться на 9. Отже, вираз $\frac{10^n+8}{9}$ рівний цілому числу.

4. За одну операцію можна поміняти місцями будь-які дві стрічки або два стовпці квадратної таблиці. Чи можна за декілька таких операцій із зафарбованої фігури, що зображена на рисунку зліва, отримати зафарбовану фігуру, зображену справа? Відповідь обґрунтуйте.



Фігура, зображена зліва, містить повністю зафарбований стовпець таблиці, а у фігури, зображеної справа, такого стовпця немає. При будь-якій перестановці стовпців чи стрічок цей стовпець збережеться, так як перестановка стовпців змінює лише його розташування, а перестановка стрічок не змінить нічого. Звідси випливає, ніякою кількістю заданих операцій отримати з однієї фігуру іншу неможливо.

5. Біолог послідовно розкладав 150 жуків в десять банок. Причому в кожну наступну банку він поміщував жуків більше, ніж у попередню. Кількість жуків в першій банці складає не менше половини від кількості жуків в десятій банці. Скільки жуків в шостій банці?

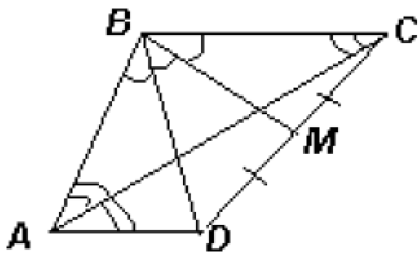
Нехай в першій банці x жуків, тоді у другій банці – не менше, ніж $x+1$ жуків, в третій – не менше, ніж $x+2$ жуків, і так далі. Таким чином, в десятій банці не менше, ніж $x+9$ жуків. Звідси випливає, що загальна кількість жуків не менша, ніж $10x+45$. Враховуючи, що всього жуків було 150, отримаємо що $x \leq 10$.
З іншої сторони, в десятій банці повинно бути не більше $2x$ жуків, в дев’ятій не більше, ніж $2x-9$ жуків, а всього жуків – не більше $20x-45$. Так як всього розкладали 150 жуків, то $x \geq 10$.
Таким чином, в першій банці рівно 10 жуків, а в останній – 19 або 20. Знайдемо суму одинадцяти послідовних чисел, починаючи з десяти: $10+11+\cdots+19+20=165$. Так як всього повинно бути 150 жуків, то відсутня банка, в якій 15 жуків. Звідси випливає, що розклад жуків визначається однозначно: 10; 11; 12; 13; 14; 16; 17; 18; 19 і 20 жуків з першої по десяту банку. Отже, в шостій банці – 16 жуків.

8 клас

1. Доведіть, що якщо $b = a - 1$, то
$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{32}+b^{32}) = a^{64} - b^{64}$

Запишемо рівність $1 = a - b$ і скористаємось формулою різниці квадратів.
Запишемо вираз $1 \cdot (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{32}+b^{32}) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{32}+b^{32}) = (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{32}+b^{32}) = (a^4-b^4)(a^4+b^4)\cdots(a^{32}+b^{32}) = \cdots = (a^{32}-b^{32})(a^{32}+b^{32}) = a^{64}-b^{64}$.

2. В трапеції *ABCD* точка *M* – середина бічної сторони *CD*. Відрізки *BD* і *BM* ділять кут *ABC* на три рівні частини. Діагональ *AC* є бісектрисою кута *BAD*. Знайдіть кути трапеції.

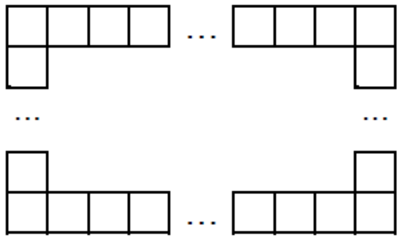


Нехай $\angle ABD = \alpha$, тоді $\angle ABC = 3\alpha$, $\angle BAD = 180° - 3\alpha, \angle BDA = \angle DBC = 2\alpha$.
В трикутнику *BCD* відрізок *BM* є бісектрисою і медіаною, тому, цей трикутник рівнобедрений. *BD=BC*. Тоді $\angle BCD = \angle BDC = (180° - \angle DBC) : 2 = 90° - \alpha$.
Крім того, $\angle BCA = \angle DAC = \angle BAC$, отже, *BA=BC*. Таким чином, трикутник *BAD* також рівнобедрений, тому $\angle BAD = \angle BDA$, звідси випливає що, $180° - 3\alpha = 2\alpha$. Отже, $\alpha = 36°$. Тоді, $\angle A = 72°, \angle B = 108°, \angle C = 54°, \angle D = 126°$.

3. Точки перетину графіків чотирьох функцій, заданих формулами $y = kx + b,\ y = kx - b,\ y = mx + b$ і $y = mx - b$ є вершинами чотирикутника. Знайдіть координати точки перетину його діагоналей.

Графіки даних лінійних функцій – це дві пари паралельних прямих, так як рівні кутові коефіцієнти в першої і другої та в третьої та четвертої прямої. Отже, точки перетину графіків є вершинами паралелограма. Дві протилежні вершини цього паралелограма це *M(0;b)* та *N(0;-b)*. Так як діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то шукана точка – середина відрізка *MN*, тобто точка *(0;0)*.

4. З 1812 однакових квадратів зі стороною 1 мм зробили прямокутну рамку для групової фотографії (див. рисунок, краї фотографії співпадають з внутрішніми краями рамки). Потім фотографію розрізали по лінії міліметрової сітки на дві прямокутні частини.



Тепер знадобилось дві рамки, на які використали 2018 таких самих квадратів. Знайдіть розміри початкової фотографії.

Будемо вважати, що розріз проходив по вертикалі (для розв'язання задачі це не принципово, можна розрізати і по горизонталі.). Після розрізання додалися дві вертикальні сторони рамки разом з кутовими квадратами, на які використали 2018-1812=206 квадратів. Отже, на кожну нову сторону використали 206:2=103 квадрати і стільки ж квадратів складала вертикальна сторона вихідної рамки. Тоді горизонтальна сторона вихідної рамки (без врахування кутових квадратів) складала (1812-206):2=803 квадрата. Так як кутові квадрати для розміру фотографії враховувати не потрібно, то розмір вихідної фотографії рівний 101×803 мм.

5. Доведіть, що з 8 цілих чисел завжди можна вибрати два таких, різниця яких ділиться на 7.

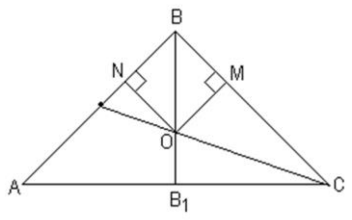
Нехай дано 8 будь-яких цілих чисел. Знайдемо остачу від ділення кожного з них на 7. Всього існує 7 можливих остач: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ми маємо вісім остач, отже, хоча б дві співпадають. Таким чином, принаймі два з восьми даних чисел дають однакову остачу при діленні на 7. Тоді їх різниця дасть при діленні на 7 в остачі 0, тобто буде ділитися на 7.

9 клас

1. Визначте значення параметра a при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ буде найменшою.

Знайдемо суму квадратів коренів рівняння:
$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2 - a)^2 + 2(a + 3) = (a - 1)^2 + 9.$
Значення даного виразу буде найменшим при $a = 1$,
при цьому значенні a дискримінант рівняння є додатним, тому корені існують.

2. В трикутнику із сторонами 15 см, 15 см, 24 см знайдіть відстань від точки перетину медіан до сторін трикутника.



$1) BB_1 = 9см$

$B_1O = 3см$

$(\ OB:OB_1 = 2:1).$

$2) S_{\Delta BB_1C} = 54см^2,\ S_{\Delta OBC} = \frac{2}{3}\cdot 54 = 36см^2$

$3) OM \perp BC,\ OM - відстань\ до\ BC.$

$36 = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot OM\ або\ 36 = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot OM \Rightarrow OM = 4{,}8см.$

Відповідь: $B_1O = 3см,\ OM = 4{,}8см,\ ON = 4{,}8см.$.

3. Доведіть нерівність $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$, де $a > 0, b > 0, c > 0$.

Очевидно, що $(a - b)^2 \geq 0$, звідси $a^2 \geq 2ab - b^2$, де $b > 0$. Тоді $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b$. Аналогічно $\frac{b^2}{c} \geq 2b - c$, $\frac{c^2}{a} \geq 2c - a$. Додавши ці три нерівності отримаємо $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 2a - b + 2b - c + 2c - a = a + b + c$.

4. Кожна клітинка шахової дошки 2018×2018 пофарбована в один з чотирьох кольорів (білий, чорний, синій, червоний) так, що будь-які дві сусідні клітинки мають різний колір (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону або вершину). Скільки клітинок пофарбовано у білий колір?

Розіб'ємо шахову дошку на 1009×1009 квадратів 2×2. Кожний з них повинен мати всі чотири кольори. Отже білих клітинок 1018081.

5. Андрій склав десять послідовних натуральних чисел, а потім поділив отриману суму на суму наступних десяти послідовних натуральних чисел. Чи міг він отримати в результаті 0,8?

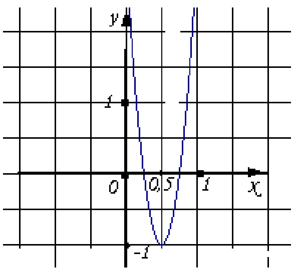
Припустимо, що при ділення отримали 0,8. Позначимо найменше число першої суми n. Тоді ця сума рівна $n + (n + 1) + \cdots (n + 9) = 10n + 45$. Кожний доданок другої суми на 10 більший відповідного доданка першої суми, тому друга сума на 100 більша першої. Тому $\frac{10n+45}{10n+145} = \frac{4}{5}$. Звідси отримуємо, що $n = 35{,}5$, що суперечить тому, що n – число натуральне. Отже, такий результат отримати неможливо.

10 клас

1. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(0{,}5; 1{,}5; -1)$ і $\bar{b}(-0{,}5; 1{,}5; -2)$.

$\overline{d_1} = \bar{a} + \bar{b} = (0; 3; -3)$; $|\overline{d_1}| = 3\sqrt{2}$;
$\overline{d_2} = \bar{b} - \bar{a} = (-1; 0; -1)$; $|\overline{d_2}| = \sqrt{2}$;
$\overline{d_1 d_2}$=3 ; $cos\gamma = \frac{1}{2}$;
$\gamma = 60°$.

2. Про квадратний тричлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ відомо, що $|f(x)| \le 1$ при $0 \le x \le 1$. Знайдіть найбільше можливе значення a.



Так як $f(0) = f(1) = 1$, то графіком тричлена є парабола, симетрична відносно прямої $x = 0{,}5$. З умови $|f(x)| \le 1$ при $0 \le x \le 1$ випливає, що гілки параболи напрямлені вверх, а найбільше значення функції досягається у випадку, коли найменше значення функції рівне -1. З цього отримуємо, $f(0{,}5) = -1$, отже $a = 8$.

3. Від двох шматків сплавів з різним вмістом свинцю масою 6 кг і 12 кг відрізали по шматку рівної маси. Кожний з відрізаних шматків сплавили з залишком другого сплаву, після чого відсотковий вміст свинцю в обох сплавах став рівним. Знайдіть маси відрізаних шматків.

Нехай у першому шматку відсотковий зміст свинцю буде $a\%$, а в другому $b\%$. Нехай від першого і другого шматків відрізали по x кг. Тоді отримаємо відсотковий вміст свинцю в першому сплаві $6{:}\left(\frac{a(6-x)}{100} + \frac{bx}{100}\right) \cdot 100\%$, а в другому $12{:}\left(\frac{b(12-x)}{100} + \frac{ax}{100}\right) \cdot 100\%$. Прирівнявши ці частини і спростивши рівняння отримаємо: $3x(a-b) = 12(a-b)$, $a - b \ne 0$, звідси $x = 4$ кг.

4. Невід'ємні числа x, y, z задовольняють співвідношення $xyz = 1$. Доведіть, що

$$x + y + z \ge \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{z}}{2}.$$

Запишемо нерівність Коші для шести чисел:

$$\frac{x + x + x + x + y + z}{6} \ge \sqrt[6]{x^4 yz} = \sqrt{x}$$

Додавши цю нерівність з двома аналогічними, отримуємо

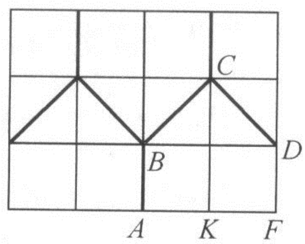
$$x + y + z \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Запишемо нерівність Коші для трьох чисел:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$$

Взявши півсуму двох отриманих нерівностей, отримуємо потрібну.

5. В прямокутнику 3×4 розташовано 6 точок. Доведіть, що знайдеться пара точок, віддалених одна від одної не більше ніж на $\sqrt{5}$.



Розб'ємо прямокутник на п'ять фігур, так як на рисунку. Тоді в якусь з цих фігур попадуть не менше двох точок (за принципом Діріхле). Нехай це буде фігура ABCDF. Найбільша відстань між точками на цій фігурі не перевищує відстань AC. За теоремою Піфагора: $AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

11 клас

1. Доведіть, що коли a та b – довжини катетів, а c – довжина гіпотенузи, то
$$log_{b+c}a + log_{c-b}a = 2log_{b+c}a \cdot log_{c-b}a.$$

$a > 0,\ b > 0, c > 0$ як довжини сторін трикутника, $a^2 + b^2 = c^2$, тоді

$a = \left((c-b)(c+b)\right)^{\frac{1}{2}}$.

$$log_{b+c}\left((c-b)(c+b)\right)^{\frac{1}{2}} + log_{c-b}\left((c-b)(c+b)\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 2log_{b+c}\left((c-b)(c+b)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot log_{c-b}\left((c-b)(c+b)\right)^{\frac{1}{2}};$$
$$\frac{1}{2}log_{b+c}((c-b)(c+b)) + \frac{1}{2}log_{c-b}((c-b)(c+b)) =$$
$$= \frac{1}{2}log_{b+c}((c-b)(c+b)) \cdot log_{c-b}((c-b)(c+b));$$

$$log_{b+c}(c-b) + 1 + 1 + log_{c-b}(c+b) = (log_{b+c}(c-b) + 1) \cdot (log_{c-b}(b+c) + 1);$$
$$log_{b+c}(c-b) + log_{c-b}(c+b) + 2$$
$$= log_{b+c}(c-b)log_{c-b}(b+c) + log_{b+c}(c-b) + log_{c-b}(b+c) + 1;$$
$$log_{b+c}(c-b) + log_{c-b}(c+b) + 2 = 1 + log_{b+c}(c-b) + log_{c-b}(b+c) + 1;$$
$$log_{b+c}(c-b) + log_{c-b}(c+b) + 2 = log_{b+c}(c-b) + log_{c-b}(b+c) + 2$$

2. Графіки функцій $y = ax^2$, $y = bx$, і $y = c$ перетинаються в точці, яка розміщена вище осі абсцис. Визначте, скільки коренів може мати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

З умови задачі випливає, що графіки перетинаються в точці $(m; c)$, де $c > 0$. Тоді виконуються рівності $c = am^2$ і $bm = c$, отже, $m \neq 0$. Звідси випливає, що дискримінант даного рівняння $D = b^2 - 4ac = \frac{c^2}{m^2} - 4\frac{c^2}{m^2} = -3\frac{c^2}{m^2}$<0.

Отже, рівняння коренів немає.

3. Невід’ємні числа x, y, z задовольняють співвідношення $xyz = 1$. Доведіть, що
$$x + y + z \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{z}}{2}.$$

Запишемо нерівність Коші для шести чисел:

$$\frac{x + x + x + x + y + z}{6} \geq \sqrt[6]{x^4yz} = \sqrt{x}$$

Додавши цю нерівність з двома аналогічними, отримуємо

$$x + y + z \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Запишемо нерівність Коші для трьох чисел:

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$$

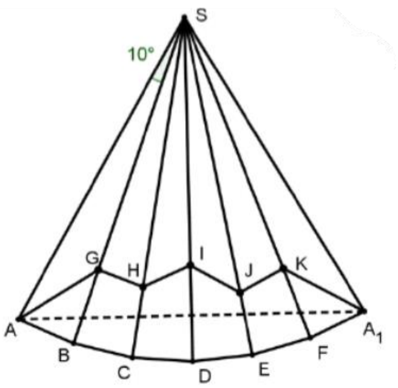
Взявши півсуму двох отриманих нерівностей, отримуємо потрібну.

4. В вершинах дев'ятнадцятикутника записали різні цілі числа (по одному у кожній вершині). Потім всі числа одночасно замінили на нові: кожне замінили на різницю двох наступних за ним за годинниковою стрілкою (із сусіднього віднімали наступне за ним). Чи міг добуток отриманих чисел виявитись числом непарним?

Не міг.

Нехай на початку в вершинах дев'ятнадцятикутника записані числа $a_1, a_2, \dots, a_{19}$ (нумерація за годинниковою стрілкою). Тоді після вказаної заміни в вершинах будуть записані числа $a_2 - a_3$, $a_3 - a_4$, …, $a_{18} - a_{19}$, $a_{19} - a_1$, $a_1 - a_2$. Сума отриманих дев'ятнадцяти чисел рівна 0. Отже, хоча б одне з цих чисел є парним. Це означає, що їх добуток є числом парним.

5. В правильній шестикутній піраміді SABCDEF (ABCDEF — основа) бічне ребро рівне a, плоский кут при вершині S рівний $10°$. Мурашка повзе по поверхні піраміди з вершини A, намагаючись побувати на всіх бічних ребрах (можливо в вершинах) і повернутись у точку A. Яка довжина її найкоротшого маршруту?



«Розріжемо» піраміду SABCDEF по ребру SA і зробимо розгортку (див. рис.). Тоді будь-який маршрут по бічній поверхні піраміди, що задовольняє умову, буде на розгортці ламаною, що з'єднує точки площини A і A_1. Найкоротша довжина маршруту з A в A_1 рівна довжині відрізка AA_1. В рівнобедреному трикутнику ASA_1 кут при вершині S рівний 60°. Отже, цей трикутник є рівносторонній, тоді $AA_1 = a$. Зауваження: траєкторію руху мурашки по самій піраміді вказувати не потрібно.