М. В. Березняк

МАТЕМАТИКА

ДЕРЖАВНА ПІДСУМКОВА АТЕСТАЦІЯ

9 клас

Вказівки та розв'язки

- Чернетки
- Оформлення відповідей
- Пошук варіантів
- + рівень 4 (для шкіл з поглибленим вивченням математики)

Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2013

УДК 371.263
Б 48

Рецензент *Ярослав Гап'юк* — кандидат педагогічних наук, доцент Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Обкладинка *Оксани Корнєєвої*

У дизайні використано фрагмент обкладинки видання
Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 9 клас
/ О. І. Глобін, О. В. Єргіна, П. Б. Сидоренко, О. В. Комаренко. —
К.: Центр навчально-методичної літератури, 2013

Березняк М. В.

Б 48 Математика. Державна підсумкова атестація. 9 клас. Вказівки та розв'язки / М. В. Березняк. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2013. — 160 с.

ISBN 978-966-07-1932-3

У посібнику подано відповіді до всіх завдань ДПА з математики, яка в 2013 р. проводиться за збірником «О. І. Глобін, О. В. Єргіна, П. Б. Сидоренко, О. В. Комаренко. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 9 клас. — К.: Центр навчально-методичної літератури, 2013».

Посібник буде корисним учням 9 класів у процесі їх підготовки до державної підсумкової атестації з математики.

УДК 371.263
ББК 22.141я72

ISBN 978-966-07-1932-3

ВАРІАНТ №1

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2		X		
1.3				X
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7		X		
1.8	X			

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10				X
1.11			X	
1.12			X	

1.6. $-x^2+3x+4=-(x^2-3x-4)=-((x^2+x)-4x-4)=-(x(x+1)-4(x+1))=$
$=-(x-4)(x+1)$.

1.8. $b_2=45:(-3)=-15$; $b_1=-15:(-3)=5$.

1.9. $\angle COB=105°-63°=42°$.

1.11. $\angle A=90°-43°=47°>43°$. Оскільки $\angle A>\angle B$, то $BC>AC$.

Частина 2

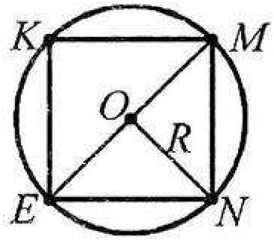
2.1.	94
2.2.	(0; 4), (1; 3)

2.3.	2320 грн
2.4.	8 см

2.1. $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2=2-6\sqrt{10}+45+2+6\sqrt{45}+45=94.$

2.2. $\begin{cases}y=x^2-2x+4,\\x+y=4;\end{cases}\begin{cases}4-x=x^2-2x+4,\\y=4-x;\end{cases}\begin{cases}x^2-x=0,\\y=4-x;\end{cases}\begin{cases}x_1=0,\\y_1=4;\end{cases}$ або $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=3;\end{cases}$ (0; 4), (1; 3).

2.3. Через рік вкладник матиме: $10\,000\cdot 1{,}1=11\,000$ гривень. Через два роки вкладник матиме: $11000\cdot 1{,}12=12320$ гривень. Відсоткових грошей він матиме $12320-10000=2320$ (гривень).



2.4. За наслідком з теореми синусів маємо: $R=\dfrac{a}{2\sin\alpha}=\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=$
$=4\sqrt{2}$ (см). З ΔNOM ($\angle O=90°$, $OM=OK=R$): $MN=R\sqrt{2}=$
$=4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8$ (см).

Частина 3

3.1. Нехай перше число a, а друге b. За умовою різниця половини одного числа $\left(\dfrac{a}{2}\right)$ і третини другого $\left(\dfrac{b}{3}\right)$ дорівнює 2. Перше рівняння: $\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}=2$. Перше число зменшене на четвертину дорівнює $a-\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{4}a$, а друге число збільшене на його шосту частину — $b+\dfrac{b}{6}=\dfrac{7}{6}b$. Сума цих чисел дорівнює 53.

Друге рівняння: $\frac{3}{4}a+\frac{7}{6}b=53$. Система: $\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{b}{3}=2,\\ \frac{3}{4}a+\frac{7}{6}b=53;\end{cases}$ $\begin{cases}3a-2b=12,\\ 9a+14b=636;\end{cases}$

$\begin{cases}9a-6b=36,\\ 9a+14b=636;\end{cases}$ $\begin{cases}3a-2b=12,\\ 20b=600;\end{cases}$ $\begin{cases}a=24,\\ b=30.\end{cases}$

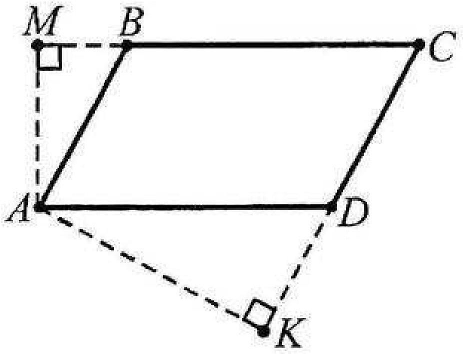
Відповідь: 24 і 30.

3.2. $$\frac{8x}{(x-2)^2}-\frac{(x+2)^2}{16}\left(\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)=$$

$$=\frac{8x}{(x-2)^2}-\frac{(x+2)^2}{16}\left(\left(\frac{1}{x+2}\right)^2-\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{8x}{(x-2)^2}-\frac{(x+2)^2}{16}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}\right)^2=\frac{8x}{(x-2)^2}-\frac{(x+2)^2}{16}\left(\frac{x-2-x-2}{(x+2)(x-2)}\right)^2=$$

$$=\frac{8x}{(x-2)^2}-\frac{(x+2)^2}{16}\cdot\frac{(-4)^2}{(x+2)^2(x-2)^2}=\frac{8x}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{8x-1}{(x-2)^2}.$$



3.3. Нехай $ABCD$ — заданий паралелограм, $\angle DAB:\angle ABC=2:3$. Нехай $\angle DAB=2x$, $\angle ABC=3x$. За властивістю кутів паралелограма $2x+3x=180°$; $5x=180°$; $x=36°$. Отже, $\angle DAB=2\cdot 36°=72°$. $\angle KAB=90°$ ($AK\perp DC$, $DC\parallel AB$). $\angle KAD=\angle KAB-$ $-\angle DAB=90°-72°=18°$. $\angle DAM=90°$ ($AM\perp BC$, $BC\parallel AD$). Отже, кут між висотами дорівнює: $\angle KAM=\angle KAD+\angle DAM=18°+90°=108°$.

Відповідь: 108°.

ВАРІАНТ №2

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3	X			
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6			X	
1.7				X
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10		X		
1.11	X			
1.12	X			

1.2. $\frac{2^{\cdot 3}}{7} = \frac{6}{21}$.

1.4. $y = 0{,}7 \cdot 0 - 21 = -21$; $A(0; -21)$.

1.6. $3\sqrt{x} - 12 = 0; 3\sqrt{x} = 12; \sqrt{x} = 4; x = 16$.

1.8. 15 000 · 1,1 = 16 500 — отримає вкладник через рік;
16 500 · 1,1 = 18 150 — отримає вкладник через два роки.

1.9. $\angle AOD = 180° - 40° = 140°$. $\angle COD = 140° : 2 = 70°$.

1.11. $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (дм^2).

1.12. Знайдемо координати середини сторони BC: $x_c = (-1 - 3) : 2 = -2$;
$y_c = (4 + 0) : 2 = 2$. $M(-2; 2)$. $AM = \sqrt{(-2-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{25+0} = 5$.

Частина 2

2.1.	7
2.2.	$k = 0{,}5$, $b = -2$
2.3.	21
2.4.	3 см; 8 см

2.1. $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-4} = 3. \frac{2x^2+5x+2-3x^2+12}{x^2-4} = 0;$ $\begin{cases} -x^2+5x+14=0, \\ x^2-4 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x-14=0, \\ x \neq \pm 2; \end{cases}$

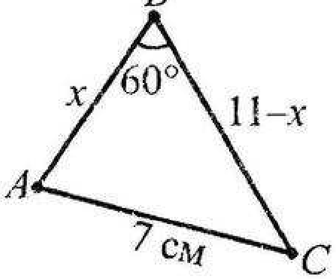
$\begin{cases} x_1 = -2, x_2 = 7, \\ x \neq \pm 2; \end{cases} x = 7.$

2.2. $\begin{cases} -2 = k \cdot 0 + b, \\ 0 = 4k + b; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ 4k = 2; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ k = 0{,}5. \end{cases}$

2.3. $d = a_2 - a_1 = 5{,}9 - 6{,}2 = -0{,}3$. $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_n = 6{,}2 - 0{,}3(n-1)$;

$6{,}2 - 0{,}3(n-1) > 0; 6{,}2 > 0{,}3(n-1); n - 1 < \frac{62}{3}; n < \frac{65}{3}; n < 21\frac{2}{3}.$

21 додатний член.



2.4. Нехай $AB = x$ см, тоді $BC = (11 - x)$ см. За теоремою косинусів $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$. Отже, $7^2 = x^2 + (11 - x)^2 - 2x(11 - x) \cdot \cos 60°$; $49 = x^2 + 121 - 22x + x^2 - 11x + x^2$; $3x^2 - 33x + 72 = 0$; $x^2 - 11x + 24 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 8$; $11 - x_1 = 11 - 3 = 8$, $11 - x_2 = 11 - 8 = 3$. Невідомі сторони дорівнюють 3 см і 8 см.

3.1. Нехай перша бригада виконує завдання за x год. За 1 год вона виконає $\frac{1}{x}$ частину завдання. Тоді друга бригада виконує все завдання за $(x+6)$ год, а за 1 год виконуватиме $\frac{1}{x+6}$ його частину. За умовою через 2 години роботи другої бригади та 3 години спільної роботи було зроблено $\frac{2}{3}$ завдання.

Рівняння: $\frac{2}{x+6}+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}\right)=\frac{2}{3}$; $\frac{5}{x+6}+\frac{3}{x}-\frac{2}{3}=0$;

$\frac{5\cdot 3x+3\cdot 3(x+6)-2x(x+6)}{3x(x+6)}=0$; $\frac{-2x^2+12x+54}{3x(x+6)}=0$; $\frac{x^2-6x-27}{3x(x+6)}=0$;

$x_1=9$ (год), $x_2=-3$ — не задовольняє умову задачі. Отже, перша бригада може виконати самостійно завдання за 9 год, друга за 9 + 6 = 15 (год).

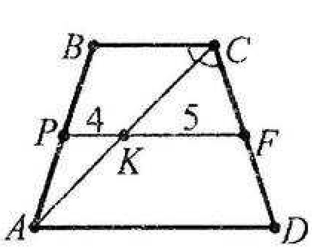
Відповідь: 9 год і 15 год.

3.2. $y=\sqrt{x^2-3x-10}-\frac{5}{x^2-9}$. Область визначення функції знайдемо із системи: $\begin{cases} x^2-3x-10\ge 0, \\ x^2-9\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)(x-5)\ge 0, \\ x\ne \pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-\infty;-2]\cup[5;+\infty), \\ x\ne \pm 3. \end{cases}$ Отже,

$x\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup[5;+\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;-3)\cup(-3;-2]\cup[5;+\infty)$.

3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD\|BC$, $AB = CD$), AC — діагональ, PF — середня лінія, $PK = 4$ см, $KF = 5$ см. PK — середня лінія ΔBAC, тому $BC = 2\cdot 4 = 8$ (см). Аналогічно з ΔACD $AD = 2\cdot 5 = 10$ (см). За умовою, $\angle BCA = \angle ACD$. $\angle CAD = \angle BCA$ ($BC\|AD$, AC — січна). Тому $\angle CAD = \angle ACD$. Отже, $CD = AD = 10$ см. $P_{ABCD} = BC + AD + 2CD = 8 + 10 + 2\cdot 10 = 38$ (см).



Відповідь: 38 см.

ВАРІАНТ №3

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2			X	
1.3				X
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5	X			
1.6			X	
1.7			X	
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10			X	
1.11	X			
1.12				X

1.1. $2x - 7 = 5$; $2x = 12$; $x = 6$.

1.2. $60 \cdot \frac{2}{5} = \frac{60 \cdot 2}{5} = 24$ (км).

1.8. $x^2 \geq 0$, тоді $x^2 - 5 \geq -5$. Отже, $y \in [-5; +\infty)$.

1.10. $\Delta AOB \sim \Delta COD$, тому: $AO : CO = AB : CD$; $2{,}4 : CO = 1 : 3$;
$CO = 3 \cdot 2{,}4 = 7{,}2$ (см).

1.11. $S = 180° \cdot 5 - 360° = 900° - 360° = 540°$.

1.12. Сума бічних сторін, а, значить, і сума основ дорівнює: $9 + 7 = 16$ (см).

Площа трапеції дорівнює: $S = \frac{16}{2} \cdot 7 = 56$ (см^2).

Частина 2

2.1.	1
2.2.	$q = -12$; $x_2 = 2$

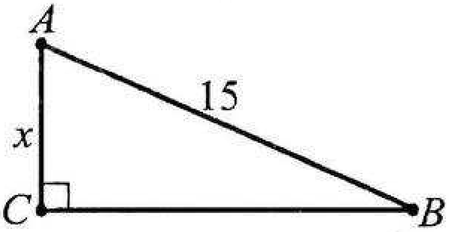
2.3.	(3; –2)
2.4.	36 см

2.1. $\frac{10x-2}{5x} : \left(25x^2 - 10x + 1\right) = \frac{2(5x-1)}{5x(5x-1)^2} = \frac{2}{5x(5x-1)}$.

Якщо $x = 0{,}4$, то $\frac{2}{5x(5x-1)} = \frac{2}{5 \cdot 0{,}4 \cdot (5 \cdot 0{,}4 - 1)} = \frac{2}{2(2-1)} = 1$.

2.2. Оскільки $x_1 + x_2 = -4$ і $x_1 = -6$, то $x_2 = -4 + 6 = 2$.
Тоді $q = x_1 x_2 = -6 \cdot 2 = -12$.

2.3. $\begin{cases} 4x + xy = 6, \\ 3x - 5xy = 39; \end{cases}$ $\begin{cases} 20x + 5xy = 30, \\ 3x - 5xy = 39; \end{cases}$ $\begin{cases} 23x = 69, \\ 3x - 5xy = 39; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ 9 - 15y = 39; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$



2.4. Нехай $AC = x$. $\mathrm{tg}\,\angle A = \frac{CB}{CA} = \frac{CB}{x}$, звідки
$CB = 0{,}75x = \frac{3}{4}x$. З теореми Піфагора маємо:

$15 = \sqrt{AC^2 + CB^2}$; $\sqrt{x^2 + \frac{9}{16}x^2} = 15$; $\frac{5}{4}x = 15$; $x = 12$.

Отже, $x = CA = 12$ (см), $CB = \frac{3}{4}x = 9$ (см). Тоді $P = 12 + 9 + 15 = 36$ (см).

3.1. Нехай у кінотеатрі спочатку було x рядів, тоді в кожному ряді було $\frac{390}{x}$ місць. Рядів стало на один більше, тобто $(x + 1)$, а місць в ряді збільшилась на 4, тобто стало $\left(\frac{390}{x}+4\right)$. Рівняння:

$(x+1)\left(\frac{390}{x}+4\right)=480; 390+4x+\frac{390}{x}+4=480; \frac{4x^2-86x+390}{x}=0;$

$\begin{cases} x_1=15, x_2=6,5, \\ x\neq 0. \end{cases}$ $x_2=6,5$ — не задовольняє умову задачі, $x_1=15$. У кінотеатрі стало $15 + 1 = 16$ рядів.

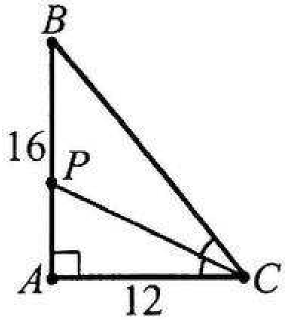
Відповідь: 16 рядів.

3.2. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, тоді $x_1+x_2=\frac{11}{5}$ і $x_1 \cdot x_2=\frac{3}{5}$.

Якщо корені шуканого рівняння $2x_1$ і $2x_2$ то: $2x_1 \cdot 2x_2=4x_1x_2=4\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$;

$2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\cdot\frac{11}{5}=\frac{22}{5}$. Звідси рівняння: $x^2-\frac{22}{5}x+\frac{12}{5}=0$ або $5x^2 - 22x + 12 = 0$.

Відповідь: $5x^2-22x+12=0$.



3.3. Нехай BAC — заданий прямокутний трикутник ($\angle A = 90°$), $AC = 12$ см, $AB = 16$ см. Оскільки проти більшого кута лежить більша сторона, то проведемо бісектрису CP. З теореми Піфагора маємо: $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{12^2+16^2}=$ $= 20$ (см). Нехай $AP = x$, тоді $BP = 16 - x$. За властивістю бісектриси трикутника $\frac{AP}{AC}=\frac{BP}{BC}$; $\frac{x}{12}=\frac{16-x}{20}$; $\frac{x}{3}=\frac{16-x}{5}$;

$5x = 3(16 - x)$; $8x = 48$; $x = 6$ (см). Отже, $AP = 6$ см. З ΔCAP ($\angle A = 90°$):

$CP=\sqrt{AC^2+AP^2}=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$ (см).

Відповідь: $6\sqrt{5}$ см.

ВАРІАНТ №4

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3		X		
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7		X		
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10	X			
1.11		X		
1.12		X		

1.2. Усього фруктів: 6 + 4 = 10. Шукана ймовірність дорівнює: $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

1.4. $(x-5)^2 - x^2 = 20$; $x^2 - 10x + 25 - x^2 = 20$; $-10x = -5$; $x = 0{,}5$.

1.5. Якщо $x = 3$, то: $\sqrt{25-3x} = \sqrt{25-3\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$.

1.7. 300 : (8 + 2) · 8 = 240 (г).

1.9. Нехай найменший кут трикутника дорівнює $2x$, тоді інші кути дорівнюють $3x$ і $4x$. Рівняння: $2x + 3x + 4x = 180$; $9x = 180$; $x = 20$. Отже, кути трикутника дорівнюють: $2 \cdot 20° = 40°$; $3 \cdot 20° = 60°$; $4 \cdot 20° = 80°$.

1.10. $c = 6 : \sin 60° = 6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ (см).

1.12. $180° \cdot n - 360° = 1080°$; $180° \cdot n = 1440°$; $n = 8$.

Частина 2

2.1.	$\frac{3}{x-1}$		**2.3.**	$[4; +\infty)$
2.2.	$[6; +\infty)$		**2.4.**	8 см

2.1. $\frac{3}{x-2} - \frac{x+2}{x^2-2x+1} \cdot \frac{3x-3}{x^2-4} = \frac{3}{x-2} - \frac{3(x+2)(x-1)}{(x-1)^2(x-2)(x+2)} =$

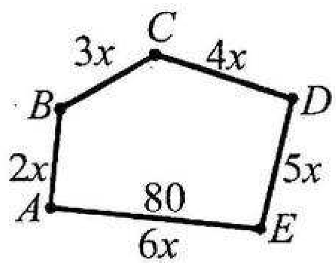
$= \frac{3}{x-2} - \frac{3}{(x-1)(x-2)} = \frac{3x-3-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{3x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{3(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{3}{x-1}$.

2.2. $(3x+2)^2 + (4x-3)^2 \le (5x-1)^2$.

$9x^2 + 12x + 4 + 16x^2 - 24x + 9 \le 25x^2 - 10x + 1$; $-2x \le -12$; $x \ge 6$; $x \in [6; +\infty)$.

2.3. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 1$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Абсциса вершини параболи: $x_{в.} = \frac{4}{1} = 4$. Функція зростає при $x \in [4; +\infty)$.

2.4. У подібному п'ятикутнику сторони також відносяться як 2 : 3 : 4 : 5 : 6. Нехай $AB = 2x$, тоді $BC = 3x$, $CD = 4x$, $DE = 5x$, $EA = 6x$. Рівняння: $2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 80$; $20x = 80$; $x = 4$. Тоді $AB = 2x = 2 \cdot 4 = 8$ (см).

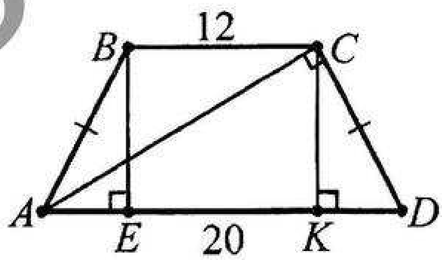


3.1. Нехай $(n-1)$, n, $(n+1)$ — шукані послідовні натуральні числа. Рівняння: $3(n-1)^2-67=n^2+(n+1)^2$; $3n^2-6n+3-67-n^2-n^2-2n-1=0$; $n^2-8n-65=0$. $n_1=-5$ — не задовольняє умову задачі, $n_2=13$. Отже, менше з шуканих чисел $13-1=12$, а більше $13+1=14$.
Відповідь: 12, 13, 14.

3.2. $\begin{cases} x+xy+3y=3, \\ 2x-xy-y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x+xy+3y=3, \\ 3x+2y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x+x\cdot\dfrac{1-3x}{2}+3\cdot\dfrac{1-3x}{2}=3, \\ y=\dfrac{1-3x}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+x-3x^2+3-9x=6, \\ y=\dfrac{1-3x}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2+6x+3=0, \\ y=\dfrac{1-3x}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)^2=0, \\ y=\dfrac{1-3x}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

Відповідь: $(-1;2)$.



3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD\parallel BC$, $AB=CD$), AC — діагональ, CK — висота, $\angle ACD=90°$. Оскільки $AB=CD$, то $AE=KD=$ $=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{20-12}{2}=4$ (см) і $AK=20-4=16$ (см).

Оскільки трикутник ACD прямокутний і $CK\perp AD$, то $CK=\sqrt{AK\cdot KD}=$ $=\sqrt{16\cdot 4}=\sqrt{64}=8$ (см). $S_{\text{тр.}}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot CK=\dfrac{20+12}{2}\cdot 8=128$ (см^2).
Відповідь: 128 см^2.

ВАРІАНТ №5

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3			X	
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7		X		
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10		X		
1.11			X	
1.12				X

1.1. (64,8 + 76,2) : 2 = 141 : 2 = 70,5 (км/год).

1.4. $4 - 2m = 7$; $-2m = 3$; $m = -1,5$.

1.5. $x^2 + 9x = 0$; $x(x + 9) = 0$; $x = -9$ або $x = 0$.

1.6. ОДЗ: $3x + 6 \neq 0$; $3x \neq -6$; $x \neq -2$.

1.8. $\frac{2-x}{5} < -2 \,\Big|\cdot 5$; $2 - x < -10$; $-x < -12$; $x > 12$; $x \in (12; +\infty)$.

1.9. $O_1A = 16 - 5 = 11$ (см).

1.10. З ΔBCM ($\angle M = 90°$): $BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

$AC = 4 + 8 = 12$ (см). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$ (см^2).

1.11. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{(4;-6)} = \overrightarrow{(-4:2; 6:2)} = \overrightarrow{(-2;3)}$.

1.12. $\cos(90° - \alpha) + \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha$.

Частина 2

2.1.	$\frac{1}{9}$
2.2.	$\sqrt{3}$

2.3.	$\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$
2.4.	$y = 3x + 7$

2.1. $3^{-3} \cdot 9^8 : 27^5 = 3^{-3} \cdot (3^2)^8 : (3^3)^5 = 3^{-3} \cdot 3^{16} : 3^{15} = 3^{-3+16-15} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

2.2. $\frac{6-\sqrt{12}}{\sqrt{12}-2} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt{3}$.

2.3. $-3x^2 + 9x - 2 > \frac{2}{3}$; $9x^2 - 27x + 6 < -2$; $9x^2 - 27x + 8 < 0$; $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{8}{3}$;

$x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

2.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = 3$ має вигляд $y = 3x + b$. Координати точки $A(-2; 1)$ задовольняють рівняння цієї прямої, тому $1 = 3 \cdot (-2) + b$; $b = 7$. Отже, шукане рівняння прямої — $y = 3x + 7$.

3.1. Нехай початкова ціна футбольного м'яча x грн, а волейбольного — y грн, тоді за умовою $4x+3y=320$. Після зміни цін футбольний м'яч став коштувати $0{,}8x$ грн, а волейбольний — $1{,}05y$ грн, тому $2\cdot 0,8x+1,05y=122$. Система: $\begin{cases}4x+3y=320,\\ 2\cdot 0,8x+1,05y=122;\end{cases}$ $\begin{cases}4x+3y=320,\\ 1,6x+1,05y=122;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{320-3y}{4},\\ 1,6\cdot\dfrac{320-3y}{4}+1,05y=122;\end{cases}$

$\begin{cases}x=\dfrac{320-3y}{4},\\ 128-1,2y+1,05y=122;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{320-3y}{4},\\ 0,15y=6;\end{cases}$ $\begin{cases}x=50,\\ y=40.\end{cases}$

Відповідь: 50 грн і 40 грн.

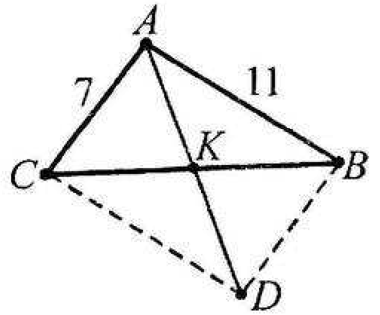
3.2. $\dfrac{1}{2x^2+6}+\dfrac{1}{3x-12}=\dfrac{1}{12-3x+4x^2-x^3}$; $\dfrac{1}{2\left(x^2+3\right)}+\dfrac{1}{3(x-4)}=\dfrac{1}{4\left(3+x^2\right)-x\left(3+x^2\right)}$;

$\dfrac{1}{2\left(x^2+3\right)}+\dfrac{1}{3(x-4)}-\dfrac{1}{\left(x^2+3\right)(4-x)}=0$; $\dfrac{3(x-4)+2\left(x^2+3\right)+6}{6\left(x^2+3\right)(x-4)}=0$;

$\dfrac{3x-12+2x^2+6+6}{6\left(x^2+3\right)(x-4)}=0$; $\dfrac{2x^2+3x}{6\left(x^2+3\right)(x-4)}=0$; $x_1=0, x_2=-\dfrac{3}{2}$.

Відповідь: 0; $-\dfrac{3}{2}$.

3.3. Нехай ABC — заданий трикутник, $AC = 7$ см, $AB = 11$ см, AK — медіана. Нехай $BC = x$ см, тоді $AK = (x - 8)$ см. Проведемо $BD \| AC$ і $CD \| AB$. $ABCD$ — паралелограм, AD і CB — його діагоналі, $AD = 2AK = 2(x - 8)$ (см). За властивістю діагоналей паралелограма: $AD^2 + CB^2 = 2AC^2 + 2AB^2$; $(2(x - 8))^2 + x^2 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 11^2$; $4(x^2 - 16x + 64) + x^2 = 98 + 242$; $5x^2 - 64x - 84 = 0$; $x_1 = 14$, $x_2 = -1{,}2$ — не підходить. Отже, довжина невідомої сторони трикутника дорівнює 14 см.



Відповідь: 14 см.

ВАРІАНТ №6

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3			X	
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6			X	
1.7			X	
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10		X		
1.11	X			
1.12		X		

1.3. $-\frac{1}{2}x = 4; x = 4 : \left(-\frac{1}{2}\right); x = -8.$

1.7. $6x < 16 - 2x$; $6x + 2x < 16$; $8x < 16$; $x < 2$; $x \in (-\infty; 2)$.

1.8. $x_6 = x_1 + 5d$; $7 = -3 + 5d$; $5d = 10$; $d = 2$.

1.9. Нехай $MA = 2x$, тоді $AN = 3x$. Рівняння: $2x + 3x = 25$; $5x = 25$; $x = 5$ (см). Отже, $AN = 3 \cdot 5 = 15$ (см).

1.10. $56^\circ : 2 = 28^\circ$; $90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.

1.11. За наслідком з теореми синусів отримаємо: $\frac{a}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot 10$; $2a = 20$; $a = 10$ (см).

1.12. $\vec{c} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{(-6;3)} + 2\overrightarrow{(-2;0,5)} = \overrightarrow{(2;-1)} + \overrightarrow{(-4;1)} = \overrightarrow{(-2;0)}$.

Частина 2

2.1.	–9
2.2.	$a = 5$; $c = 3$

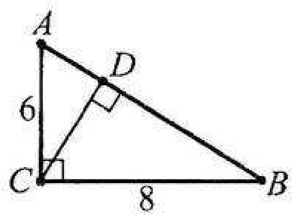
2.3.	$\frac{7}{10}$
2.4.	4,8 см

2.1. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{27}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{24}\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot 27 - \frac{1}{2}\cdot 24 = 3 - 12 = -9.$

2.2. $y = ax^2 - 2x + c$. $\begin{cases} 6 = a \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c, \\ 19 = a \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + c; \end{cases}$ $\begin{cases} 8 = a + c, \\ 23 = 4a + c; \end{cases}$ $\begin{cases} 15 = 3a, \\ 23 = 4a + c; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 5, \\ c = 3. \end{cases}$

2.3. Число 20 має 14 натуральних чисел, що не є його дільниками (3; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19), а усіх чисел 20, тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

2.4. $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2). У той же час $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot CD = 5CD$. Тоді $5CD = 24$; $CD = 4,8$ (см).



3.1. Нехай швидкість поїзда до зупинки x км/год, тоді на $\frac{1}{3}\cdot 300 = 100$ км шляху він потратив $\frac{100}{x}$ год. Після зупинки на подолання решти $300-100=200$ (км) шляху поїзд потратив $\frac{200}{x-10}$ год. На все поїзд потратив 8 год. Рівняння: $\frac{100}{x}+1+\frac{200}{x-10}=8$; $\frac{100(x-10)+200x-7x(x-10)}{x(x-10)}=0$;

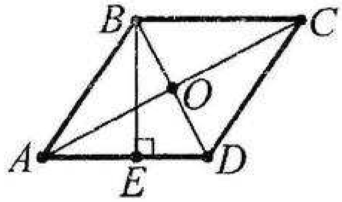
$\frac{-7x^2+370x-1000}{x(x-10)}=0$; $x_1=50$, $x_2=\frac{20}{7}<10$ — не задовольняє умову задачі, бо тоді поїзд не зуміє зменшити швидкість на 10 км/год.

Відповідь: 50 км/год.

3.2. $\begin{cases} x^2-2x-8\le 0, \\ x^2-4\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)(x-4)\le 0, \\ (x+2)(x-2)\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\in[-2;4], \\ x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty); \end{cases}$

$x\in\{-2\}\cup[2;4]$. Знаходимо цілі розв'язки системи $x\in\{-2;2;3;4\}$.

Відповідь: $-2; 2; 3; 4$.



3.3. Нехай $ABCD$ — ромб, BE — висота, $AE = ED$, AC — діагональ, $AC = 4\sqrt{3}$ см. Розглянемо ΔABD, у якому BE — висота і медіана, тому ΔABD — рівнобедрений, а оскільки $AB = AD$, то й рівносторонній. Тоді $\angle BAD = 60°$, $\angle OAD = 30°$. З ΔAOD: $OD = AO\cdot \text{tg}30° = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2$ (см). $BD = 2\cdot 2 = 4$ (см).

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC\cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4 = 8\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $8\sqrt{3}$ см^2.

ВАРІАНТ №7

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2		X		
1.3				X
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5	X			
1.6			X	
1.7				X
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10	X			
1.11			X	
1.12				X

1.1. 5 дм 7 см – 27 см = 57 см – 27 см = 30 см = 3 дм.

1.2. $1\frac{1^{\backslash 2}}{6}+3\frac{3^{\backslash 3}}{4}=4\frac{2+9}{12}=4\frac{11}{12}$.

1.5. $\frac{3a^9}{b^6}:9a^3b^2=\frac{3a^9}{b^6}\cdot\frac{1}{9a^3b^2}=\frac{a^6}{3b^8}$.

1.8. Ціна товару зросла на: 312 – 260 = 52 (грн), що становить 52 : 260 = 0,2 = 20%.

1.10. $P = 20 + 20 = 40$ (см).

1.11. Нехай сторона квадрата дорівнює x см. Рівняння: $x^2+x^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$;

$2x^2 = 18$; $x^2 = 9$. Площа квадрата дорівнює: $S = x^2 = 9$ (см^2).

1.12. Прямі, задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами, будуть паралельними або збігатимуться, якщо їхні кутові коефіцієнти рівні. У варіантах відповідей прямих, які паралельні заданій прямій і не збігаються з нею, є пряма Г) $0{,}5x - y + 2 = 0$; $y = 0{,}5x + 2$.

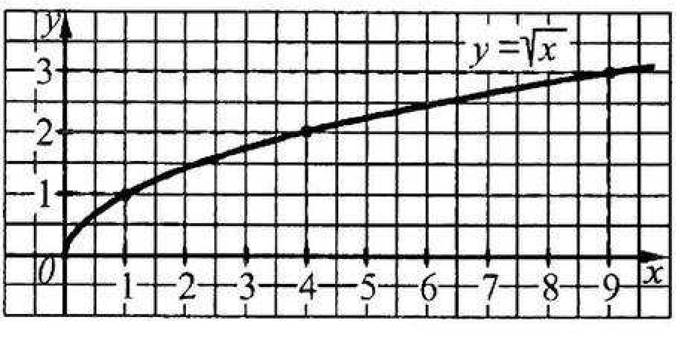
Частина 2

2.1.	3
2.2.	[0; 9)
2.3.	$\frac{1}{4}$
2.4.	$\sqrt{10}$ см

2.1. $\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2+5x}=\frac{3+x}{x+5}$; $\frac{x+5+10-x(x+3)}{x(x+5)}=0$; $\frac{x^2+2x-15}{x(x+5)}=0$; $\begin{cases}x_1=-5,\ x_2=3,\\ x\neq 0,\ x\neq -5.\end{cases}$ $x=3$.

2.2. Будуємо графік функції $y=\sqrt{x}$ по точках:

$y=\sqrt{x}$				
x	0	1	4	9
y	0	1	2	3



Значення функції $y=\sqrt{x}$ менші за 3 на проміжку [0; 9).

2.3. Нехай q — знаменник прогресії. Отримаємо: $q=b_6:b_5=-\dfrac{8}{4}=-2$.

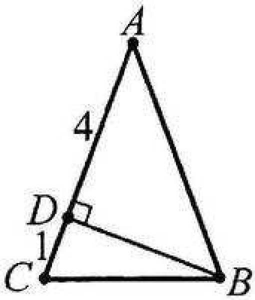
$b_5=b_1\cdot q^4;\ b_1=\dfrac{b_5}{q^4}=\dfrac{4}{(-2)^4}=\dfrac{1}{4}$.

2.4. $AC=AB=4+1=5$ (см). З ΔABD ($\angle D=90°$):

$DB=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{25-16}=3$ (см). З ΔBCD ($\angle D=90°$):

$CB=\sqrt{CD^2+DB^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ (см).

Відповідь: $\sqrt{10}$ см.



Частина 3

3.1. Нехай перший робітник виконує всю роботу самостійно за x год, а другий за y год. Тоді перший виконає третину роботи за $\dfrac{x}{3}$ год, а другий четверту частину за $\dfrac{y}{4}$ год. За умовою $\dfrac{x}{3}-5=\dfrac{y}{4}$. Працюючи разом робітники виконують за годину $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$ частину роботи. За умовою разом вони виконують роботу за 8 год, тому: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8}$. Система:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{8},\\ \dfrac{x}{3}-5=\dfrac{y}{4};\end{cases}\begin{cases}8x+8y=xy,\\ x=\dfrac{3y}{4}+15;\end{cases}\begin{cases}8\left(\dfrac{3y}{4}+15\right)+8y=\left(\dfrac{3y}{4}+15\right)y,\\ x=\dfrac{3y}{4}+15;\end{cases}$$

$$\begin{cases}8(3y+60)+32y=(3y+60)y,\\ x=\dfrac{3y}{4}+15;\end{cases}\begin{cases}3y^2+4y-480=0,\\ x=\dfrac{3y}{4}+15;\end{cases}\begin{cases}y_1=-\dfrac{40}{3},\\ x_1=5;\end{cases}\text{ або }\begin{cases}y_2=12,\\ x_2=24.\end{cases}$$

Пара x_1, y_1 не задовольняє умову задачі. Отже, перший робітник виконає роботу самостійно за 24 год, а другий за 12 год.

Відповідь: 24 год і 12 год.

3.2. Абсциса вершини параболи дорівнює 1, тому: $\dfrac{-b}{2a}=1; b=-2a$. Точка $B(0;\,7)$ належить параболі, тому $7=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c; c=7$. Рівняння параболи

$y = ax^2 + bx + c$ набере вигляду: $y = ax^2 - 2ax + 7$. Точка $A(1; 5)$ належить параболі, тому $5 = a \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + 7; a = 2$. Отже, $a = 2$, $b = -2 \cdot 2 = -4$, $c = 7$.

Відповідь: $a = 2; b = -4; c = 7$.

3.3. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{ML}$: $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{(-4-3; 16-(-5))} = \overrightarrow{(-7; 21)}$, $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{(6-3; -4-(-5))} = \overrightarrow{(3; 1)}$. Тоді $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{ML} = -7 \cdot 3 + 21 \cdot 1 = 0$, тобто $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{ML}$ і трикутник KML — прямокутний ($\angle M = 90°$).

Оскільки ΔKML — прямокутний, то центр описаного кола збігається із серединою гіпотенузи KL. Координати центра кола: $x_0 = \frac{x_K + x_L}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1$, $y_0 = \frac{y_K + y_L}{2} = \frac{16+(-4)}{2} = 6$. Отже, координати центра кола $O(1; 6)$. Радіус: $R = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}\sqrt{(6-(-4))^2 + (-4-16)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{100+400} = \frac{1}{2}\sqrt{500} = 5\sqrt{5}$ (см).

Отже, рівняння кола: $(x-1)^2 + (y-6)^2 = (5\sqrt{5})^2$; $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 125$.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y-6)^2 = 125$.

ВАРІАНТ №8

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2			X	
1.3		X		
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6		X		
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9	X			
1.10				X
1.11		X		
1.12			X	

1.1. $0,5x - 4 = 0$; $0,5x = 4$; $x = 8$.

1.4. $x(3x - 8) - (3x^2 - 4x + 5) = 3x^2 - 8x - 3x^2 + 4x - 5 = -4x - 5$.

1.5. $12 \cdot 3^{-2} = \frac{12}{3^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

1.6. $\frac{x^2 - xy}{x^2} : \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \frac{x^2 - xy}{x^2} \cdot \frac{xy}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{x(x-y)}{x^2} \cdot \frac{xy}{(x-y)^2} = \frac{y}{x-y}$.

1.11. Довжина кола дорівнює: $2\pi \cdot 9 = 18\pi$ (см). Довжина дуги кола дорівнює: $18\pi : 360 \cdot 120 = 6\pi$ (см).

1.12. За формулою площі паралелограма отримаємо: $a \cdot 6 = 12 \cdot 4$; $6a = 48$; $a = 8$ (см).

Частина 2

2.1.	-45
2.2.	$x^2 - 4x - 2 = 0$

2.3.	(0,25; –1); (2; 6)
2.4.	96°

2.1. $\frac{6x^2 - 2xy}{3y^2 - 9xy} = \frac{2x(3x - y)}{-3y(3x - y)} = -\frac{2x}{3y}$.

Якщо $x = 2,5$; $y = \frac{1}{27}$, то $-\frac{2x}{3y} = -\frac{2 \cdot 2,5}{3 \cdot \frac{1}{27}} = -5 \cdot 9 = -45$.

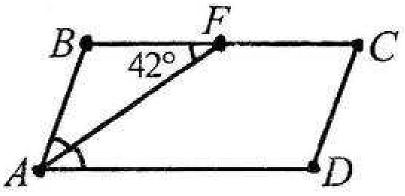
2.2. $y = x^2 + bx + c$. З теореми Вієта маємо: $b = -(x_1 + x_2) = -\left(2 - \sqrt{6} + 2 + \sqrt{6}\right) = -4$.

$c = x_1 x_2 = \left(2 - \sqrt{6}\right)\left(2 + \sqrt{6}\right) = 4 - 6 = -2$. Отже, шукане рівняння $x^2 - 4x - 2 = 0$.

2.3. $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1; \end{cases} \begin{cases} y = 4x - 2, \\ \frac{y + 3x}{xy} = 1; \end{cases} \begin{cases} y = 4x - 2, \\ y + 3x = xy, \\ x \neq 0, \ y \neq 0; \end{cases} \begin{cases} y = 4x - 2, \\ 4x - 2 + 3x = x(4x - 2), \\ x \neq 0, \ y \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4x - 2, \\ 4x^2 - 9x + 2 = 0, \\ x \neq 0, \ y \neq 0; \end{cases} \begin{cases} y = 4x - 2, \\ x_1 = \frac{1}{4}, \ x_2 = 2, \\ x \neq 0, \ y \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}, \\ y_1 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

2.4. $\angle AFB = 42°$. Тоді $\angle DAF = \angle AFB = 42°$ ($AD \| BC$, AF — січна). $\angle DAF = \angle FAB = 42°$ (AF — бісектриса). Тому $\angle A = 42° + 42° = 84°$, $\angle B = 180° - \angle A = = 180° - 84° = 96°$.



Частина 3

3.1. Нехай швидкість течії x км/год, тоді рибалка проплив 3 км проти течії за $\frac{3}{2,7-x}$ год, а назад течія віднесла його за $\frac{3}{x}$ год. Рівняння: $\frac{3}{2,7-x}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{2}$;

$$\frac{3\cdot 2x+3\cdot 2(2,7-x)-9(2,7-x)x}{2x(2,7-x)}=0;\ \frac{2x+2(2,7-x)-3x(2,7-x)}{2x(2,7-x)}=0;$$

$$\frac{2\cdot 2,7-3x\cdot 2,7+3x^2}{2x(2,7-x)}=0;\frac{x^2-2,7x+1,8}{2x(2,7-x)}=0;\ \ x_1=1,2, x_2=1,5.$$

Відповідь: 1,2 км/год або 1,5 км/год.

3.2. Нехай $x^2+x-3=t$, тоді $x^2+x-1=t+2$. Отримаємо:

$t(t+2)=3$; $t^2+2t-3=0$; $t_1=1$; $t_2=-3$. Повернемося до заміни.

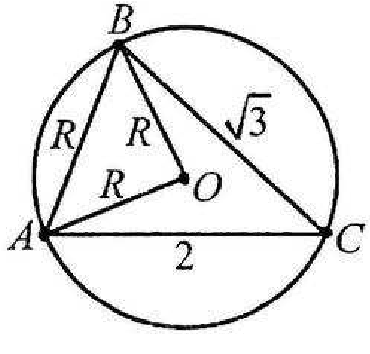
1) $x^2+x-3=1; x^2+x-4=0; x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$;

2) $x^2+x-3=-3; x^2+x=0; x_3=-1; x_4=0$.

Відповідь: $\frac{-1-\sqrt{17}}{2};-1;0;\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

3.3. Нехай ΔABC — заданий трикутник, $AC = 2$ см, $CB = \sqrt{3}$ см, $AB = R$, де R — радіус описаного навколо трикутника ABC кола. З теореми косинусів:

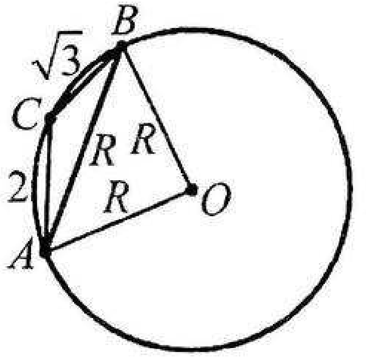
$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C}$. Трикутник AOB — рівносторонній, тому $\angle AOB = 60°$. Кут ACB спирається на дугу 60° або на дугу $360° - 60° = 300°$.



Тоді: 1. $\angle ACB = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$ і: $AB=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cos 30°}=$

$$=\sqrt{4+3-4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{7-6}=1 \text{ (см)}.$$

2. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 300° = 150°$.



$$AB = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{4+3+6} = \sqrt{13} \text{ (см).}$$

Відповідь: 1 см або $\sqrt{13}$ см.

ВАРІАНТ №9

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				Х
1.2		Х		
1.3				Х
1.4		Х		

	А	Б	В	Г
1.5		Х		
1.6			Х	
1.7				Х
1.8			Х	

	А	Б	В	Г
1.9			Х	
1.10				Х
1.11		Х		
1.12				Х

1.2. 385 – 154 = 231 (с) — залишилося прочитати; 231 : 385 = 0,6 = 60%.

1.4. $(3 + x)(x - 3) - (6 + x^2) = (x + 3)(x - 3) - (6 + x^2) = x^2 - 9 - 6 - x^2 = -15$.

1.5. $\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7}$.

1.6. $\left(-1\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{9}{25}$.

1.7. 350 – 300 = 50 (б.) — кількість виграшних білетів; $p = 50 : 350 = \frac{1}{7}$ — шукана ймовірність.

1.8. $9x^2 - 6x + 1 > 0$; $(3x - 1)^2 > 0$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; -\infty\right)$.

1.9. $AB = BC : \sin\angle A = 16 : \sin\angle 30^\circ = 16 : \frac{1}{2} = 32$ (см).

1.10. $a = \sqrt{(10:2)^2 + (24:2)^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$ (см); $P = 13 \cdot 4 = 52$ (см).

1.12. $r = 14 : 2 = 7$ (см); $l = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$ (см).

Частина 2

2.1.	–2
2.2.	(–8; 16]

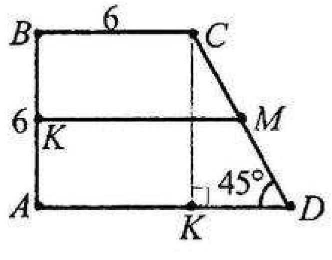
2.3.	$(-\infty;\ 8]$
2.4.	9 см

2.1. $\frac{a^2-9}{6a} \cdot \left(\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3}\right) = \frac{a^2-9}{6a} \cdot \frac{a^2-6a+9-a^2-6a-9}{a^2-9} = \frac{-12a\left(a^2-9\right)}{6a\left(a^2-9\right)} = -2$.

2.2. $-1 \le 3 - \frac{x}{4} < 5$; $-4 \le 12 - x < 20$; $-16 \le -x < 8$; $-8 < x \le 16$; $x \in (-8;\ 16]$.

2.3. $y = -x^2 + 2x + 7$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Координати її вершини: $x_{в.} = -\frac{2}{-2} = 1$; $y_{в.} = y(1) = -1 + 2 + 7 = 8$. Область значень функції $y \in (-\infty;\ 8]$.

2.4. $CK \perp AD$; $AB = BC = 6$ см. ΔCKD прямокутний і рівнобедрений, тому $KD = KC = 6$ (см). Отже, $AD = AK + KD = 6 + 6 = 12$ (см). Тоді $KM = \frac{BC + AD}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9$ (см).



3.1. Нехай $\overline{ab}$ — шукане число, тоді $10a + b = 3(a + b)$ і

$10a + b = 10b + a - 45$. Система: $\begin{cases} 10a + b = 3(a + b), \\ 10a + b = 10b + a - 45; \end{cases}$ $\begin{cases} 7a = 2b, \\ 9a = 9b - 45; \end{cases}$

$\begin{cases} 7a = 2b, \\ a = b - 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 7(b - 5) = 2b, \\ a = b - 5; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 7, \\ a = 2. \end{cases}$ Отже, шукане число 27.

Відповідь: 27.

3.2. Спростимо даний вираз: $\left(\frac{3a+2}{3a^2+1} - \frac{18a^3 - a - 9}{9a^4 - 1} + \frac{3a-2}{3a^2-1}\right) : \frac{a^2 + 10a + 25}{9a^4 - 1} =$

$$= \frac{(3a+2)(3a^2-1) - (18a^3 - a - 9) + (3a-2)(3a^2+1)}{9a^4 - 1} \cdot \frac{9a^4 - 1}{a^2 + 10a + 25} =$$

$$= \frac{9a^3 - 3a + 6a^2 - 2 - 18a^3 + a + 9 + 9a^3 + 3a - 6a^2 - 2}{(a+5)^2} = \frac{a+5}{(a+5)^2} = \frac{1}{a+5}.$$ Для

$a < -5$ отримаємо: $a + 5 < 0$ і $\frac{1}{a+5} < 0$, що й потрібно було довести.

3.3. $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 =$
$= 2^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2 \cdot 3^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - 14$. Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} - 14 = -17$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Отже,

$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. = \frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$, звідки $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 120°$.

Відповідь: 120°.

ВАРІАНТ №10

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2		X		
1.3			X	
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5	X			
1.6		X		
1.7				X
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10	X			
1.11		X		
1.12			X	

1.1. 36 : 0,25 = 144 (см).

1.2. $7-(-4)=11$.

1.4. $\frac{x}{6}-\frac{x}{10}=\frac{2}{15}\Big|\cdot 30$; $5x-3x=4$; $2x=4$; $x=2$.

1.5. $x^2+3x+2=0$; $x^2+x+2x+2=0$; $x(x+1)+2(x+1)=0$; $(x+1)(x+2)=0$.
Менший корінь дорівнює -2.

1.6. $\frac{a^2-1}{5a+5}=\frac{(a-1)(a+1)}{5(a+1)}=\frac{a-1}{5}$.

1.7. $q=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

1.8. $-12<8x-4\le 12$; $-12+4<8x\le 12+4$; $-8<8x\le 16$; $-1<x\le 2$. Цілими розв'язками нерівності є числа 0, 1, 2 — усього 3 цілих розв'язки.

1.9. $\angle AOC=2\angle ABC=2\cdot 40°=80°$.

1.10. $\frac{20}{2}\cdot 6=60$ (см^2).

1.11. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{(-1-3;-3-(-2))}=\overrightarrow{(-4;-1)}$; $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$.

1.12. За теоремою косинусів отримаємо: $8^2=7^2+5^2-2\cdot 7\cdot 5\cos\angle A$;

$70\cos\angle A=10$; $\cos\angle A=\frac{1}{7}$.

Частина 2

2.1.	$\frac{16}{b^2}$
2.2.	$\sqrt{3}$

2.3.	-1
2.4.	15 см

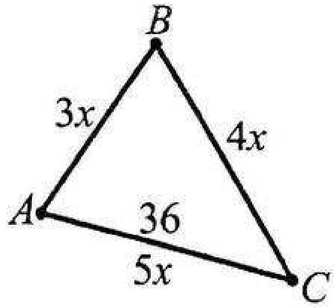
2.1. $\left(\frac{3a^{-3}}{4b^{-2}}\right)^{-2}\cdot 9a^{-6}b^2=\left(\frac{3}{4}a^{-3}b^2\right)^{-2}\cdot 9a^{-6}b^2=\frac{16}{9}a^6b^{-4}\cdot 9a^{-6}b^2=16b^{-2}=\frac{16}{b^2}$.

2.2. $1{,}5\sqrt{12}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-0{,}6\sqrt{75}=1{,}5\cdot 2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}-0{,}6\cdot 5\sqrt{3}=3\sqrt{3}+\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

2.3. $12+4x-x^2>0$; $x^2-4x-12<0$; $(x-6)(x+2)<0$; $x\in(-2;\ 6)$.

Найменшим цілим розв'язком нерівності є число -1.

2.4. Нехай найбільша сторона $5x$, тоді $3x + 4x + 5x = 36$; $12x = 36$; $x = 3$ (см). Отже, найбільша сторона трикутника дорівнює $5x = 5 \cdot 3 = 15$ (см).



Частина 3

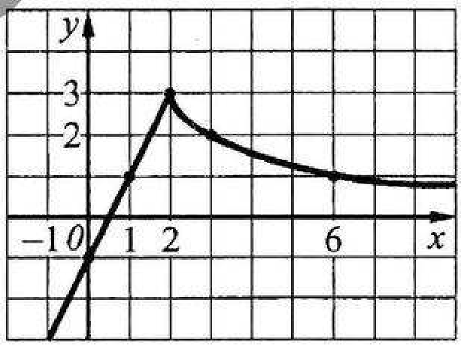
3.1. Нехай перший оператор набирає щогодини x сторінок рукопису, тоді другий — $(x-1)$ сторінок. 120 сторінок перший оператор набере за $\frac{120}{x}$ год, а другий 100 сторінок за $\frac{100}{x-1}$ год. Рівняння:

$$\frac{120}{x}+1=\frac{100}{x-1};\frac{120(x-1)+x(x-1)-100x}{x(x-1)}=0;\frac{x^2+19x-120}{x(x-1)}=0;x_1=-24,x_2=5.$$

$x_1=-24$ — не задовольняє умову задачі. $x_2=5$, $(x_2-1)=5-1=4$.

Відповідь: 5 с. і 4 с.

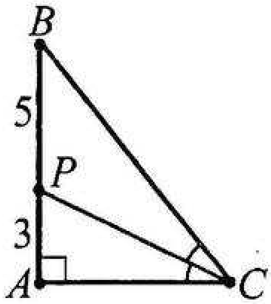
3.2. Графік функції $\begin{cases}2x-1, \text{ якщо } x<2,\\ \frac{6}{x}, \text{ якщо } x\geq 2\end{cases}$ складається з частини гіперболи $y=\frac{6}{x}$ для $x\geq 2$ та частини прямої $y=2x-1$ для $x<2$.



	$y=2x-1$		$y=\frac{6}{x}$		
x	1	0	2	3	6
y	1	–1	3	2	1

Область значень функції $(-\infty;3]$.

3.3. Нехай BAC — заданий прямокутний трикутник ($\angle A=90°$), CP — бісектриса, $AP=3$ см, $PB=5$ см. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам: $AC:BC=AP:PB=3:5$. Нехай $AC=3x$ см, тоді $BC=5x$ см. За теоремою Піфагора $BC^2=AB^2+AC^2$; $25x^2=(3+5)^2+9x^2$; $16x^2=64$; $x^2=4$; $x_1=2$, $x_2=-2$ — не підходить. Отже, $AC=3\cdot 2=6$ (см). Тоді



$$S=\frac{1}{2}AC\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24\text{ (см}^2).$$

Відповідь: 24 см^2.

ВАРІАНТ №11

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2			X	
1.3			X	
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6		X		
1.7			X	
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10		X		
1.11	X			
1.12		X		

1.5. $\frac{a^{\backslash b}}{2}+\frac{3^{\backslash 2}}{b}=\frac{ab+6}{2b}$.

1.8. Якщо $x_n=-2n-1$, то: $x_1=-2\cdot 1-1=-3$; $x_{10}=-2\cdot 10-1=-21$. Тоді:
$S_{10}=\frac{-3-21}{2}\cdot 10=-120$.

1.10. Менший кут ромба дорівнює $2\cdot 35^\circ=70^\circ$. Тоді більший дорівнює $180^\circ-70^\circ=110^\circ$.

1.11. $\sqrt{3}\cos 150^\circ=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}$.

Частина 2

2.1.	20
2.2.	$a=2$; $c=-24$

2.3.	18 років
2.4.	3π см^2

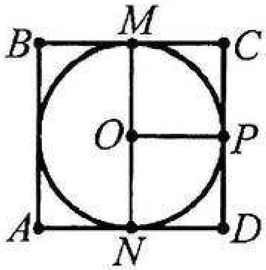
2.1. $3\sqrt{\frac{x}{5}}-6=0.\sqrt{\frac{x}{5}}=2$; $\frac{x}{5}=4$; $x=20$.

2.2. $y=ax^2+8x+c$.

$\begin{cases}a\cdot(-6)^2+8\cdot(-6)+c=0,\\ a\cdot 2^2+8\cdot 2+c=0;\end{cases}\begin{cases}c=48-36a,\\ 4a+16+48-36a=0;\end{cases}\begin{cases}c=48-36a,\\ 32a=64;\end{cases}\begin{cases}c=-24,\\ a=2.\end{cases}$

2.3. Нехай туристу, який вийшов з намету x років. Тоді вік п'яти туристів становить $6\cdot 23-x$ років, а їх середній вік $\frac{6\cdot 23-x}{5}=24$; $138-x=120$; $x=18$.
Отже, туристу18 років.

2.4. Площа квадрата $S_{ABCD}=AB^2$; $12=AB^2$; $AB=2\sqrt{3}$ см.



Площа круга $S=\pi R^2=\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi$ (см^2).

3.1. Нехай x км/год — швидкість першого пішохода, тоді він пройшов половину шляху 12 км за $\left(\dfrac{12}{x}\right)$ год. Нехай y км/год — швидкість другого пішохода, тоді він пройшов іншу половину шляху 12 км за $\left(\dfrac{12}{y}\right)$ год. Оскільки перший вийшов на годину раніше, то: $\dfrac{12}{x}-1=\dfrac{12}{y}$. За умовою разом пішоходи подолали б всю віддаль за 2 год 24 хв, тому: $2\dfrac{2}{5}\cdot(x+y)=24$.

Система: $\begin{cases}\dfrac{12}{x}-1=\dfrac{12}{y}\,\Big|\cdot xy,\\ 2\dfrac{2}{5}\cdot(x+y)=24;\end{cases}$ $\begin{cases}12y-xy=12x,\\ x+y=10;\end{cases}$ $\begin{cases}12y-(10-y)y=12(10-y),\\ x=10-y;\end{cases}$

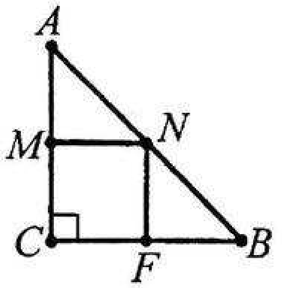
$\begin{cases}12y-10y+y^2=120-12y,\\ x=10-y;\end{cases}$ $\begin{cases}y^2+14y-120=0,\\ x=10-y;\end{cases}$ 1) $\begin{cases}y_1=6,\\ x_1=4;\end{cases}$ $(4;6)$;

2) $\begin{cases}y_2=-20,\\ x_2=30\end{cases}$ — не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість другого пішохода 6 км/год, а швидкість першого — 4 км/год.

Відповідь: 4 км/год, 6 км/год.

3.2. $\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+2\cdot2\cdot\sqrt{7}+2^2}-\left|1-\sqrt{7}\right|=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{7}+2\right)^2}-\left(\sqrt{7}-1\right)=\sqrt{7}+2-\sqrt{7}+1=3$.



3.3. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник ($\angle C=90°$), $AC=CB=6$ см. Оскільки трикутник прямокутний рівнобедрений, то $\angle A=\angle B=45°$, звідки $\angle MNA=45°$, тому $MN=AM$ і $MN=MC$, бо $MNFC$ — квадрат. Отже, $MC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\cdot6=3$ (см). Тоді $S_{MNFC}=MC^2=3^2=9$ (см^2).

Відповідь: 9 см^2.

ВАРІАНТ №12

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1	X			
1.2		X		
1.3			X	
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6	X			
1.7				X
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10		X		
1.11		X		
1.12	X			

1.1. 50 км = 5 000 000 см. Отже, масштаб карти становить 1 : 5 000 000.

1.2. $x+5\frac{2}{5}=10$; $x=10-5\frac{2}{5}$; $x=4\frac{3}{5}$.

1.5. $12x^{12}\cdot\frac{y^3}{8x^4}=\frac{12x^{12}}{1}\cdot\frac{y^3}{8x^4}=\frac{3}{2}x^8y^3$ *— відповідь не точна, бо вираз* $\frac{3}{2}x^8y^3$ *не є дробом.*

1.6. $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}}=\frac{\left(a-\sqrt{5}\right)\left(a+\sqrt{5}\right)}{a-\sqrt{5}}=a+\sqrt{5}.$

1.7. $x_в=\frac{6}{2\cdot 3}=1.$

1.8. Серед 35 натуральних чисел від 1 до 35 із цифрою 3 є такі числа: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35 — усього 9 чисел. Отже, шукана ймовірність дорівнює $\frac{9}{35}$.

1.9. Нехай $\angle BOC=\angle AOD=x$, тоді $\angle AOB=5x$. Рівняння: $x+5x=180$; $6x=180$; $x=30$. Отже, $\angle BOC=30°$.

1.10. Третя частина кола містить дугу у 360° : 3 = 120°. Тоді вписаний кут, який спирається на цю дугу, дорівнює: 120° : 2 = 60°.

1.11. Друга сторона прямокутника дорівнює: $\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{25}=5$ (см). Тоді площа прямокутника дорівнює: $12\cdot 5=60$ (см^2).

Частина 2

2.1.	–3; 6
2.2.	$y=-1,5x$

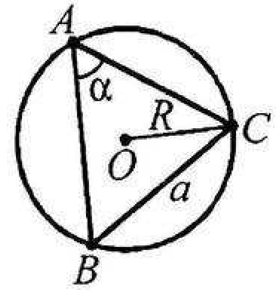
2.3.	16
2.4.	60°; 120°

2.1. $\frac{x-7}{x-2}+\frac{x+4}{x+2}=1$; $\frac{x-7}{x-2}+\frac{x+2+2}{x+2}=1$; $\frac{x-7}{x-2}+1+\frac{2}{x+2}=1$; $\frac{x-7}{x-2}+\frac{2}{x+2}=0$;

$\frac{x-7}{x-2}=\frac{-2}{x+2}$; $\begin{cases}(x-7)(x+2)=-2(x-2),\\(x-2)(x+2)\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-3x-18=0,\\(x+2)(x-2)\neq 0;\end{cases}$ $x_1=-3$; $x_2=6$.

2.2. Координати точки $A(-2;\,3)$ задовольняють рівняння прямої $y=kx$. Отже, $3=-2k$; $k=-1,5$. Рівняння прямої: $y=-1,5x$.

2.3. $q = b_4 : b_3 = -3 : 6 = -0{,}5$. $b_1 = \dfrac{b_3}{q^2} = \dfrac{6}{(-0{,}5)^2} = 24$. $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{24}{1+0{,}5} = 16$.



2.4. $BC = a = 12$ см, $OC = R = 4\sqrt{3}$ см. За наслідком теореми синусів $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, звідки $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R} = \dfrac{12}{2 \cdot 4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

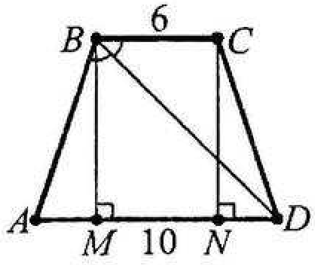
$\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 120°$.

Частина 3

3.1. Нехай перша труба може наповнити басейн за x год, тоді за 1 год вона наповнить $\dfrac{1}{x}$ частину басейну. Друга труба за 1 год наповнить $\dfrac{1}{x+8}$, а третя — $\dfrac{1}{x+2}$ частини басейну. Рівняння: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+8} + \dfrac{1}{x+2}$;

$\dfrac{x(x+2)+x(x+8)-(x+2)(x+8)}{x(x+2)(x+8)} = 0$; $\dfrac{x^2-16}{x(x+2)(x+8)} = 0$; $x_1 = -4$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 4$ (год). Отже, перша труба може наповнити басейн за 4 год, друга — за 4 + 8 = 12 (год), третя — за 4 + 2 = 6 (год).
Відповідь: 4 год, 12 год, 6 год.

3.2. $\sqrt{7-\sqrt{|x|-5}} = 2$; $7-\sqrt{|x|-5} = 4$; $\sqrt{|x|-5} = 3$; $|x|-5 = 9$; $|x| = 14$;
$x_1 = 14, x_2 = -14$.
Відповідь: –14; 14.



3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \| BC$, $AB = CD$), BD — діагональ, BM і CN — висоти, $BC = 6$ см, $AD = 10$ см, $\angle ABD = \angle DBC$. $\angle DBC = \angle BDA$ ($BC \| AD$, BD — січна). Отже, $\angle ABD = \angle ADB$ і ΔABD — рівнобедрений, тому $AB = AD = 10$ см. $MN = BC = 6$ см. $AM = ND = (10 - 6) : 2 = 2$ (см). З ΔABM ($\angle M = 90°$) за теоремою Піфагора: $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 10^2 - 2^2 = 96$. $MD = MN + ND = 6 + 2 = 8$ (см).

З ΔBMD ($\angle M = 90°$): $BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{96 + 8^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ (см).

Відповідь: $4\sqrt{10}$ см.

ВАРІАНТ №13

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2		X		
1.3			X	
1.4	?	?	?	?

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6		X		
1.7			X	
1.8	X			

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10	X			
1.11		X		
1.12			X	

1.3. $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a-4)(a^2 + 4a + 16)$.

1.4. $-7ab + (5a + b)(2b - 3a) = -7ab + 10ab - 15a^2 + 2b^2 - 3ab = -15a^2 + 2b^2$ — *серед запропонованих правильної відповіді немає.*

1.5. $\left(\dfrac{a^{12}}{a^3 \cdot a^4}\right)^{-2} = \left(a^5\right)^{-2} = a^{-10}$.

1.6. $\dfrac{2c-10}{4c^2+4c+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c-5} = \dfrac{2(c-5)}{(2c+1)^2} \cdot \dfrac{2c+1}{c-5} = \dfrac{2}{2c+1}$.

1.10. Нехай шукана проекція дорівнює x см. Отримаємо: $6^2 = 9 \cdot x$; $9x = 36$; $x = 4$ (см).

1.11. $R = a_6 = 48 : 6 = 8$ (см).

1.12. $\dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot d_2 = 200$; $20d_2 = 200$; $d_2 = 10$ (см).

Частина 2

2.1.	$\dfrac{x}{x+3}$
2.2.	$\dfrac{x+3}{2(x+1)}$

2.3.	(–2; –2), (4; 1)
2.4.	16 см

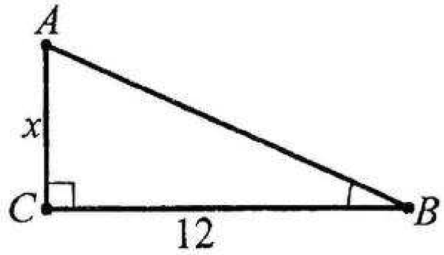
2.1. $4 - x + \dfrac{x^2-12}{x+3} = \dfrac{(4-x)(x+3)+x^2-12}{x+3} = \dfrac{4x+12-x^2-3x+x^2-12}{x+3} = \dfrac{x}{x+3}$.

2.2. $\dfrac{x^2-9}{2x^2-4x-6} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x^2-2x-3)} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x+1)(x-3)} = \dfrac{x+3}{2(x+1)}$.

2.3. $\begin{cases} x-2y=2, \\ y=\dfrac{4}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2(y+1), \\ y=\dfrac{4}{2(y+1)}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2(y+1), \\ y=\dfrac{2}{y+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2(y+1), \\ y^2+y-2=0, \\ y \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2(y+1), \\ y_1=-2,\ y_2=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=-2; \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=1. \end{cases}$ (–2; –2), (4; 1).

2.4. $x = AB \cdot \sin B = AB \cdot \dfrac{4}{5}$; $AB = \dfrac{5x}{4}$. $AB^2 = AC^2 + CB^2$;



$\left(\dfrac{5x}{4}\right)^2 = x^2 + 144$; $\dfrac{25x^2}{16} = x^2 + 144$; $25x^2 - 16x^2 =$
$= 144 \cdot 16$; $x^2 = 16 \cdot 16$; $x = 16$; $AC = x = 16$ (см).

Частина 3

3.1. Нехай в першому ящику було x кульок, а в другому y кульок. Система:

$$\begin{cases} x+10 = y-10, \\ 4(x-20) = y+20; \end{cases} \begin{cases} y = x+20, \\ 4x-80 = x+20+20; \end{cases} \begin{cases} y = x+20, \\ 3x = 120; \end{cases} \begin{cases} y = 60, \\ x = 40. \end{cases}$$

Відповідь: 40 кульок, 60 кульок.

3.2. $\dfrac{(x+a)(x-2a-3)}{x-7} = 0$. Рівняння матиме один корінь, коли множники чисельника будуть рівні і не перетворюватимуться в 0 при $x = 7$ або коли множники чисельника будуть не рівні, але один з них дорівнюватиме $x - 7$.

1) $x + a = x - 2a - 3; 3a = -3; a = -1$. Рівняння: $\dfrac{(x-1)(x-2\cdot(-1)-3)}{x-7} = 0; \dfrac{(x-1)^2}{x-7} = 0$,

яке має один корінь. Якщо $a = -1$, то рівняння має один корінь;

2) а) $x + a = x - 7; a = -7$. Рівняння: $\dfrac{(x-7)(x-2\cdot(-7)-3)}{x-7} = 0; \dfrac{(x-7)(x+11)}{x-7} = 0$,

яке має один корінь. Якщо $a = -7$, то рівняння має один корінь;

б) $x - 2a - 3 = x - 7; 2a = 4; a = 2$. Рівняння: $\dfrac{(x+2)(x-2\cdot 2-3)}{x-7} = 0; \dfrac{(x+2)(x-7)}{x-7} = 0$,

яке має один корінь. Якщо $a = 2$, то рівняння має один корінь.

Відповідь: –7; –1; 2.

3.3. Нехай r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола, a — сторона многокутника. Тоді: $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}} = 4\sqrt{3}$; $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}} = 8$, звідки:

$a = 16\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ і $a = 8\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. $16\sin\dfrac{180^\circ}{n} = 8\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$;

$2\sin\dfrac{180^\circ}{n} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$; $2\cos\dfrac{180^\circ}{n} = \sqrt{3}$; $\cos\dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{180^\circ}{n} = 30^\circ$; $n = 6$.

Тоді $a = 16\sin\dfrac{180^\circ}{n} = 16\sin 30^\circ = 8$ (см).

Відповідь: $n = 6$, $a = 8$ см.

ВАРІАНТ №14

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2			X	
1.3	X			
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6		X		
1.7			X	
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10	X			
1.11				X
1.12				X

1.2. $96 \cdot 0{,}06 = 5{,}76$ (кг).

1.3. Якщо $x = -2$, то $y = \dfrac{-2}{2 \cdot (-2) + 1} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

1.4. $2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4) = 2x(x - 2)(x + 2)$.

1.5. $\dfrac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 7$.

1.6. $\dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = 0; \dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4} = 0;$ $\begin{cases}(x-4)(x+4) = 0,\\ x - 4 \neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1 = 4, x_2 = -4,\\ x \neq 4;\end{cases}$ $x = -4$.

1.8. $2x^2 - x + 1 \le 0$; $D = 1 - 8 = -7 < 0$ — нерівність розв'язків не має.

1.9. Оскільки $\angle A = \angle C$, то $AB = BC = 7$ (см). $P = 7 + 7 + 5 = 19$ (см).

1.10. $12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см).

1.12. $\dfrac{a}{2} = 2\sqrt{3} : \operatorname{tg} 30^\circ$; $a = 4\sqrt{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $a = 12$ (см); $P = 3 \cdot 12 = 36$ (см).

Частина 2

2.1.	0,4		**2.3.**	$[3; +\infty)$
2.2.	-2		**2.4.**	-2; 2

2.1. $\left(\dfrac{2x+1}{x-3} + \dfrac{2x-1}{x+3}\right) \cdot \dfrac{x^2-9}{10x^2+15} = \dfrac{(2x+1)(x+3)+(2x-1)(x-3)}{x^2-9} \cdot \dfrac{x^2-9}{10x^2+15} =$

$= \dfrac{2x^2+6x+x+3+2x^2-6x-x+3}{10x^2+15} = \dfrac{4x^2+6}{10x^2+15} = \dfrac{2(2x^2+3)}{5(2x^2+3)} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4.$

2.2. $(x-3)(x+3) - 4x \le (x-1)^2 - 5$; $x^2 - 9 - 4x \le x^2 - 2x + 1 - 5$; $-2x \le 5$; $x \ge -2{,}5$;
Найменший цілий розв'язок нерівності $x = -2$.

2.3. $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз.

Абсциса її вершини: $x_{в.} = \dfrac{-3}{2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = 3$. Функція спадає на проміжку $[3; +\infty)$.

2.4. Вектори $\vec{a}\,(2m; -1)$ і $\vec{b}\,(-8; m)$ будуть колінеарними, якщо їх відповідні координати будуть пропорційними: $\frac{2m}{-8} = \frac{-1}{m}$; $2m^2 = 8$; $m^2 = 4$. $m_1 = -2$, $m_2 = 2$.

Частина 3

3.1. Нехай $2x - 4$ — найменше з шуканих парних натуральних чисел, тоді за умовою маємо рівняння: $(2x-4)^2 + (2x-2)^2 + (2x)^2 = (2x+2)^2 + (2x+4)^2$;

$4(x-2)^2 + 4(x-1)^2 + 4x^2 = 4(x+1)^2 + 4(x+2)^2$;

$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$;

$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4; x^2 - 12x = 0$;

$x_1 = 0, x_2 = 12$. $x_1 = 0$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 12$. Отже найменше з шуканих чисел $2 \cdot 12 - 4 = 20$, а решта чисел: 22; 24; 26; 28.

Відповідь: 20; 22; 24; 26; 28.

3.2. $\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) : \left(\sqrt{x}+\sqrt{y} - \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) + \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} : \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{x - \sqrt{xy} + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x + 2\sqrt{xy} + y - 2\sqrt{xy}} = \frac{(x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)(x+y)} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3.3. Точки A, B і C лежатимуть на одній прямій, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ будуть колінеарними. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-3-2; 5-3)} = \overrightarrow{(-5; 2)}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(a-2; 9-3)} = \overrightarrow{(a-2; 6)}$.

$\frac{-5}{a-2} = \frac{2}{6}$; $a - 2 = -15$; $a = -13$.

Відповідь: -13.

ВАРІАНТ №15

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3			X	
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6	X			
1.7		X		
1.8	X			

	А	Б	В	Г
1.9	X			
1.10			X	
1.11		X		
1.12			X	

1.2. $\left(6\frac{1}{4}-8\right):(-0,5)=(6,25-8):(-0,5)=-1,75:(-0,5)=3,5.$

1.4. $|x|+4=17$; $|x|=13$; $x=-13$ або $x=13$.

1.5. $D=81+4\cdot 2\cdot 26>0$ — отже, рівняння має два корені.

1.6. $\frac{x-1}{3x+12}+\frac{2-x}{2x+8}=\frac{x-1^{\backslash 2}}{3(x+4)}+\frac{2-x^{\backslash 3}}{2(x+4)}=\frac{2x-2+6-3x}{6(x+4)}=\frac{4-x}{6(x+4)}.$

1.8. $\begin{cases} x-3,5>5, \\ \frac{x}{2}\geq 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x>8,5, \\ x\geq 12; \end{cases}$ $x\in[12;+\infty)$. Найменшим цілим розв'язком системи нерівностей є число 12.

1.10. $S=6^2\sin 30°=36\cdot\frac{1}{2}=18$ (см^2).

1.11. $\vec{a}\vec{b}=\sqrt{2}\cdot 4\cdot\cos 135°=4\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4.$

1.12. За теоремою синусів маємо:

$\frac{7\sqrt{2}}{\sin 45°}=\frac{AB}{\sin 30°}$; $\frac{7\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AB}{\frac{1}{2}}$; $2AB=14$; $AB=7$ (дм).

Частина 2

2.1.	$4,34\cdot 10^{11}$
2.2.	$5a^3\sqrt{a}$

2.3.	[0; 4]
2.4.	–5, 1

2.1. $4,7\cdot 10^{11}-3,6\cdot 10^{10}=10^{10}\cdot(4,7\cdot 10-3,6)=10^{10}\cdot(47-3,6)=10^{10}\cdot 43,4=4,34\cdot 10^{11}.$

2.2. $\sqrt{25a^7}=\sqrt{25\cdot a^6\cdot a}=5a^3\sqrt{a}.$

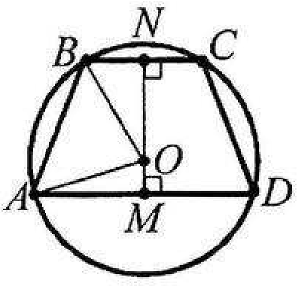
2.3. $3x(x-2)+1\leq(x+1)^2$. $3x^2-6x+1\leq x^2+2x+1$; $2x^2-8x\leq 0$; $2x(x-4)\leq 0$; $x\in[0;4]$.

2.4. $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(y+2)^2}=5$; $16+(y+2)^2=25$; $(y+2)^2=9$; $y+2=\pm 3$; $y_1=1$, $y_2=-5$.

3.1. Оскільки через дві години перший автомобіль проїхав на 20 км більше, то щогодини він випереджає другий автомобіль на 10 км. Якщо швидкість першого — x км/год, то швидкість другого — $(x - 10)$ км/год. За умовою всю відстань 180 км, перший автомобіль проїхав на 15 хв $= \frac{1}{4}$ год швидше, тому рівняння: $\frac{180}{x-10} - \frac{180}{x} = \frac{1}{4}$; $\frac{4 \cdot 180 \cdot x - 4 \cdot 180(x-10) - x(x-10)}{4x(x-10)} = 0$;

$\frac{-x^2 + 10x + 7200}{4x(x-10)} = 0$; $\frac{x^2 - 10x - 7200}{4x(x-10)} = 0$; $x_1 = -80$ — не задовольняє умову задачі; $x_2 = 90$. Тоді 90 – 10 = 80 (км/год) — швидкість другого автомобіля.
Відповідь: 90 км/год і 80 км/год.

3.2. Розглянемо функцію $a(n) = n^2 - 12n + 17$ на множині натуральних чисел. Графіком цієї функції є точки параболи з натуральними абсцисами направленої вітками вгору з вершиною в точці з абсцисою $n_в = \frac{12}{2 \cdot 1} = 6$. У цій точці досягається мінімальне значення даної функції $a(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 17 = -19$.
Відповідь: $a_6 = -19$.



3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \| BC$, $AB = CD$), MN — висота, $MN = 14$ см, $AD = 16$ см, $BC = 12$ см. $AO = BO = R$. Оскільки трапеція рівнобедрена, то $AM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ (см), $BN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 12 =$ $= 6$ (см). $MN = MO + ON = 14$ (см). З ΔAOM ($\angle M = 90°$):
$OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 8^2} = \sqrt{R^2 - 64}$. З ΔBON ($\angle N = 90°$): $ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{R^2 - 6^2} = \sqrt{R^2 - 36}$.
Тоді $\sqrt{R^2 - 64} + \sqrt{R^2 - 36} = 14$; $\sqrt{R^2 - 64} = 14 - \sqrt{R^2 - 36}$;
$R^2 - 64 = 196 - 28\sqrt{R^2 - 36} + R^2 - 36$; $28\sqrt{R^2 - 36} = 224$; $\sqrt{R^2 - 36} = 8$;
$R^2 - 36 = 64$; $R^2 = 100$; $R = 10$ см. Тоді $C = 2\pi R$; $C = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ (см).
Відповідь: 20π см.

ВАРІАНТ №16

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2			X	
1.3		X		
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6		X		
1.7				X
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10				X
1.11		X		
1.12			X	

1.1. $999 + 1\,000 = 1\,999$.

1.3. Якщо $a = -0{,}2$, то $5a - 2{,}5 = 5 \cdot (-0{,}2) - 2{,}5 = -1 - 2{,}5 = -3{,}5$.

1.5. $\dfrac{3^{\backslash 3y}}{4x} - \dfrac{5^{\backslash 2x}}{6y} = \dfrac{9y - 10x}{12xy}$.

1.8. $q = 1 : (-0{,}5) = -2$; $b_4 = -2 \cdot (-2) = 4$; $S = -0{,}5 + 1 + (-2) + 4 = 2{,}5$.

1.9. $\angle BOM = 180° - 162° = 18°; \angle KOM = 135° - 18° = 117°$.

1.11. За теоремою косинусів отримаємо: $NK^2 = 5^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 -$

$- 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3}\cos 30° = 25 + 27 - 30 \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 52 - 45 = 7$; $MN = \sqrt{7}$ (см).

1.12. $\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{0 \cdot 4 + (-3) \cdot (-3)}{\sqrt{0^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{9}{3 \cdot 5} = \dfrac{3}{5}$.

Частина 2

2.1.	$19 + 3\sqrt{2}$	**2.3.**	$\dfrac{1}{9}$
2.2.	$(-1; -3), (1; -1)$	**2.4.**	$16\sqrt{3}$ см^2

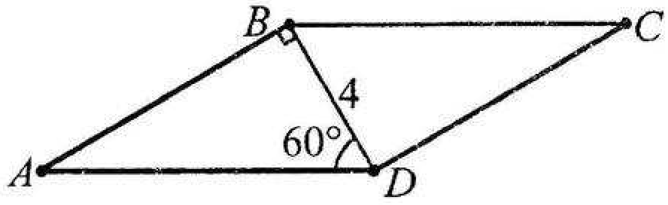
2.1. $\left(5\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{8} + 1\right) = 5\sqrt{16} + 5\sqrt{2} - \sqrt{8} - 1 = 20 + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 1 = 19 + 3\sqrt{2}$.

2.2. Такі точки мають координати $(a + 2; a)$. $a = (a+2)^2 + a + 2 - 3$; $a^2 + 4a + 3 = 0$;

$a_1 = -3$; $a_1 + 2 = -3 + 2 = -1$; $a_2 = -1$; $a_2 + 2 = -1 + 2 = 1$. Отже, шукані точки $(-1; -3)$, $(1; -1)$.

2.3. Добуток очок дорівнюватиме 12, якщо випадуть такі пари чисел: (2; 6); (3; 4); (4; 3); (6; 2). Різних пар матимемо усього $6 \cdot 6 = 36$. Тому шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

2.4. $BD \perp AB$, $\angle BDA = 60°$, $BD = 4$ см. У ΔABD $(\angle B = 90°)$: $\angle BAD = 90° - 60° = 30°$. Катет, який лежить проти кута $30°$, дорівнює половині гіпотенузи. От-



же, $AD = 2 \cdot 4 = 8$ (см). $S_{ABCD} = 2S_{ADB} =$

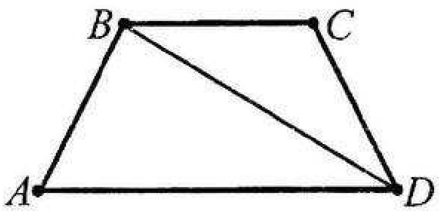
$= 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DB \cdot \sin\angle ADB = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sin 60° = 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ (см^2).

Частина 3

3.1. Нехай перший трактор може зорати поле за x год, орючи за 1 год $\frac{1}{x}$ частину поля. Тоді другий усе поле зоре за $(x+10)$ год, а за 1 год зоре $\frac{1}{x+10}$ частину поля. За умовою задачі, разом трактори зорють поле за 12 год. Рівняння: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$; $\frac{12(x+10)+12x-x(x+10)}{12x(x+10)} = 0$; $\frac{-x^2+14x+120}{x(x+10)} = 0$;

$x_1 = -6$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 20$ (год). Отже, перший трактор може зорати поле самостійно за 20 год, а другий — за $20 + 10 = 30$ (год).
Відповідь: 20 год і 30 год.

3.2. Квадратний тричлен $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0$ набуває лише додатних значень, коли його дискримінант від'ємний. Маємо:
$(2m+1)^2 - 4m^2 < 0; 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 < 0; 4m + 1 < 0; m < -0,25.$
Відповідь: $m \in (-\infty; -0,25)$.



3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \| BC$, $AB = CD$), BD — діагональ, ΔBCD і ΔADB — рівнобедрені. У рівнобедреному трикутнику BCD можливий лише випадок, що $BC = CD$, бо кут C — тупий.
У ΔADB $AD \neq AB$ і $AB \neq BD$, оскільки AD — більша основа трапеції, а $BC = AB$. Отже, $AD = BD$. У ΔCBD $\angle CBD = \angle CDB$. $\angle ADB = \angle CBD$ ($BC \| AD$, BD — січна), тому $\angle CDB = \angle ADB$. У рівнобедреному трикутнику ADB $\angle DAB = \angle ABD$. Оскільки трапеція рівнобічна, то $\angle BAD = \angle CDA = 2\angle ADB$.

Нехай $\angle BAD = x$, тоді $\angle ADB = \frac{x}{2}$. У ΔABD $\angle DAB + \angle ABD + \angle ADB = 180°$;

$x + x + \frac{x}{2} = 180°$; $\frac{5}{2}x = 180°$; $x = 72°$. Отже, $\angle BAD = \angle CDA = 72°$,
$\angle CBA = \angle BCD = 180° - 72° = 108°$.
Відповідь: 72°, 72°, 108°, 108°.

ВАРІАНТ №17

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2				X
1.3			X	
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6	X			
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10	X			
1.11			X	
1.12				X

1.1. Якщо $x = 3$, $y = 0,2$, то $0,5x + 10y = 0,5 \cdot 3 + 10 \cdot 0,2 = 1,5 + 2 = 3,5$.

1.5. $24m^3 : \dfrac{16m}{n^2} = \dfrac{24m^3}{1} \cdot \dfrac{n^2}{16m} = \dfrac{3m^2}{1} \cdot \dfrac{n^2}{2} = \dfrac{3}{2} m^2 n^2$.

1.6. $15\sqrt{3} - \sqrt{27} = 15\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

1.8. $1760 : 1,1 = 1600$ (грн).

1.10. $20 - 12 = 8$ (см); $c = 8 : \cos 60^\circ = 8 : \dfrac{1}{2} = 16$ (см).

1.11. Медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника є його висотою, тому: $S = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 12 \cdot 3 = 36$ (см^2).

1.12. Запишемо рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$. Далі отримаємо:
$\begin{cases} 3 = k \cdot (-5) + b, \\ -3 = k \cdot 1 + b; \end{cases}$ $\begin{cases} -5k + b = 3, \\ k + b = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} -6k = 6, \\ k + b = -3; \end{cases}$ $\begin{cases} k = -1, \\ b = -2. \end{cases}$ Отже, рівняння прямої має вигляд $y = -x - 2$ або $x + y + 2 = 0$.

Частина 2

2.1.	2
2.2.	$y = -\dfrac{8}{x}$

2.3.	180
2.4.	60 см

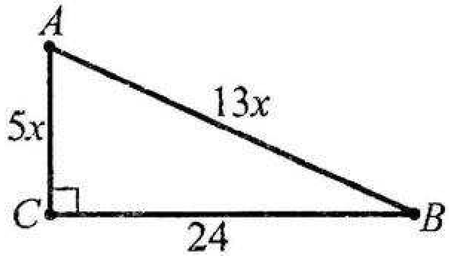
2.1. $\dfrac{2x^2 - 9x + 10}{2x^2 - 5x} = 0$; $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 10 = 0, \\ 2x^2 - 5x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2;\ x_2 = 2,5; \\ x \neq 0;\ x \neq 2,5; \end{cases}$ $x = 2$.

2.2. Формула обернено пропорційної функції має вигляд $y = \dfrac{a}{x}$.

$-2 = \dfrac{a}{4}$; $a = -8$. Отже, $y = -\dfrac{8}{x}$.

2.3. Нехай a_1 — перший член арифметичної прогресії. Отримаємо:
$a_{21} = a_1 + 20d$; $17 = a_1 + 20 \cdot 2$; $a_1 = -23$. $S_{30} = \dfrac{2 \cdot (-23) + 29 \cdot 2}{2} \cdot 30 = 180$.

2.4. $\frac{AC}{AB}=\frac{5}{13}$, $BC = 24$ см. Нехай $AC = 5x$, тоді $AB = 13x$. За теоремою Піфагора $(13x)^2 = (5x)^2 + 24^2$; $169x^2 = 25x^2 + 576$; $144x^2 = 576$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ — не підходить. Отже, $AC = 5x = 5 \cdot 2 = 10$ (см), $AB = 13x = 13 \cdot 2 = 26$ (см). $P = AC + AB + BC = 10 + 26 + 24 = 60$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай $\overline{ab}$ — шукане число, тоді $10a+b=4(a+b)$ і $10a+b=3ab$. Система: $\begin{cases}10a+b=4(a+b),\\10a+b=3ab;\end{cases}$ $\begin{cases}6a=3b,\\10a+b=3ab;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2a,\\10a+2a=3a\cdot 2a;\end{cases}$

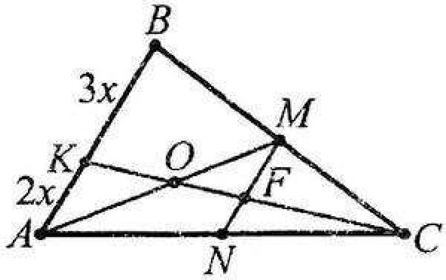
$\begin{cases}b=2a,\\6a^2-12a=0;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2a,\\a^2-2a=0;\end{cases}$ $a_1=0$ — не задовольняє умову задачі,

$a_2=2, b=2\cdot 2=4$.

Відповідь: 24.

3.2. Для трьох послідовних членів арифметичної прогресії a, b і c справедлива рівність: $b=\frac{a+c}{2}$, звідки $2b = a + c$. Тоді: $(a + 2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 = 8ab + 4b^2 - 4ab + a^2 = 8ab + (2b - a)^2 = 8ab + (a + c - a)^2 = 8ab + c^2$, що й потрібно було довести.

3.3. Нехай $AK = 2x$, тоді $KB = 3x$. Проведемо $MN \| AB$. $MF=\frac{3}{2}x$ (MF — середня лінія трикутника BKC). Аналогічно $FN=\frac{2x}{2}=x$; $CF=\frac{1}{2}CK$,



отже, $FC = KF$. $\Delta AKO \sim \Delta MFO$, тоді $\frac{AK}{MF}=\frac{KO}{OF}$; $\frac{2x}{1,5x}=\frac{KO}{OF}$; $\frac{KO}{OF}=\frac{4}{3}$. Якщо позначити $KO = 4y$, то $OF = 3y$, тоді $KF = 7y$, $FC = 7y$.

$OC = OF + FC = 3y + 7y = 10y$. $\frac{OC}{KO}=\frac{10y}{4y}=\frac{5}{2}$.

Відповідь: 5 : 2.

ВАРІАНТ №18

Частина 1

	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
1.1		X			**1.5**		X			**1.9**			X	
1.2			X		**1.6**				X	**1.10**		X		
1.3	X				**1.7**			X		**1.11**				X
1.4		X			**1.8**		X			**1.12**		X		

1.1. Нехай задумане число x. Рівняння: $2x + 12 = 46$; $2x = 34$; $x = 17$.

1.2. $1\frac{3}{4} : y = \frac{7}{8}$; $y = 1\frac{3}{4} : \frac{7}{8}$; $y = \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7}$; $y = 2$.

1.3. $75^2 - 25^2 = (75 - 25) \cdot (75 + 25) = 50 \cdot 100 = 5\,000$.

1.6. $\frac{4x^2 - x}{x^2 - 9} \cdot \frac{x+3}{4x-1} = \frac{x(4x-1)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{4x-1} = \frac{x}{x-3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{x}{x-3}$.

1.10. $AB : 20 = 12 : 48$; $AB = 12 : 48 \cdot 20 = 5$ (см).

1.11. Нехай сторона квадрата дорівнює x см. Рівняння: $x^2 + x^2 = (2 \cdot 5)^2$; $2x^2 = 100$; $x^2 = 50$; $x = \sqrt{50}$; $x = 5\sqrt{2}$ (см).

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{(-1-3; -3-(-2))} = \overrightarrow{(-4; -1)}; \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$.

1.12. Рівнобедрений трикутник з кутом 45° при основі є прямокутним, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині. Тоді: $c = 2 \cdot 8 = 16$ (см); $S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64$ (см^2).

Частина 2

2.1.	$\frac{b-3}{7}$		**2.3.**	(2,8; 0,1), (–1; 2)
2.2.	–37		**2.4.**	????

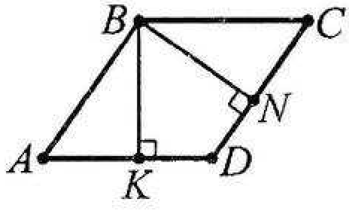
2.1. $\frac{ab + 2b - 3a - 6}{7a + 14} = \frac{b(a+2) - 3(a+2)}{7(a+2)} = \frac{(a+2)(b-3)}{7(a+2)} = \frac{b-3}{7}$.

2.2. За теоремою Вієта: $5x_1x_2 - x_1 - x_2 = 5x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 5 \cdot (-7) - 2 = -37$.

2.3. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x^2 - 3xy = 7. \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ (3-2y)^2 - 3y(3-2y) - 7 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ 9 - 12y + 4y^2 - 9y + 6y^2 - 7 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ 10y^2 - 21y + 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ y_1 = 0{,}1,\ y_2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2{,}8, \\ y_1 = 0{,}1. \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$ (2,8; 0,1), (–1; 2).

2.4. Нехай $ABCD$ — ромб, $\angle B$ — тупий, $BK \perp AD$, $BN \perp CD$. У чотирикутнику $BKDN$ $\angle K = \angle N = 90°$, тоді $\angle KBN + \angle D = 180°$. Оскільки $\angle D > 90°$, то $\angle KBN < 90°$ і $\angle KBN \neq 140°$. Отже, задача не має розв'язку.



3.1. Нехай перший оператор може набрати рукопис за x год. Тоді за 1 год він набирає $\frac{1}{x}$ частину рукопису. Другий оператор весь рукопис набере за $(x + 3)$ год, а за 1 год набиратиме $\frac{1}{x+3}$ частину рукопису. Оскільки за 1 годину роботи першого оператора та 2 години спільної роботи операторів було набрано половина рукопису, то отримуємо рівняння:

$\frac{1}{x}+2\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}; \frac{3}{x}+\frac{2}{x+3}=\frac{1}{2}; \frac{3\cdot 2(x+3)+2\cdot 2x-x(x+3)}{2x(x+3)}=0;$

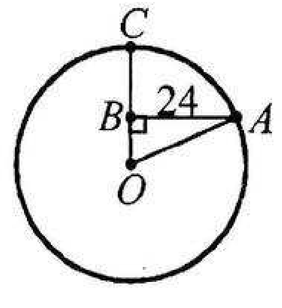
$\frac{-x^2+7x+18}{2x(x+3)}=0; \frac{x^2-7x-18}{2x(x+3)}=0; \ x_1=-2$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 9$ (год). Отже, перший оператор може набрати рукопис самостійно за 9 год, а другий за 9 + 3 = 12 (год).

Відповідь: 9 год і 12 год.

3.2. Порахуємо всі варіанти випадання монет (див. таблицю). Усіх рівноможливих подій випадання монет 8, а сприятливих, у яких два герби і одна цифра, — 3. Отже, ймовірність настання вказаної події дорівнює $\frac{3}{8}$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1 м	**Г**	**Ц**	**Г**	**Г**	**Ц**	**Ц**	**Г**	**Ц**
2 м	**Г**	**Г**	**Ц**	**Г**	**Ц**	**Г**	**Ц**	**Ц**
3 м	**Г**	**Г**	**Г**	**Ц**	**Г**	**Ц**	**Ц**	**Ц**

Відповідь: $\frac{3}{8}$.



3.3. Нехай $(O; R)$ — задане коло, $AB = 24$ см, $\frac{OB}{BC}=\frac{5}{8}$. Нехай $OB = 5x$ см, тоді $BC = 8x$ см. $R = OC = OB + BC = 5x + 8x = 13x$. З ΔABO ($\angle B = 90°$) за теоремою Піфагора маємо: $AO^2 = BO^2 + AB^2$; $(13x)^2 = (5x)^2 + 24^2$; $169x^2 = 25x^2 + 24^2$; $144x^2 = 576$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ — не підходить. Тоді $R = 13x = 13 \cdot 2 = 26$ (см). Довжина кола: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 26 = 52\pi$ (см).

Відповідь: 52π см.

ВАРІАНТ №19

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2		X		
1.3				X
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5	X			
1.6			X	
1.7	X			
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10			X	
1.11			X	
1.12			X	

1.2. У коробці всього 5 + 4 + 3 = 12 кульок, з них не червоних — 4 + 3 = 7 кульок. Тоді шукана ймовірність дорівнює $\frac{7}{12}$.

1.4. $(a+2)(a^2-2a+4)-8=a^3+8-8=a^3$.

1.5. $\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$.

1.6. $\frac{16\cdot 2^3}{2^2\cdot(-2)^4}=\frac{2^4\cdot 2^3}{2^2\cdot 2^4}=2$.

1.7. $20\cdot 0{,}15=3$ (кг).

1.10. Сторона квадрата дорівнює $6\cdot 2=12$ (см), тоді його діагональ дорівнює $12\sqrt{2}$ (см).

1.11. $x'=-2-2=-4$; $y'=3+1=4$. Отже, $A'(-4;\,4)$.

1.12. $\pi r^2=36\pi$; $r^2=36$; $r=6$ (см).

Частина 2

2.1.	$\frac{1}{m-3}$
2.2.	$x\in(1;\,2]$

2.3.	9
2.4.	115°

2.1. $\frac{1}{m-4}-\frac{m+4}{m^2-6m+9}:\frac{m^2-16}{m-3}=\frac{1}{m-4}-\frac{(m+4)(m-3)}{(m-3)^2(m-4)(m+4)}=$

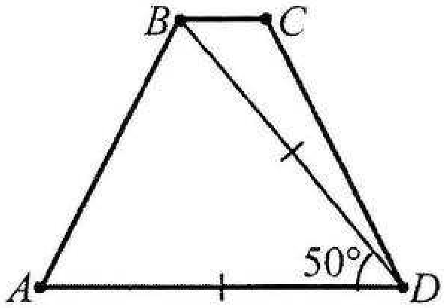
$=\frac{1}{m-4}-\frac{1}{(m-3)(m-4)}=\frac{m-3-1}{(m-3)(m-4)}=\frac{m-4}{(m-3)(m-4)}=\frac{1}{m-3}$.

2.2. $\begin{cases}(x-2)(x+1)-2x\ge(x-3)(x+3)+1,\\ \frac{x+2}{3}>\frac{5-x}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x-2x-2-2x\ge x^2-9+1,\\ 4(x+2)>3(5-x);\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-3x-2\ge x^2-8,\\ 4x+8>15-3x;\end{cases}$ $\begin{cases}-3x+6\ge 0,\\ 7x-7>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 2,\\ x>1.\end{cases}$ $x\in(1;\,2]$.

2.3. $y = 6x - x^2$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Координати її вершини: $x_{в.} = -\frac{6}{-2} = 3$; $y_{в.} = y(3) = 6 \cdot 3 - 3^2 = 9$. Найбільше значення функції дорівнює 9.

2.4. $BD = AD$, $\angle BDA = 50°$. Тоді $\angle CBD = 50°$, бо $BC \| AD$, BD — січна. З ΔABD $\angle BAD = \angle ABD = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$. $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 65° + 50° = 115°$.



Частина 3

3.1. Нехай перша бригада повинна виготовити — x деталей, тоді друга повинна виготовити $(250 - x)$ деталей. До обіду перша виготовила $0,6x$ деталей, а друга — $0,7(250 - x)$ деталей і перша при цьому виготовила на 6 деталей менше, тому: $0,6x + 6 = 0,7(250 - x)$; $1,3x = 169$; $x = 130$. Отже перша бригада повинна була виготовити 130 деталей, а друга $250 - 130 = 120$ деталей.
Відповідь: 130 деталей і 120 деталей.

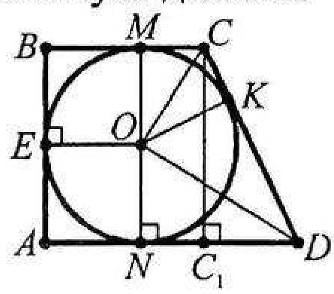
3.2. $\left(\frac{1,5x-4}{0,5x^2-x+2} - \frac{2x-14}{0,5x^3+4} + \frac{1}{x+2}\right) : \frac{4}{x+2} = \left(\frac{2(1,5x-4)}{2(0,5x^2-x+2)} - \frac{2(2x-14)}{2(0,5x^3+4)} + \frac{1}{x+2}\right) \cdot \frac{x+2}{4} =$

$= \left(\frac{3x-8}{x^2-2x+4} - \frac{4x-28}{x^3+8} + \frac{1}{x+2}\right) \cdot \frac{x+2}{4} = \frac{(x+2)(3x-8)-(4x-28)+x^2-2x+4}{(x+2)(x^2-2x+4)} \cdot \frac{x+2}{4} =$

$= \frac{3x^2-8x+6x-16-4x+28+x^2-2x+4}{4(x^2-2x+4)} = \frac{4x^2-8x+16}{4(x^2-2x+4)} = \frac{4(x^2-2x+4)}{4(x^2-2x+4)} = 1.$

Значення виразу не залежить від значень змінної, що й потрібно було довести.

3.3. Нехай $ABCD$ ($AD \| BC$, $AB \perp AD$) — задана прямокутна трапеція, у яку вписано коло (O; R); MN і CC_1 — висоти, $MN = CC_1 = 2R = 2 \cdot 6 = 12$ (см); E, M, K і N — точки дотику кола до сторін трапеції (див. рис.) $KD = ND = 8$ см як відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки.



Аналогічно $MC = CK$. $MC = NC_1 = CK$. З ΔCC_1D ($\angle C_1 = 90°$) за теоремою Піфагора: $CC_1^2 + C_1D^2 = CD^2$; $C_1D = ND - NC_1 = ND - MC = 8 - MC$; $CD = KD + CK = 8 + MC$. Отже, $12^2 + (8 - MC)^2 = (8 + MC)^2$; $144 + 64 - 16MC + MC^2 = 64 + 16MC + MC^2$; $32MC = 144$; $MC = 4,5$ (см). $BC = BM + 4,5 = R + 4,5 = 6 + 4,5 = 10,5$ (см).

$AD = AN + ND = 6 + 8 = 14$ (см). $S = \frac{10,5+14}{2} \cdot 12 = 147$ (см^2).

Відповідь: 147 см^2.

ВАРІАНТ №20

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2	X			
1.3				X
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5	X			
1.6			X	
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10	X			
1.11		X		
1.12			X	

1.8. $-1 \le \frac{1-x}{3} \le 4$; $-3 \le 1-x \le 12$; $-3-1 \le -x \le 12-1$; $-4 \le -x \le 11$;

$-11 \le x \le 4$; $x \in [-11;\ 4]$.

1.9. $\angle ABC = 2\angle OBC = 2 \cdot 30° = 60°$; $\angle BCA = 2\angle BCO = 2 \cdot 35° = 70°$;

$\angle A = 180° - 60° - 70° = 50°$.

1.11. $\vec{m}\vec{n} = 4 \cdot (-3) + (-3) \cdot 2 = -12 - 6 = -18$.

1.12. За теоремою синусів отримаємо:

$\frac{2}{\sin\angle A} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}$; $\sin\angle A = \frac{2\sin 60°}{2\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}/2\right)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$. Кут A менший від кута B, бо він лежить проти меншої сторони трикутника, тому $\angle A = 30°$; $\angle C = 180° - 30° - 60° = 90°$.

Частина 2

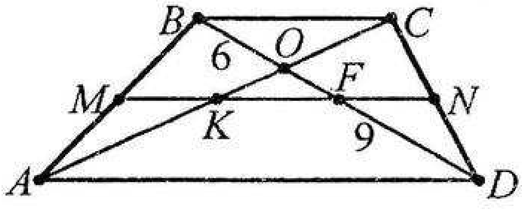
2.1.	$\frac{61}{100}$	**2.3.**	$x \in [-6;\ 1,5]$
2.2.	$\frac{\sqrt{17}-3}{4}$	**2.4.**	8 см

2.1. $\left(1\frac{3}{7}\right)^{-1} - \left(3\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{7}\right)^{-1} - \left(\frac{10}{3}\right)^{-2} = \frac{7}{10} - \frac{9}{100} = \frac{70-9}{100} = \frac{61}{100}$.

2.2. $\frac{2}{\sqrt{17}+3} = \frac{2\left(\sqrt{17}-3\right)}{\left(\sqrt{17}-3\right)\left(\sqrt{17}+3\right)} = \frac{2\left(\sqrt{17}-3\right)}{17-9} = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$.

2.3. $\sqrt{18-9x-2x^2}$. $18-9x-2x^2 \ge 0$; $2x^2+9x-18 \le 0$; $x_1 = -6$, $x_2 = 1,5$; $x \in [-6;\ 1,5]$.

2.4. MN — середня лінія трапеції $ABCD$.



$\angle CBD = \angle ADB$ ($AD \| BC$, BD — січна). Аналогічно $\angle BCA = \angle DAC$ ($AD \| BC$, AC — січна).

$\Delta AOD \sim \Delta COB$ (за двома кутами). Тому

$\frac{AD}{BC} = \frac{DO}{BO} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, тобто $AD = 1,5BC$:

$MN = \frac{AD+BC}{2}$, звідки $\frac{1,5BC+BC}{2} = 10$; $2,5BC = 20$; $BC = 8$ (см).

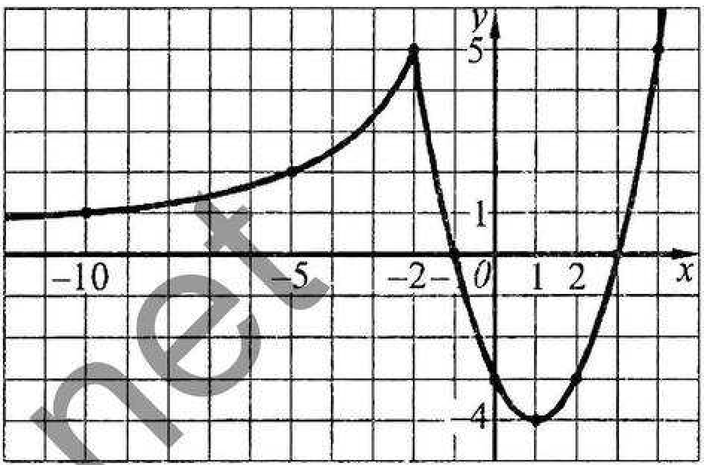
3.1. Нехай $\overline{ab}$ — шукане число, тоді $10a+b=3ab$ і $10a+b+18=10b+a$.

Система: $\begin{cases}10a+b=3ab,\\10a+b+18=10b+a;\end{cases}$ $\begin{cases}10a+b=3ab,\\9a=9b-18;\end{cases}$

$\begin{cases}10(b-2)+b=3(b-2)b,\\a=b-2;\end{cases}$ $\begin{cases}3b^2-17b+20=0,\\a=b-2;\end{cases}$ $b_1=\dfrac{5}{3}$ — не задовольняє умову задачі, $b_2=4, a_2=4-2=2$.

Відповідь: 24.

3.2. Перетворимо рівняння функції $y=x^2-2x-3$: $y=(x-1)^2-4$. Графік функції $y=\begin{cases}-\dfrac{10}{x}, \text{ якщо } x\le -2,\\(x-1)^2-4, \text{ якщо } x>-2\end{cases}$ складається з частини гіперболи $y=-\dfrac{10}{x}$ для $x\le -2$ та частини параболи $y=(x-1)^2-4$ для $x>-2$.



	$y=-\dfrac{10}{x}$			$y=(x-1)^2-4$			
x	–10	–5	–2	–1	0	1	3
y	1	2	5	0	–3	–4	0

Функція набуває найменшого значення у вершині параболи $x_в=1$; $y_в=-4$.

Відповідь: –4.

3.3. Нехай задано n-кутник, у якого $\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=120°$, $\angle A_4=\angle A_5=\ldots=\angle A_n=160°$. Сума кутів n-кутника: $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3+\angle A_4+\ldots+\angle A_n=180°(n-2)$, тобто $120°\cdot 3+160°\cdot(n-3)=180°(n-2)$; $360°+160°n-480°=180°n-360°$; $20°n=240°$; $n=12$. Отже, у заданого опуклого многокутника 12 сторін.

ВАРІАНТ №21

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2	X			
1.3		X		
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6				X
1.7		X		
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10				X
1.11				X
1.12			X	

1.1. $56 + 42 : 14 - 7 = 56 + 3 - 7 = 52.$

1.5. $\frac{7y^{\backslash y}}{x} - \frac{5x^{\backslash x}}{y} = \frac{7y^2 - 5x^2}{xy}.$

1.8. $S = \frac{a_1}{1-q}$. $a_1 = -6$; $q = 1 : (-6) = -\frac{1}{6}$. $S = \frac{-6}{1+\frac{1}{6}} = \frac{-36}{7} = -5\frac{1}{7}.$

1.11. Найбільшою стороною трикутника є сторона AB, бо вона лежить навпроти найбільшого кута $\angle C = 100°$.

1.12. Ненульові вектори будуть перпендикулярними лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнюватиме нулю: $\vec{c}\,(3; 9) \cdot \vec{d}\,(3; x) = 3 \cdot 3 + 9 \cdot x = 0$; $9 + 9x = 0$; $9x = -9$; $x = -1$.

Частина 2

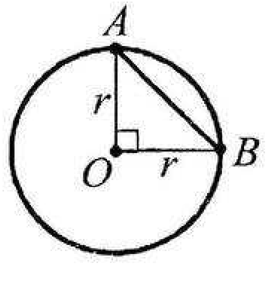
2.1.	17	**2.3.**	29 років
2.2.	(1; –1); (–5; 5)	**2.4.**	16π см

2.1. $\left(\sqrt{5} - 2\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{240} = 5 - 4\sqrt{15} + 12 + \sqrt{16 \cdot 15} = 17 - 4\sqrt{15} + 4\sqrt{15} = 17.$

2.2. $x^2 + 3x - 5 = -x$; $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -5$. $y_1 = y(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = -1$; $y_2 = y(-5) = (-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 5 = 5$. $(1; -1)$; $(-5; 5)$.

2.3. Нехай новому робітнику x років. Тоді вік шести членів бригади становить $5 \cdot 35 + x$ років, а їх середній вік $\frac{5 \cdot 35 + x}{6} = 34$; $x + 175 = 204$; $x = 29$. Отже, робітнику 29 років.

2.4. $r^2 + r^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2$; $2r^2 = 128$; $r^2 = 64$; $r = 8$ (см). $l = 2\pi r = 2\pi \cdot 8 = 16\pi$ (см).



3.1. Нехай власна швидкість катера становить x км/год. Тоді $(x+2)$ км/год — швидкість катера за течією річки, $(x-2)$ км/год — швидкість катера проти течії річки. За течією він плив $\frac{40}{x+2}$ год, а проти течії — $\frac{16}{x-2}$ год, затративши на весь шлях 3 год. Рівняння:

$$\frac{40}{x+2}+\frac{16}{x-2}=3;\ \frac{40x-80+16x+32-3\left(x^2-4\right)}{(x+2)(x-2)}=0;\ \frac{3x^2-56x+36}{(x+2)(x-2)}=0;$$

$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3},\ x_2=18, \\ x\neq -2,\ x\neq 2; \end{cases}$ $x=\frac{2}{3}$ — не задовольняє умову задачі, бо швидкість течії буде більшою, ніж швидкість катера. Власна швидкість катера становить 18 км/год.

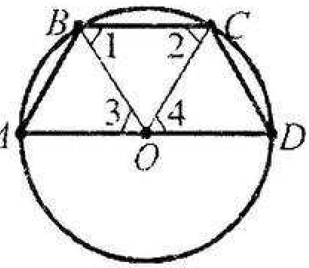
Відповідь: 18 км/год.

3.2. Оскільки $S_n=2n^2+n$, то $a_1=S_1=2\cdot1^2+1=3; a_1+a_2=S_2=2\cdot2^2+2=10;$ $a_2=S_2-a_1=10-3=7;$ $d=a_2-a_1=7-3=4.$

Відповідь: 3 і 4.

3.3. Нехай $ABCD$ — трапеція ($AD \| BC$), вписана у коло з центром O, AD — діаметр кола. За умовою, $BC=\frac{AD}{2}$. Нехай R — радіус описаного кола.

Тоді $OA=OB=OC=OD=BC=R.$ Отже, трикутник BCO рівносторонній і $\angle1=\angle2=60°.$ Оскільки $\angle1=\angle3=\angle2=\angle4=60°$, то трикутники AOB і OCD — рівносторонні. Тому $\angle A=\angle D=60°.$
Маємо: $\angle B=\angle C=60°+60°=120°.$



Відповідь: 60°, 120°, 60°, 120°.

ВАРІАНТ №22

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2			X	
1.3				X
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6	X			
1.7		X		
1.8	X			

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10	X			
1.11			X	
1.12				X

1.2. $\frac{1^{\backslash 7}}{3}+\frac{1^{\backslash 3}}{7}=\frac{7+3}{21}=\frac{10}{21}.$

1.3. $2a(b-3c)=2ab-2a\cdot 3c=2ab-6ac.$

1.5. $\frac{a^{15}}{2}:\frac{a^{5}}{8}=\frac{a^{15}}{2}\cdot\frac{8}{a^{5}}=\frac{a^{15}\cdot 8}{2\cdot a^{5}}=4a^{10}.$

1.6. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{15}=5-2\sqrt{15}+3+2\sqrt{15}=8.$

1.8. $24:300=0{,}08=8\%.$

1.9. $\angle POS=\angle POQ+\angle SOQ=\angle KOM+30^\circ=100^\circ+30^\circ=130^\circ.$

1.10. $x+3x=180^\circ$; $4x=180^\circ$; $x=45^\circ$; $3x=135^\circ.$

1.11. $a^2+b^2=c^2$; $a^2+4^2=5^2$; $a^2=9$; $a=3$ (дм); $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$ (дм^2).

Частина 2

2.1.	2
2.2.	(6; 3)

2.3.	610
2.4.	14 см

2.1. $\frac{x^4-x^2-12}{x+2}=0.$ $\begin{cases}x^4-x^2-12=0,\\x+2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x^2-4)(x^2+3)=0,\\x+2\neq 0;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-4=0,\\x+2\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x+2)=0,\\x+2\neq 0;\end{cases}$ $x-2=0$; $x=2.$

2.2. Нехай це точка з координатами $(2a;\ a)$. Отримаємо: $a=12-1{,}5\cdot 2a$; $a=12-3a$; $4a=12$; $a=3$. Координати точки: (6; 3).

2.3. Нехай a_1 — перший член арифметичної прогресії, а d — її різниця.

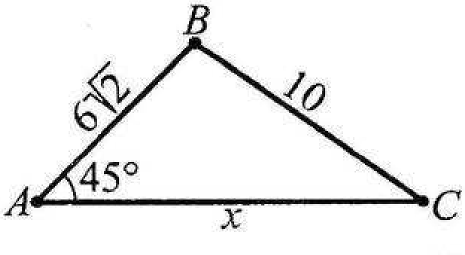
Отримаємо: $\begin{cases}a_5=a_1+4d,\\a_{10}=a_1+9d;\end{cases}$ $\begin{cases}a_1+4d=14,\\a_1+9d=29;\end{cases}$ $\begin{cases}5d=15,\\a_1+9d=29;\end{cases}$ $\begin{cases}d=3,\\a_1+27=29;\end{cases}$ $\begin{cases}d=3,\\a_1=2.\end{cases}$

$S_{20}=\frac{2\cdot 2+(20-1)\cdot 3}{2}\cdot 20=(4+57)\cdot 10=610.$

2.4. $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$;

$100=72+x^2-2\cdot 6\sqrt{2}x\cos 45^\circ$; $x^2-12x-28=0$;

$x_1=14$, $x_2=-2$ — не підходить. Отже, $AC=14$ см.



3.1. Нехай x км/год — швидкість другого автомобіля, тому він проїхав 450 км за $\frac{450}{x}$ год. Тоді швидкість першого автомобіля — $(x + 10)$ км/год, і він проїхав 450 км за $\frac{450}{x+10}$ год. Рівняння: $\frac{450}{x}-\frac{450}{x+10}=\frac{1}{2}$; $\frac{900(x+10)-900x-x(x+10)}{2x(x+10)}=0$;

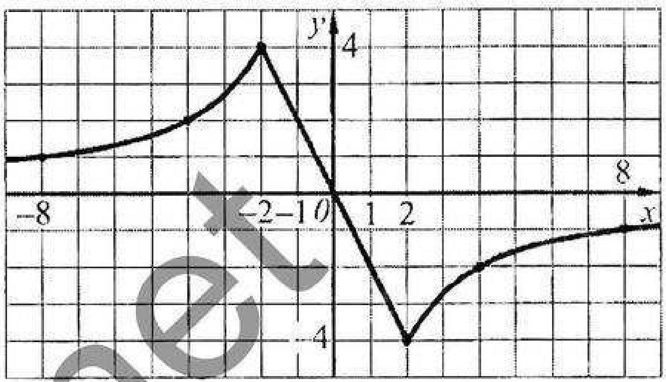
$\frac{x^2+10x-9000}{2x(x+10)}=0$; $\begin{cases} x^2+10x-9000=0, \\ x(x+10)\neq 0; \end{cases}$ $x_1=-100$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=90$. Отже, швидкість другого автомобіля 90 км/год, тоді швидкість першого — 90 + 10 = 100 (км/год).

Відповідь: 100 км/год; 90 км/год.

3.2. Графік функції

$$y=\begin{cases} -\frac{8}{x}, \text{якщо } x\leq -2, \\ -2x, \text{якщо } -2<x<2, \\ -\frac{8}{x}, \text{якщо } x\geq 2 \end{cases}$$

складається з

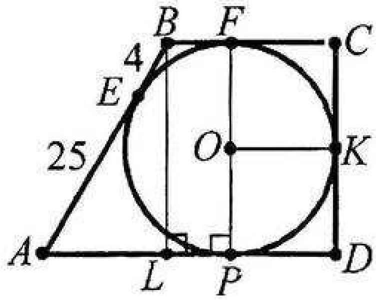


частин гіперболи $y=-\frac{8}{x}$ для $x\leq -2$ і $x\geq 2$ і частини прямої $y=-2x$ для $-2<x<2$.

	$y=-\frac{8}{x}$			$y=-2x$		$y=-\frac{8}{x}$		
x	–8	–4	–2	–1	1	2	4	8
y	1	2	4	2	–2	–4	–2	–1

Функція зростає на проміжках $(-\infty; -2]$ і $[2; +\infty)$. Найбільше значення функції 4.

3.3. Нехай $ABCD$ ($AD\|BC$) — задана прямокутна трапеція ($CD\perp AD$), BL — висота трапеції, O — центр вписаного кола, E, F, K і P — точки дотику кола до відповідних сторін трапеції. $AE = 25$ см, $EB = 4$ см. У чотирикутнику $OPDK$ $\angle P = \angle D = \angle K = 90°$. Отже, $OKDP$ — прямокутник. Крім того, $OP = OK$ як радіуси вписаного кола, тому $OKDP$ — квадрат. Аналогічно чотирикутник $OFCK$ теж квадрат. Нехай $PD = OP = OF = CF = x$ см. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, $AE = AP = 25$ см, $BF = BE = 4$ см. Розглянемо прямокутний трикутник ALB ($\angle L = 90°$). $AL = AP - LP = 25 - 4 = 21$ (см).



$AB = AE + EB = 25 + 4 = 29$ (см). $BL=\sqrt{AB^2-AL^2}=\sqrt{29^2-21^2}=20$ (см).
Оскільки $BL = FP = 2OP = 2x$, то $2x = 20$; $x = 10$ (см).
Тоді $BC = CF + BF = 10 + 4 = 14$ (см), $AD = AP + PD = 25 + 10 = 35$ (см).

Отже, $S=\frac{BC+AD}{2}\cdot BL=\frac{14+35}{2}\cdot 20=490$ (см^2).

ВАРІАНТ №23

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1	Х			
1.2			Х	
1.3				Х
1.4		Х		

	А	Б	В	Г
1.5	Х			
1.6			Х	
1.7				Х
1.8		Х		

	А	Б	В	Г
1.9			Х	
1.10				Х
1.11	Х			
1.12		Х		

1.2. $2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{5}=\frac{5\cdot 7}{2\cdot 5}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}.$

1.4. $-2x(2y-3x)-4x(2x-y)=-4xy+6x^2-8x^2+4xy=-2x^2.$

1.6. $\left(-\frac{2x^3}{3y^2}\right)^3=-\frac{2^3\cdot\left(x^3\right)^3}{3^3\cdot\left(y^2\right)^3}=-\frac{8x^9}{27y^6}.$

1.11. $c=2\pi r$; $6\pi=2\pi r$; $r=3$ (см).

1.12. Сторона ромба: $a=16\sqrt{2}:4=4\sqrt{2}$ (см).

Площа ромба: $S=\left(4\sqrt{2}\right)^2\sin 135°=32\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$ (см^2).

Частина 2

2.1.	$-\frac{(a-2)(a-3)}{3(a+3)}$
2.2.	$2x^2-9x-5=0$

2.3.	(3; 2)
2.4.	10 см

2.1. $\frac{a^2-4a+4}{a^2+6a+9}\cdot\frac{2a^2-18}{12-6a}=\frac{(a-2)^2}{(a+3)^2}\cdot\frac{2(a-3)(a+3)}{-6(a-2)}=-\frac{(a-2)(a-3)}{3(a+3)}.$

2.2. $a(x-x_1)(x-x_2)=0$; $a\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-5)=0.$ При $a=2$ отримаємо:

$(2x+1)(x-5)=0$; $2x^2-9x-5=0.$

2.3. ОДЗ: $x\neq 0$; $y\neq 0$. $\begin{cases}x-y=1,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}\Big|\cdot 6xy;\end{cases}$ $\begin{cases}x=y+1,\\ 6y+6x=5xy;\end{cases}$ $\begin{cases}x=y+1,\\ 6y+6(y+1)=5(y+1)y;\end{cases}$

$\begin{cases}x=y+1,\\ 6y+6y+6=5y^2+5y;\end{cases}$ $\begin{cases}x=y+1,\\ 5y^2-7y-6=0;\end{cases}$ 1) $\begin{cases}x=y+1,\\ y_1=-\frac{3}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=-\frac{3}{5}+1,\\ y_1=-\frac{3}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=\frac{2}{5},\\ y_1=-\frac{3}{5};\end{cases}$

$\left(\frac{2}{5};-\frac{3}{5}\right)$; 2) $\begin{cases}x=y+1,\\ y_2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=2+1,\\ y_2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=2;\end{cases}$ (3; 2).

2.4. $x = CB \cdot \text{tg}B = CB \cdot \frac{5}{12}$; $CB = \frac{12x}{5}$. $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$; $26 = \sqrt{x^2 + \left(\frac{12x}{5}\right)^2}$;

$26 = \sqrt{\frac{169x^2}{25}}$; $\frac{13x}{5} = 26$; $AC = x = 10$ (см).

Частина 3

Нехай швидкість автомобіля до зупинки на ділянці 1200 : 3 = 400 (км) була x км/год. Якби він не збільшив швидкість, то решту 1200 – 400 = 800 (км) він проїхав би за $\frac{800}{x}$ год. Після зупинки швидкість стала $(x + 20)$ км/год і час руху — $\frac{800}{x+20}$ год. Оскільки на зупинку автомобіль витратив 2 год, то:

$\frac{800}{x} - \frac{800}{x+20} = 2$; $\frac{800(x+20) - 800x - 2x(x+20)}{x(x+20)} = 0$; $\frac{-2x^2 - 40x + 16000}{x(x+20)} = 0$;

$\frac{x^2 + 20x - 8000}{x(x+20)} = 0$; $x_1 = -100$ — не задовольняє умову задачі;

$x_2 = 80$ (км/год).

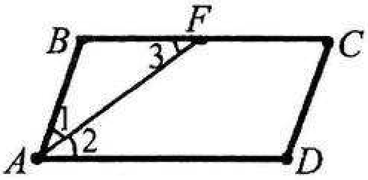
Відповідь: 80 км/год.

3.2. $\left(\frac{3-a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{2}{1-a}\right)\left(\frac{a^2 - 3a}{a^3 + 3a^2 + 3a + 1} + \frac{1}{a^2 + 2a + 1}\right) =$

$= \left(\frac{3-a}{(a-1)^2} + \frac{2}{a-1}\right)\left(\frac{a^2 - 3a}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^2}\right) = \frac{3 - a + 2a - 2}{(a-1)^2} \cdot \frac{a^2 - 3a + a + 1}{(a+1)^3} =$

$= \frac{(a+1)(a-1)^2}{(a-1)^2(a+1)^3} = \frac{1}{(a+1)^2}$ — вираз набуває додатних значень при всіх допустимих значеннях a.

3.3. Нехай $ABCD$ — заданий паралелограм, F — точка перетину бісектриси зі стороною BC. $BF : FC = 3 : 4$. $\angle 3 = \angle 2$ ($BC \parallel AD$ і AF — січна) і $\angle 1 = \angle 2$ (AF — бісектриса), отже, $\angle 1 = \angle 3$ і тому трикутник ABF — рівнобедрений, $AB = BF$. Нехай $BF = 3x$ см, тоді $FC = 4x$ см, $AB = 3x$ см. Рівняння: $2(3x + 3x + 4x) = 80$; $10x = 40$; $x = 4$. Отже, $AB = 3 \cdot 4 = 12$ (см), $BC = BF + FC = 3x + 4x = 7x = 7 \cdot 4 = 28$ (см).



Відповідь: 12 см, 28 см, 12 см, 28 см.

ВАРІАНТ №24

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2			X	
1.3	X			
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6			X	
1.7		X		
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10				X
1.11			X	
1.12				X

1.1. $5-3\frac{2}{9}=4\frac{9}{9}-3\frac{2}{9}=1\frac{7}{9}$.

1.3. $y(3)=-2\cdot 3+8=-6+8=2$.

1.6. $3^0+3^{-4}\cdot(3^{-2})^{-3}-(0{,}5)^{-2}=1+3^{-4}\cdot 3^6-2^2=1+3^2-2^2=1+9-4=6$.

1.7. $15:250=0{,}06=6\%$.

1.8. $(2x+4)(x-3)\le 0$; $2(x+2)(x-3)\le 0$; $x\in[-2;3]$.

1.9. $(58-18):2=40:2=20$ (см).

1.12. $360°:60°=6$ (кутів) — у многокутника 6 сторін.

Частина 2

2.1.	$-\frac{4}{b}$
2.2.	1; 2

2.3.	$(-\infty; 2]$
2.4.	45°

2.1. $\left(\frac{a+5b}{a^2-5ab}-\frac{a-5b}{a^2+5ab}\right)\cdot\frac{25b^2-a^2}{5b^2}=\left(\frac{a+5b}{a(a-5b)}-\frac{a-5b}{a(a+5b)}\right)\cdot\frac{25b^2-a^2}{5b^2}=$

$=\frac{(a+5b)^2-(a-5b)^2}{a(a-5b)(a+5b)}\cdot\frac{25b^2-a^2}{5b^2}=-\frac{(a+5b-a+5b)(a+5b+a-5b)}{a(a^2-25b^2)}\cdot\frac{a^2-25b^2}{5b^2}=$

$=-\frac{10b\cdot 2a}{5ab^2}=-\frac{4}{b}$.

2.2. $3-\frac{1-x}{2}\ge\frac{2x-7}{6}+\frac{7x-2}{3}\,\Big|\cdot 6$; $18-3(1-x)\ge 2x-7+2(7x-2)$;

$18-3+3x\ge 2x-7+14x-4$; $-13x\ge -26$; $x\le 2$. Натуральними розв'язками нерівності є числа: 1; 2.

2.3. $y=-2x^2+4x$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз.

Координати її вершини: $x=-\frac{4}{2\cdot(-2)}=1$; $y=y(1)=-2\cdot 1^2+4\cdot 1=2$. Областю

значень функції є проміжок $(-\infty; 2]$.

2.4. $\cos\alpha=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{-3\cdot(-2)+0\cdot 2}{\sqrt{9+0}\cdot\sqrt{4+4}}=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\alpha=45°$.

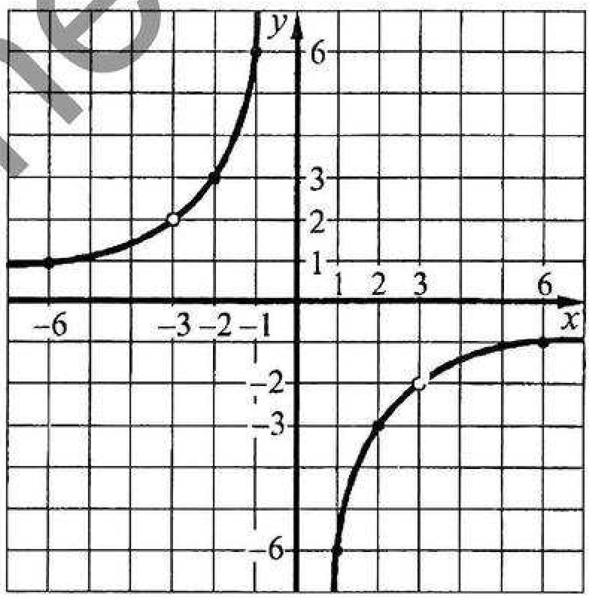
Нехай чисельник дробу x, тоді знаменник $x + 3$. Після зміни дріб стане таким: $\frac{x+2}{(x+3)+10}$. Рівняння: $\frac{x}{x+3}-\frac{x+2}{x+13}=\frac{2}{15}$; $\frac{x(x+13)-(x+2)(x+3)}{(x+3)(x+13)}=\frac{2}{15}$;

$\frac{8x-6}{(x+3)(x+13)}=\frac{2}{15}$; $\frac{4x-3}{(x+3)(x+13)}=\frac{1}{15}$; $\begin{cases}15(4x-3)=(x+3)(x+13),\\ x\neq-13,\ x\neq-3;\end{cases}$

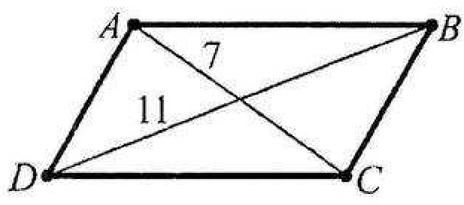
$\begin{cases}x^2-44x+84=0,\\ x\neq-13,\ x\neq-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=2,\ x_2=42,\\ x\neq-13,\ x\neq-3.\end{cases}$

Отримаємо дроби $\frac{2}{5}$ або $\frac{42}{45}$. Оскільки дріб $\frac{42}{45}$ — скоротний, то шуканий дріб дорівнює $\frac{2}{5}$.

Відповідь: $\frac{2}{5}$.



3.2. $y=\frac{6x^2-54}{9x-x^3}$. Областю визначення функції є всі дійсні числа, крім чисел –3, 0 і 3. Виконаємо перетворення:
$\frac{6x^2-54}{9x-x^3}=\frac{6(x^2-9)}{-x(x^2-9)}=-\frac{6}{x}$. Графіком функції $y=-\frac{6}{x},(x\neq-3;x\neq3)$ є гіпербола без точок (–3; 2), (3;–2).



3.3. Нехай $ABCD$ — заданий паралелограм, $AC = 7$ см, $BD = 11$ см. $AB = DC$, $AD = BC$. Якщо периметр дорівнює 26 см, то сума двох суміжних сторін — 26 : 2 = 13 (см). За властивістю паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$. Нехай $AB = x$ см, тоді $AD = (13 - x)$ см. Тоді: $7^2 + 11^2 = 2(x^2 + (13 - x)^2)$; $x^2 + 169 - 26x + x^2 = 85$; $x^2 - 13x + 42 = 0$; $x_1 = 7$ (см), $x_2 = 6$ (см). Отже, якщо $AB = 7$ см, то $AD = 13 - 7 = 6$ (см); якщо $AB = 6$ см, то $AD = 13 - 6 = 7$ (см).
Відповідь: 6 см, 7 см, 6 см, 7 см.

ВАРІАНТ №25

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3			X	
1.4		X		
1.5			X	
1.6				X
1.7		X		
1.8			X	
1.9	X			
1.10		X		
1.11				X
1.12		X		

1.4. $2x - 0,5 = 2,5 - 1,5x$; $2x + 1,5x = 2,5 + 0,5$; $3,5x = 3$; $x = \dfrac{3}{3,5}$; $x = \dfrac{6}{7}$.

1.5. $x^2 - 16 = 0$; $(x - 4)(x + 4) = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 4$.

1.6. $\dfrac{3}{a+1} - \dfrac{3a-1}{a^2+a} = \dfrac{3^{\backslash a}}{a+1} - \dfrac{3a-1}{a(a+1)} = \dfrac{3a-3a+1}{a(a+1)} = \dfrac{1}{a(a+1)}$.

1.7. $d = 3 - 8 = -5$.

1.8. $\begin{cases} 5+x \le 2, \\ x-6 < 2x; \end{cases} \begin{cases} x \le 2-5, \\ x-2x < 6; \end{cases} \begin{cases} x \le -3, \\ -x < 6; \end{cases} \begin{cases} x \le -3, \\ x > -6; \end{cases} x \in (-6; -3]$

1.10. Нехай d — довжина хорди. Отримаємо: $\dfrac{d}{2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ (см);

$d = 2 \cdot 9 = 18$ (см).

1.12. $\angle M = 180° - 80° - 40° = 60°$. За наслідком з теореми синусів отримаємо:

$$\frac{KN}{\sin\angle M} = 2R; R = \frac{KN}{2\sin\angle M} = \frac{6}{2\sin 60°} = \frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Частина 2

2.1.	$3,41 \cdot 10^{-2}$
2.2.	$\dfrac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}$

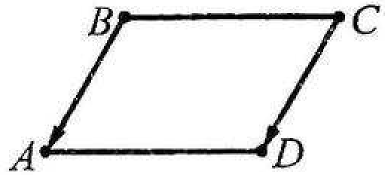
2.3.	$-2; -1; 0; 1$
2.4.	$(0; 2)$

2.1. $3,2 \cdot 10^{-2} + 2,1 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} \cdot (3,2 + 0,21) = 3,41 \cdot 10^{-2}$.

2.2. $\dfrac{x - 6\sqrt{x}\sqrt{y} + 9y}{x - 9y} = \dfrac{\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)} = \dfrac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}$.

2.3. $2x^2 + x - 6 \le 0$; $(2x - 3)(x + 2) \le 0$; $x \in [-2; 1,5]$. Проміжку $[-2; 1,5]$ належать такі цілі числа: $-2; -1; 0; 1$.

2.4. $D(x; y)$. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{(x+6; y-10)} = \overrightarrow{(6; -8)}$;



$\begin{cases} x+6=6, \\ y-10=-8; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$ $D(0; 2)$.

Частина 3

3.1. Нехай 3%-го розчину треба взяти x г, тоді солі в ньому — $0{,}03x$ г. 8%-го розчину потрібно взяти $(260 - x)$ г, а солі в ньому буде $0{,}08(260 - x)$ г. Рівняння: $0{,}03x + 0{,}08(260 - x) = 0{,}05 \cdot 260$; $0{,}03x + 20{,}8 - 0{,}08x = 13$; $0{,}05x = 7{,}8$; $x = 156$. Отже, 3%-го розчину потрібно взяти 156 г, а 8%-го — $260 - 156 = 104$ (г).

Відповідь: 156 г 3%-го розчину, 104 г 8%-го розчину.

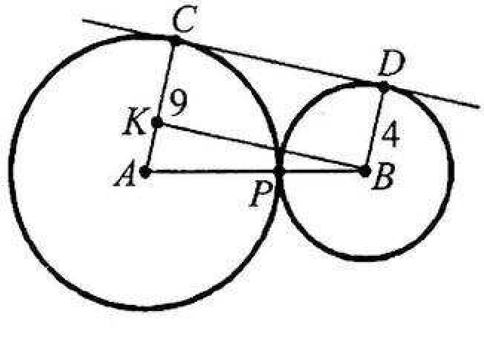
3.2. $\dfrac{1}{x^2-2x-3} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{12}{x^3+x^2-9x-9}$; $\dfrac{1}{(x-3)(x+1)} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{12}{x(x^2-9)+x^2-9}$;

$\dfrac{1}{(x-3)(x+1)} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{12}{(x+1)(x-3)(x+3)}$; $\dfrac{(x+3)+(x-3)(x+1)-12}{(x+1)(x-3)(x+3)} = 0$;

$\dfrac{x+3+x^2+x-3x-3-12}{(x+1)(x-3)(x+3)} = 0$; $\dfrac{x^2-x-12}{(x+1)(x-3)(x+3)} = 0$; $\begin{cases} x^2-x-12=0, \\ x \neq -3, x \neq -1, x \neq 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=-3, x_2=4, \\ x \neq -3, x \neq -1, x \neq 3. \end{cases}$ Звідки $x = 4$.

3.3. $AC \perp CD$, $BD \perp CD$. Проведемо $KB \perp AC$.



$KA = CA - CK = 9 - 4 = 5$ (см).
$AB = AP + PB = 9 + 4 = 13$ (см).
Із прямокутного трикутника BKA ($\angle K = 90°$):
$KB = \sqrt{AB^2 - KA^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). $KCDB$ — прямокутник, тому $KB = CD$. Отже, $CD = 12$ см.
Відповідь: 12 см.

ВАРІАНТ №26

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2		X		
1.3			X	
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6	X			
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10		X		
1.11	X			
1.12		X		

1.5. $\frac{3a^{\backslash a}}{b}+\frac{5b^{\backslash b}}{a}=\frac{3a^2+5b^2}{ab}$.

1.6. $3x^2-5x+2=0$. $D=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot3\cdot2=25-24=1>0$ — отже, рівняння має 2 корені.

1.7. Якщо $2<x<7$, то: $2+3<x+3<7+3$; $5<x+3<10$.

1.8. $a_n=a_1+d(n-1)$; $29=5+3(n-1)$; $29=5+3n-3$; $3n=27$; $n=9$.

1.9. Нехай $\angle AOM=x$, тоді $\angle MOB=x+18°$. Рівняння: $x+x+18°=56°$; $2x=38°$; $x=19°$; $x+18°=37°$.

1.11. За наслідком з теореми синусів отримаємо:

$$\frac{AB}{\sin\angle C}=2R; R=\frac{AB}{2\sin\angle C}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sin45°}=\frac{3\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\text{ (см)}.$$

1.12. $\overrightarrow{AB}=\overline{(3-3;-4-(-1))}=\overline{(0;-3)}$; $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$.

Частина 2

2.1.	$12\sqrt{6}+24$
2.2.	$y=4x^2+2$

2.3.	$\frac{1}{9}$
2.4.	78 см^2

2.1. $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2-\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=$

$=\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)=\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\cdot4\sqrt{3}=12\sqrt{6}+24.$

2.2. Квадратичну функцію можна задати рівнянням $y=ax^2+bx+c$. Абсциса вершини параболи дорівнює 0, тому: $\frac{-b}{2a}=0$; $b=0$. Рівняння набере вигляду:

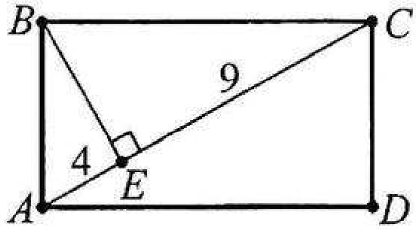
$y = ax^2 + c$. Отримаємо: $\begin{cases} 2 = c, \\ 6 = a + c; \end{cases}$ $\begin{cases} c = 2, \\ a + 2 = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} c = 2, \\ a = 4. \end{cases}$ Рівняння квадратичної функції: $y = 4x^2 + 2$.

2.3. Сума очок дорівнюватиме 9, якщо випадуть такі пари чисел: (3, 6); (6, 3); (4, 5); (5, 4). Їх всього 4 з 36 пар чисел, що можуть випасти. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2.4. $AC = 4 + 9 = 13$ (см). $BE^2 = AE \cdot EC$;

$BE = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ (см).

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 78$ (см^2).



Частина 3

3.1. Нехай швидкість велосипедиста x км/год, тоді час його руху — $\frac{60}{x}$ год.

Швидкість мотоцикліста $(x + 45)$ км/год, а час його руху — $\frac{60}{x+45}$ год.

Оскільки мотоцикліст їхав на 3 год менше, то:

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+45} = 3$; $\frac{60(x+45) - 60x}{x(x+45)} = 3$; $\frac{2700}{x(x+45)} = 3$; $3x(x+45) = 2700$;

$x^2 + 45x - 900 = 0$; $x_1 = 15$; $x_2 = -60$ — не задовольняє умову задачі.

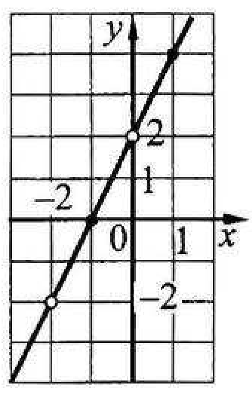
Відповідь: 15 км/год.

3.2. $y = \frac{x^2+6x+8}{x+2} - \frac{2x-x^2}{x}$. Якщо $x \neq 0$; $x \neq -2$, то:

$$\frac{x^2+6x+8}{x+2} - \frac{2x-x^2}{x} = \frac{(x+2)(x+4)}{x+2} - \frac{x(2-x)}{x} = x + 4 - (2 - x) = 2x + 2.$$

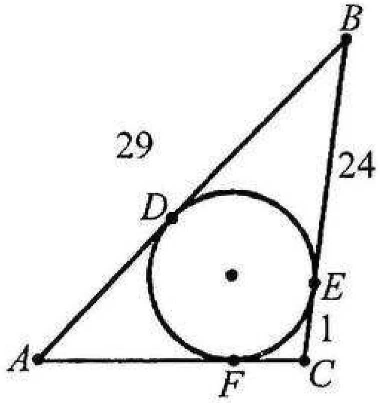
$y = 2x + 2$		
x	-1	1
y	0	4

Графіком функції є пряма без двох точок.



3.3. Нехай трикутник ABC — заданий, $AB = 29$ см, D, E і F — точки дотику вписаного в трикутник кола до його відповідних сторін, $BE = 24$ см, $CE = 1$ см. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, маємо:
$BD = BE = 24$ см, звідки $AD = 29 - 24 = 5$ (см),
$AF = AD = 5$ см, $CF = CE = 1$ см і

$AC = AF + FC = 5 + 1 = 6$ (см). $p = \dfrac{29 + 25 + 6}{2} = 30$ (см).



За формулою Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{30 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 24} = 60$ (см^2).

Відповідь: 60 см^2.

ВАРІАНТ №27

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3	X			
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6	X			
1.7			X	
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9	X			
1.10		X		
1.11			X	
1.12				X

1.2. $13-2\dfrac{4}{7}=12\dfrac{7}{7}-2\dfrac{4}{7}=10\dfrac{3}{7}$.

1.4. $\dfrac{x-3}{5}=0$; $x-3=0$; $x=3$.

1.5. $\dfrac{15x^9}{4y}:9x^3=\dfrac{15x^9}{4y}\cdot\dfrac{1}{9x^3}=\dfrac{15x^9\cdot 1}{4y\cdot 9x^3}=\dfrac{5x^6}{12y}$.

1.6. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

1.10. 16 дм – 4 дм = 12 дм.

1.11. $S=10\cdot 15\cdot\sin 150°=150\cdot\dfrac{1}{2}=75$ (см^2).

1.12. $\sqrt{(-2-1)^2+(y-2)^2}=5$; $9+(y-2)^2=25$; $(y-2)^2=16$; $y-2=\pm 4$; $y=-2$ або $y=6$.

Частина 2

2.1.	3
2.2.	[0; 1)

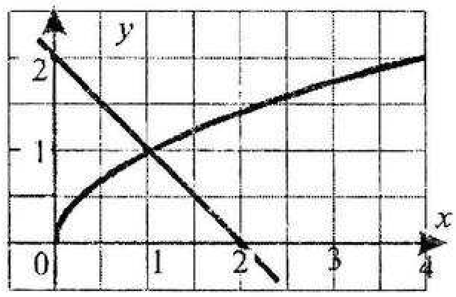
2.3.	$\pm\dfrac{1}{3}$
2.4.	30 см

2.1. $\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{4}{x+5}=\dfrac{x^2+15}{x^2-25}\,\Big|\cdot(x-5)(x+5)$. Якщо $x\neq\pm 5$, то:
$2(x+5)-4(x-5)=x^2+15$; $2x+10-4x+20=x^2+15$; $x^2+2x-15=0$;
$x_1=-5$ — не підходить, $x_2=3$.

2.2. Будуємо графіки кореня квадратного і лінійної функцій по точках:

	$y=\sqrt{x}$		
x	0	1	4
y	0	1	2

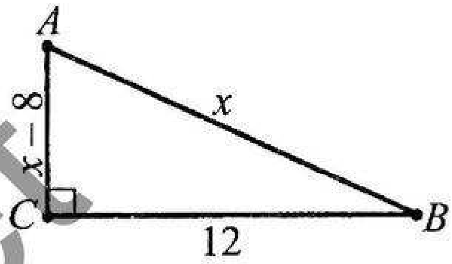
$y=2-x$	
0	2
2	0



Значення функції $y=\sqrt{x}$ менші за значення функції $y=2-x$ на проміжку $[0;\ 1)$.

2.3. Нехай q — знаменник геометричної прогресії. Отримаємо: $b_4=36$, $b_6=4$, $q^2=\frac{b_6}{b_4}=\frac{4}{36}; q=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$.

2.4. $x^2=(x-8)^2+12^2$; $x^2=x^2-16x+64+144$; $16x=208$; $x=13$. $AB=13$ см, $AC=13-8=$ $=5$ (см). $P=12+5+13=30$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай x км/год — швидкість першого автомобіля, тому він проїхав 560 км за $\frac{560}{x}$ год. Тоді швидкість другого автомобіля — $(x-10)$ км/год, і він проїхав 560 км за $\frac{560}{x-10}$ год.

Рівняння: $\frac{560}{x-10}-\frac{560}{x}=1$; $\frac{560x-560(x-10)-x(x-10)}{x(x-10)}=0$;

$\frac{x^2-10x-5600}{x(x-10)}=0$; $\begin{cases}x^2-10x-5600=0,\\ x(x-10)\neq 0;\end{cases}$ $x_1=-70$ не задовольняє умову задачі, $x_2=80$ (км/год). Отже, швидкість першого автомобіля 80 км/год, а швидкість другого — $80-10=70$ (км/год).

Відповідь: 80 км/год, 70 км/год.

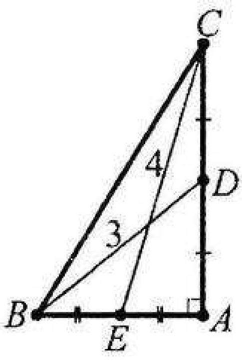
3.2. $y=\frac{1}{\sqrt{5x+9-4x^2}}+\sqrt{x-1}$. Область допустимих значень функції знайдемо із системи

$\begin{cases}5x+9-4x^2>0,\\ x-1\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}4x^2-5x-9<0,\\ x\geq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+1)(x-2,25)<0,\\ x\geq 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(-1;\ 2,25),\\ x\in[1;+\infty).\end{cases}$

Отже, $x \in [1; 2,25)$.

Відповідь: $[1; 2,25)$.

3.3. Нехай BAC — заданий прямокутний трикутник ($\angle A = 90°$), у якому проведено медіани $BD = 3$ см, $CE = 4$ см, $AE = BE$, $AD = DC$. Нехай $AE = x$ см, $AD = y$ см, тоді $AB = 2x$, $AC = 2y$. Із прямокутного ΔBAD ($\angle A = 90°$), за теоремою Піфагора, $AB^2 + AD^2 = BD^2$; $(2x)^2 + y^2 = 3^2$; із прямокутного ΔEAC ($\angle A = 90°$), за теоремою Піфагора, $AE^2 + AC^2 = EC^2$;



$x^2 + (2y)^2 = 4^2$. Отже, $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 9; \\ x^2 + 4y^2 = 16; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2 + 5y^2 = 25; \\ x^2 + 4y^2 = 16; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5; \\ x^2 + 4y^2 = 16. \end{cases}$ Із прямокутного ΔBAC ($\angle A = 90°$):

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{4(x^2 + y^2)} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \text{ (см).}$$

Відповідь: $2\sqrt{5}$ см.

ВАРІАНТ №28

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2		X		
1.3				X
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6		X		
1.7		X		
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10			X	
1.11	X			
1.12		X		

1.1. $2x - 17 = 53$; $2x = 53 + 17$; $2x = 70$; $x = 35$.

1.2. $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2\cdot 3}{9\cdot 4} = \frac{1\cdot 1}{3\cdot 2} = \frac{1}{6}$.

1.4. $(0{,}2ab^3)^2 \cdot 5a^2b = 0{,}04a^2b^6 \cdot 5a^2b = 0{,}2a^4b^7$.

1.6. $\left(-\frac{3a^5}{4b^3}\right)^2 = \frac{9a^{10}}{16b^6}$.

1.8. $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$; $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 1, \\ x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ x \neq 1; \end{cases} x = -1$.

1.10. $360° : 6 = 60°$ — градусна міра дуги; $60° : 2 = 30°$ — міра вписаного кута.

1.11. $a = 2\cdot r : \mathrm{tg}30° = 4\sqrt{3} : \frac{1}{\sqrt{3}} = 12$ (см).

1.12. $h = \sqrt{10^2 - (12:2)^2} = \sqrt{64} = 8$ (см). $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8 = 48$ (см^2).

Частина 2

2.1.	4,25
2.2.	–10

2.3.	(–2; 0); (0; 2)
2.4.	70°

2.1. $\frac{a^2+2a+4}{3a-4} : \frac{a^3-8}{9a^2-16} = \frac{a^2+2a+4}{3a-4}\cdot\frac{(3a-4)(3a+4)}{(a-2)(a^2+2a+4)} = \frac{3a+4}{a-2}$.

Якщо $a = 10$, то $\frac{3a+4}{a-2} = \frac{3\cdot 10+4}{10-2} = \frac{34}{8} = 4{,}25$.

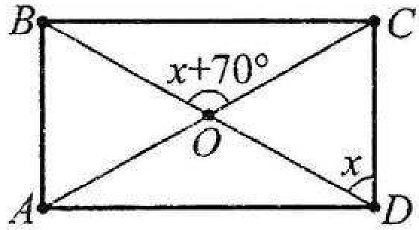
2.2. Оскільки $x_1 + x_2 = 3$, то маємо систему рівнянь:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 12; \end{cases} \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 = 15; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -2. \end{cases}$ Звідки $q = x_1x_2 = 5\cdot(-2) = -10$.

2.3. $\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} x = y - 2, \\ (y-2)^2 + y^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} x = y - 2, \\ 2y^2 - 4y = 0. \end{cases} \begin{cases} x = y - 2, \\ y^2 - 2y = 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = 0 - 2, \\ y_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 0; \end{cases}$ (–2; 0); 2) $\begin{cases} x = 2 - 2, \\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = 2; \end{cases}$ (0; 2).

2.4. Нехай $\angle CDO = x$. Тоді $\angle BOC = x + 70°$. ΔCOD — рівнобедрений, а $\angle BOC$ — зовнішній кут цього трикутника. Отже, $x + x = x + 70$; $x = 70°$.



Частина 3

3.1. Нехай маємо двоцифрове число виду $\overline{xy}$: $x \cdot 10 + y$, тоді $x^2 + y^2 = 45$ та $x \cdot 10 + y + 27 = y \cdot 10 + x$. Система: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 10x + y + 27 = 10y + x; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 9x - 9y + 27 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ y = x + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + (x^2 + 6x + 9) = 45, \\ y = x + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0, \\ y = x + 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -6, \\ y_1 = -3; \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

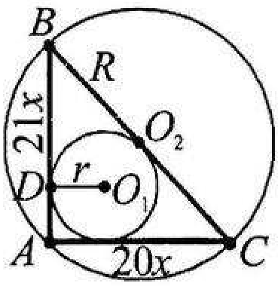
Оскільки x та y — цифри, то $(-6; -3)$ — не задовольняє умову.
Відповідь: 36.

3.2. $x^3 - 8x^2 + 8x - 1 = 0; x^3 - 1 - 8x^2 + 8x = 0; (x-1)(x^2 + x + 1) - 8x(x-1) = 0;$

$(x-1)(x^2 - 7x + 1) = 0; x_1 = 1,\ x_2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}.$

Відповідь: 1; $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$.

3.3. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник ($\angle A = 90°$), $AC : AB = 20 : 21$, звідки $AB = 21x$ см, $AC = 20x$ см. За теоремою Піфагора з ΔBAC: $BC^2 = AB^2 + AC^2$;
$BC^2 = (21x)^2 + (20x)^2 = 441x^2 + 400x^2 = 841x^2$; $BC = 29x$ (см).
$R = O_2C = BC : 2 = 14{,}5x$. Площа ΔABC: $S = pr$,
$p = \frac{21x + 20x + 29x}{2} = 35x$. З іншого боку, $S = \frac{1}{2} AC \cdot AB =$



$= \frac{1}{2} \cdot 21x \cdot 20x = 210x^2$. $210x^2 = 35x \cdot r$; $r = 6x$ (см). $O_2C - O_1D = 17$; $14{,}5x - 6x = 17$; $8{,}5x = 17$; $x = 2$ (см). Отже, $BC = 29x = 29 \cdot 2 = 58$ (см).
Відповідь: 58 см.

ВАРІАНТ №29

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				Х
1.2				Х
1.3		Х		
1.4			Х	

	А	Б	В	Г
1.5	Х			
1.6				Х
1.7				Х
1.8			Х	

	А	Б	В	Г
1.9			Х	
1.10				Х
1.11		Х		
1.12			Х	

1.2. $\begin{matrix} 12 — 1,8 \\ 18 — x \end{matrix}$ $\quad x = \dfrac{18 \cdot 1,8}{12} = 2,7$ (кг).

1.3. $-5 + 4x = 3$; $4x = 8$; $x = 2$.

1.4. $(3a - b)(3a + b) + b^2 = 9a^2 - b^2 + b^2 = 9a^2$.

1.7. Із 20 чисел від 1 до 20 є 3 числа, кратних шести — 6, 12, 18. Отже, шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{3}{20}$.

1.8. $x^2 - 25 > 0$; $(x + 5)(x - 5) > 0$; $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

1.9. Якщо $\Delta BAC = \Delta MNK$, то $\angle M = \angle A = 46°$. Тоді: $\angle N = 180° - \angle M - \angle K = 180° - 46° - 54° = 80°$.

1.10. Якщо $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\angle A = 60°$. Тоді $\angle B = 90° - 60° = 30°$.

1.11. $AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

1.12. $S_{\text{кр.}} = \pi r^2$; $\pi r^2 = 4\pi$; $r^2 = 4$; $r = 2$ (см). $a = 2r = 4$ (см).

Частина 2

2.1.	$\dfrac{2}{y}$
2.2.	2

2.3.	$[-2; +\infty)$
2.4.	60°

2.1. $\left(\dfrac{x-2y}{x^2+2xy} - \dfrac{x+2y}{x^2-2xy}\right) : \dfrac{4y^2}{4y^2-x^2} = \left(\dfrac{x-2y}{x(x+2y)} - \dfrac{x+2y}{x(x-2y)}\right) \cdot \dfrac{4y^2-x^2}{4y^2} =$

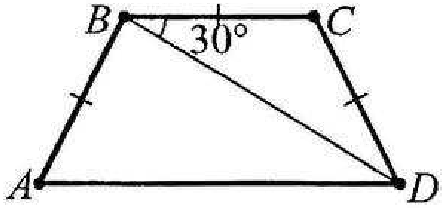
$= -\dfrac{(x-2y)^2-(x+2y)^2}{x(x+2y)(x-2y)} \cdot \dfrac{x^2-4y^2}{4y^2} = -\dfrac{(x-2y-x-2y)\cdot(x-2y+x+2y)}{x(x+2y)(x-2y)} \cdot \dfrac{x^2-4y^2}{4y^2} =$

$= -\dfrac{-8xy}{x(x+2y)(x-2y)} \cdot \dfrac{(x+2y)(x-2y)}{4y^2} = \dfrac{2}{y}$.

2.2. $\dfrac{16-3x}{3} - \dfrac{3x+7}{4} > 0 \,\Big|\cdot 12$; $4(16 - 3x) - 3(3x + 7) > 0$; $64 - 12x - 9x - 21 > 0$;

$-21x > -43$; $x < \dfrac{43}{21}$; $x < 2\dfrac{1}{21}$. Найбільшим цілим значенням x є число 2.

2.3. $y = 3x^2 - 6x + 1$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Координати її вершини: $x = -\frac{-6}{6} = 1$; $y = y(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -2$. Область значень функції $[-2; +\infty)$.



2.4. $AB = CD = BC$. ΔBCD — рівнобедрений, тому $\angle BDC = \angle DBC = 30°$. З ΔBCD: $\angle BDA = \angle DBC = 30°$ (як кути при паралельних прямих AD і BC та січній BD). $\angle D = 30° + 30° = 60°$.

Частина 3

3.1. Послідовні непарні натуральні числа мають вигляд: $2k + 1$, $2k + 3$, $2k + 5$, $2k + 7$, $k \geq 0$. Рівняння: $(2k+3)(2k+5) - 3(2k+1+2k+7) = 111$;

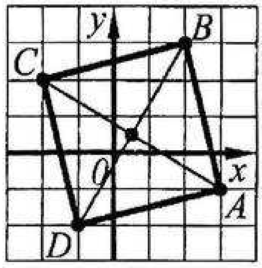
$4k^2 + 10k + 6k + 15 - 12k - 24 = 111$; $4k^2 + 4k - 120 = 0$; $k^2 + k - 30 = 0$; $k_1 = -6$, $k_2 = 5$. Оскільки $k \geq 0$, то $k = 5$. Шукані числа 11, 13, 15, 17.

Відповідь: 11, 13, 15, 17.

3.2. $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,5, \\ x + y = 6. \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$ Введемо заміну $t = \frac{x}{y}$, $t \neq 0$. З першого рівняння системи отримаємо $t + \frac{1}{t} = 2,5$; $t^2 - 2,5t + 1 = 0$; $t_1 = 0,5$; $t_2 = 2$. Тоді:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 0,5, \\ x + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0,5y, \\ 0,5y + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ 2y + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$

Відповідь: $(2; 4)$; $(4; 2)$.



3.3. Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Для діагоналі AC маємо: $x_{\text{ср.}} = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$; $y_{\text{ср.}} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Для діагоналі BD: $x_{\text{ср.}} = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$; $y_{\text{ср.}} = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Середини обох діагоналей збігаються. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Знайдемо довжини цих діагоналей:

$AC = \sqrt{(3+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{34}$; $BD = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}$. Отже, $AC = BD$. Паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. Тоді $ABCD$ — прямокутник.

ВАРІАНТ №30

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1	X			
1.2		X		
1.3				X
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6	X			
1.7		X		
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10	X			
1.11		X		
1.12			X	

1.1. 320 : 6,4 = 50 (ц).

1.4. $2-4(x-1)=2(x+3)$; $2-4x+4=2x+6$; $-4x-2x=6-2-4$; $-6x=0$; $x=0$.

1.6. $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-9}=\dfrac{(a-3)^2}{(a-3)(a+3)}=\dfrac{a-3}{a+3}$.

1.7. $q=-2:6=-\dfrac{1}{3}$.

1.8. Якщо $1{,}5<x<3$ і $3<y<5$, то: $2\cdot 1{,}5<2x<2\cdot 3$; $3<2x<6$;
$3+3<2x+y<6+5$; $6<2x+y<11$.

1.10. $d=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{256+144}=\sqrt{400}=20$ (см).

1.11. $\vec{a}(-2;1)+\vec{b}(3;-4)=\overrightarrow{(-2+3;1-4)}=\overrightarrow{(1;-3)}$.

1.12. Більша діагональ паралелограма лежить проти його тупого кута, який дорівнює $180°-45°=135°$. За теоремою косинусів отримаємо:

$$d^2=5^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 5\cdot 2\sqrt{2}\cos 135°=25+8-20\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=33+20=53;$$

$d=\sqrt{53}$ (см).

Частина 2

2.1.	3
2.2.	$-2a^3b^2$

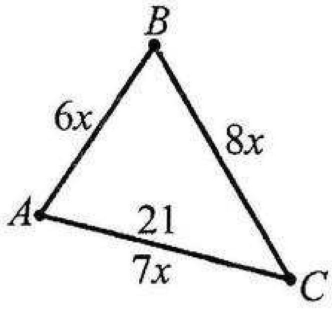
2.3.	$[-2;\,0)\cup(0;\,1]$
2.4.	63 см

2.1. $\dfrac{27^{-3}\cdot 3^{-10}}{81^{-5}}=\dfrac{\left(3^3\right)^{-3}\cdot 3^{-10}}{\left(3^4\right)^{-5}}=\dfrac{3^{-9}\cdot 3^{-10}}{3^{-20}}=\dfrac{3^{-19}}{3^{-20}}=3$.

2.2. $3a^2\sqrt{\dfrac{4}{9}a^2b^4}=3a^2\cdot\dfrac{2}{3}\cdot|a|b^2=2a^2\cdot|a|b^2$. Якщо $a<0$, то: $2a^2\cdot|a|b^2=-2a^3b^2$.

2.3. $y=\dfrac{\sqrt{2-x-x^2}}{x}$. $\begin{cases}2-x-x^2\ge 0,\\ x\ne 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+x-2\le 0,\\ x\ne 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+2)(x-1)\le 0,\\ x\ne 0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2\le x\le 1,\\ x\ne 0;\end{cases}$

2.4. $AC = 21$; $7x = 21$; $x = 3$ (см). $P = 6x + 7x + 8x = 21x = 21 \cdot 3 = 63$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай перша бригада самостійно може зорати поле за x днів, тоді за 1 день вона зоре $\frac{1}{x}$ частину поля. Друга бригада самостійно зможе зорати поле за $(x - 5)$ днів, а за 1 день вона зоре $\frac{1}{x-5}$ частину поля. Разом вони за 1 день зорють $\frac{1}{6}$ частину поля, тому: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6}$; $\frac{x-5+x}{x(x-5)} = \frac{1}{6}$;

$\frac{2x-5}{x(x-5)} = \frac{1}{6}$; $\begin{cases} 12x - 30 = x^2 - 5x, \\ x \neq 0, \ x \neq 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 17x + 30 = 0, \\ x \neq 0, \ x \neq 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2, \ x_2 = 15, \\ x \neq 0, \ x \neq 5; \end{cases}$ $x_1 = 2$ не задовольняє умову задачі, бо $2 - 5 < 0$. Отже, перша бригада може зорати поле за 15 днів, а друга — за $15 - 5 = 10$ (днів).

Відповідь: 15 днів і 10 днів.

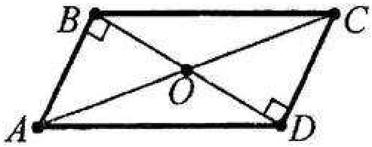
3.2. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)(x^4 - 4x^2 - 5) = 0$. ОДЗ: $x > 0$. 1) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$; $(x^2 + 1)(x^2 - 5) = 0$;

$x^2 = -1$ — коренів немає, $x^2 = 5$, $x = \sqrt{5}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0$; $2 - \sqrt{x} = 0$; $\sqrt{x} = 2$;

$x = 4$.

Відповідь: 4 і $\sqrt{5}$.

3.3. Нехай $ABCD$ — заданий паралелограм, AC і BD — діагоналі, O — точка їх перетину, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, $BD \perp AB$, тоді $BD \perp DC$. За властивістю паралелограма



$BO = OD = \frac{1}{2}BD = 4$ (см), $AO = OC = \frac{1}{2}AC = 5$ (см).

Із прямокутного трикутника ABO ($\angle B = 90°$): $AB = \sqrt{AO^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см). Тоді $S_{ABCD} = AB \cdot BD = 3 \cdot 8 = 24$ (см^2).

Відповідь: 24 см^2.

ВАРІАНТ №31

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3		X		
1.4		X		

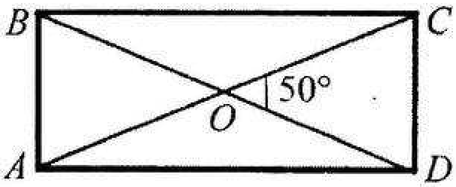
	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6			X	
1.7	X			
1.8		X		

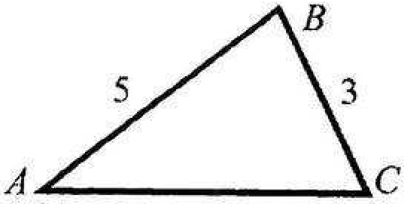
	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10	X			
1.11				X
1.12			X	

1.7. $x - y = (-1)^5 = -1$. Якщо $x - y = -1$, то $x < y$.

1.8. $S_3 = 52$; $a_1 + a_2 + a_3 = 52$; $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 52$; $a_1(1 + q + q^2) = 52$; $a_1(1 + 3 + 3^2) = 52$; $13a_1 = 52$; $a_1 = 4$.

1.10. $\angle CBD = 50° : 2 = 25°$.





1.11. За теоремою косинусів отримаємо: $AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3\cos 60° =$
$= 25 + 9 - 30 \cdot 0{,}5 = 34 - 15 = 19$; $AC = \sqrt{19}$ (см).

1.12. $2x - 2 \cdot 5 = 10$; $2x = 10 + 10$; $2x = 20$; $x = 10$.

Частина 2

2.1.	-60
2.2.	$y = -2x^2$

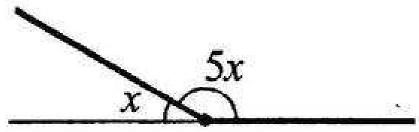
2.3.	500 г
2.4.	12 сторін

2.1. $3\sqrt{1\frac{4}{9}}\sqrt{1\frac{3}{13}} - \sqrt{(-4)^6} = 3\sqrt{\frac{13}{9}\cdot\frac{16}{13}} - \sqrt{4^6} = 3\sqrt{\frac{16}{9}} - 4^3 = 3\cdot\frac{4}{3} - 64 = -60.$

2.2. Параболу, вершина якої лежить у початку координат можна задати рівнянням $y = ax^2$. Отримаємо $-8 = 4a$; $a = -2$. Рівняння квадратичної функції: $y = -2x^2$.

2.3. Олово становить 100% – 60% = 40% сплаву. Маса сплаву дорівнює: $200 : 0{,}4 = 500$ (г).

2.4. $x + 5x = 180$; $6x = 180$; $x = 30°$ — зовнішній кут.
Сума зовнішніх кутів дорівнює 360°, тому
$360° : 30° = 12$. Многокутник має 12 сторін.



Частина 3

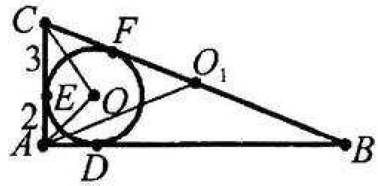
3.1. Нехай x км/год — власна швидкість човна. Тоді швидкість човна за течією — $(x + 3)$ км/год, і 45 км він подолає за $\frac{45}{x+3}$ год. Швидкість човна проти течії $(x - 3)$ км/год, і 45 км він подолає за $\frac{45}{x-3}$ год. Звідси: $\frac{45}{x+3} + \frac{45}{x-3} = 8$;

$$\frac{45(x-3)+45(x+3)-8(x^2-9)}{(x+3)(x-3)}=0;\ \frac{-8x^2+90x+72}{(x+3)(x-3)}=0;\ \frac{4x^2-45x-36}{(x+3)(x-3)}=0.$$

$x_1=-\dfrac{3}{4}$, $x_2=12$; $x_1=-\dfrac{3}{4}$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь: 12 км/год.

3.2. Нехай a, b і c — послідовні члени геометричної прогресії. Тоді $b^2=ac$. Звідси $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(a^2+ac)(ac+c^2)=ac(a+c)(a+c)=b^2(a+c)^2=$ $=(ab+bc)^2$, що й потрібно було довести.



3.3. Нехай задане коло O радіуса r вписане у прямокутний трикутник ABC ($AB\perp AC$), $AE=2$ см, $EC=3$ см. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, $AE=AD=2$ см, $CF=CE=3$ см. Нехай $BF=BD=x$ см. Тоді $AB=(x+2)$ см, $BC=(x+3)$ см, $AC=5$ см. За теоремою Піфагора маємо: $AB^2+AC^2=BC^2$; $(x+2)^2+5^2=(x+3)^2$; $x^2+4x+4+25=x^2+6x+9$; $2x=20$; $x=10$. Отже, $BC=10+3=13$ (см). Оскільки ΔBAC — прямокутний, то BC — діаметр описаного кола. $O_1C=\dfrac{BC}{2}=6{,}5$ (см).

Відповідь: 6,5 см.

ВАРІАНТ №32

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2			X	
1.3		X		
1.4			X	
1.5				X
1.6			X	
1.7	X			
1.8			X	
1.9			X	
1.10				X
1.11	X			
1.12		X		

1.1. $\frac{1}{5}$ м + 35 см = 100 : 5 см + 35 см = 20 см + 35 см = 55 см.

1.2. $\frac{3^{\backslash 4}}{7}-\frac{1^{\backslash 7}}{4}=\frac{12-7}{28}=\frac{5}{28}$.

1.3. $7x-(2a-x)=7x-2a+x=8x-2a$.

1.4. $5x-20=0$; $5x=20$; $x=4$. $K(4;\ 0)$.

1.5. $\frac{9y^6}{x^{12}}\cdot\frac{2x^4}{3y^2}=\frac{9y^6\cdot 2x^4}{x^{12}\cdot 3y^2}=\frac{3y^4\cdot 2}{x^8}=\frac{6y^4}{x^8}$.

1.6. $\left(\sqrt{3}-2\right)^2+\sqrt{48}=3-4\sqrt{3}+4+4\sqrt{3}=7$.

1.9. $\angle A=2\cdot 25°=50°$. Кут, суміжний з кутом $A=50°$, дорівнює: $180°-50°=130°$.

1.11. $S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6\cdot\sin 120°=9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (см^2).

1.12. Знайдемо радіус кола: $r=\sqrt{(-1+3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.
Рівняння кола: $(x+3)^2+(y-1)^2=20$.

Частина 2

2.1.	$-2;\ 1$
2.2.	$y=2x-7$
2.3.	40
2.4.	120°

2.1. $(x^2+x)^2+2(x^2+x)-8=0$. Нехай $x^2+x=y$. Отримаємо: $y^2+2y-8=0$; $y_1=-4$, $y_2=2$. Повертаємось до заміни: а) $x^2+x=-4$; $x^2+x+4=0$ — коренів немає; б) $x^2+x=2$; $x^2+x-2=0$; $x_1=-2$, $x_2=1$.

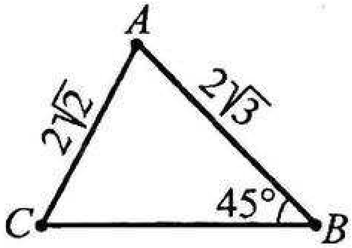
2.2. Лінійну функцію можна задати рівнянням $y=kx+b$. Отримаємо:

$$\begin{cases}-5=k+b,\\-13=-3k+b;\end{cases}\begin{cases}k+b=-5,\\3k-b=13;\end{cases}\begin{cases}4k=8,\\3k-b=13;\end{cases}\begin{cases}k=2,\\6-b=13;\end{cases}\begin{cases}k=2,\\b=-7.\end{cases}$$

Рівняння лінійної функції: $y=2x-7$.

2.3. $b_3=b_1\cdot q^2$; $5=b_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$; $b_1=20$. $S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{20}{1-0,5}=40$.

2.4. За теоремою синусів $\dfrac{\sin B}{AC} = \dfrac{\sin C}{AB}$;



$\sin C = \dfrac{AB \sin B}{AC} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle C = 60°$ або $\angle C = 120°$.

Частина 3

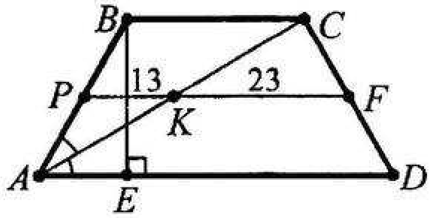
3.1. Нехай чисельник дробу x, тоді знаменник $x + 5$. Після зміни дріб стане таким: $\dfrac{x+3}{(x+5)+4}$. Рівняння: $\dfrac{x+3}{x+9} - \dfrac{x}{x+5} = \dfrac{1}{8}$; $\dfrac{(x+3)(x+5) - x(x+9)}{(x+9)(x+5)} = \dfrac{1}{8}$;

$\dfrac{15-x}{(x+5)(x+9)} = \dfrac{1}{8}$; $\begin{cases} 8(15-x) = (x+5)(x+9), \\ x \neq -9,\ x \neq -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 22x - 75 = 0, \\ x \neq -9, x \neq -5; \end{cases}$ $x_1 = -25$ —

не задовольняє умову задачі, $x_2 = 3$. Шуканий дріб дорівнює $\dfrac{3}{8}$.

Відповідь: $\dfrac{3}{8}$.

3.2. $10a^2 - 6a - 2ab + b^2 + 2 = (9a^2 - 6a + 1) + (a^2 - 2ab + b^2) + 1 =$
$= (3a - 1)^2 + (a - b)^2 + 1$ — вираз набуває додатних значень при всіх дійсних значеннях a і b. Отже, $10a^2 - 6a - 2ab + b^2 + 2 > 0$.



3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \| BC$, $AB = CD$), BE — її висота, AC — діагональ, PF — середня лінія, $PK = 13$ см, $KF = 23$ см. PK — середня лінія ΔBAC, тому $BC = 13 \cdot 2 = 26$ (см). Аналогічно з ΔACD $AD = 23 \cdot 2 = 46$ (см). За умовою, $\angle BAC = \angle CAD$. $\angle CAD = \angle BCA$ ($BC \| AD$, AC — січна). Тому $\angle BCA = \angle BAC$. Отже, $AB = BC = 26$ см. $AE = (AD - BC) : 2 = (46 - 26) : 2 = 10$ (см). З прямокутного трикутника ABE ($\angle E = 90°$) маємо: $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} =$
$= \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ (см). $S_{\text{тр.}} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BE = \dfrac{46 + 26}{2} \cdot 24 = 864$ (см^2).

Відповідь: 864 см^2.

ВАРІАНТ №33

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3		X		
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6			X	
1.7			X	
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10	X			
1.11			X	
1.12				X

1.1. $x : 65 = 910$; $x = 910 \cdot 65$; $x = 59\ 150$.

1.2. $5\frac{3}{5} \cdot 10 = \frac{28}{5} \cdot \frac{10}{1} = 28 \cdot 2 = 56.$

1.4. $3m + mk - 3n - kn = m(3 + k) - n(3 + k) = (3 + k)(m - n).$

1.5. $80 \cdot 2^{-3} - 2^2 = \frac{80}{2^3} - 4 = \frac{80}{8} - 4 = 10 - 4 = 6.$

1.6. $\frac{x^2-1}{5x} : \frac{x+1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{5x} \cdot \frac{x^2}{x+1} = \frac{x-1}{5} \cdot \frac{x}{1} = \frac{x(x-1)}{5}.$

1.10. $NO : OP = MN : PK = 4 : 6 = 2 : 3.$

1.11. Довжина кола дорівнює: $C = 2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ (см). Тоді довжина дуги дорівнює: $l = 6\pi \cdot \frac{60}{360} = \pi$ (см).

1.12. $S = \frac{1}{2} ac \sin\angle B$. $20\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin\angle B$; $20\sqrt{3} = 40 \sin\angle B$; $\sin\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Оскільки шуканий кут гострий, то $\angle B = 60°$.

Частина 2

2.1.	$\frac{a+b}{b}$
2.2.	1000

2.3.	(6; –1); (–2,25; 1,75)
2.4.	24 см

2.1. $\frac{a^2}{ab-b^2} + \frac{b}{b-a} = \frac{a^2}{b(a-b)} + \frac{b}{b-a} = \frac{a^2-b^2}{b(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{b(a-b)} = \frac{a+b}{b}.$

2.2. $\frac{x-3}{x^2-5x+6} = \frac{x-3}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$. Якщо x=2,001, то $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{0{,}001} = 1000.$

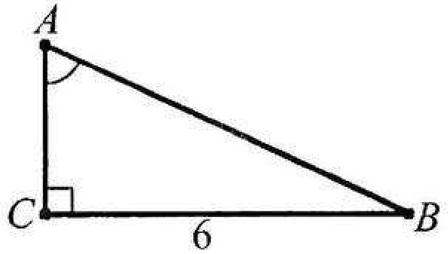
2.3. $\begin{cases} \frac{x}{3} + y = 1 \,\big|\cdot 3, \\ y^2 - xy = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y = 3, \\ y^2 - xy = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - 3y, \\ y^2 - (3-3y)y = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - 3y, \\ 4y^2 - 3y - 7 = 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = 3 + 3, \\ y_1 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = -1; \end{cases}$ (6; –1); 2); $\begin{cases} x = 3 - 3 \cdot 1{,}75, \\ y_2 = 1{,}75; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -2{,}25, \\ y_2 = 1{,}75; \end{cases}$ (–2,25; 1,75).

2.4. $\cos^2 A = 0{,}64$; $\sin^2 A = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$; $\sin A = 0{,}6$.

$AB = \dfrac{6}{\sin A} = \dfrac{6}{0{,}6} = 10$ (см). $AC = AB\cos A =$

$= 10 \cdot 0{,}8 = 8$ (см). $P = 10 + 6 + 8 = 24$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай швидкість течії дорівнює x км/год. Тоді швидкість човна за течією — $(18 + x)$ км/год і час його руху — $\dfrac{20}{18+x}$ год, а швидкість човна проти течії — $(18 - x)$ км/год і час його руху — $\dfrac{20}{18-x}$ год. За течією човен плив на 15 хв $= \dfrac{1}{4}$ год швидше. Рівняння: $\dfrac{20}{18-x} - \dfrac{20}{18+x} = \dfrac{1}{4}$;

$$\frac{80(18+x)-80(18-x)-\left(324-x^2\right)}{4(18-x)(18+x)} = 0; \quad \frac{160x-324+x^2}{(18-x)(18+x)} = 0;$$

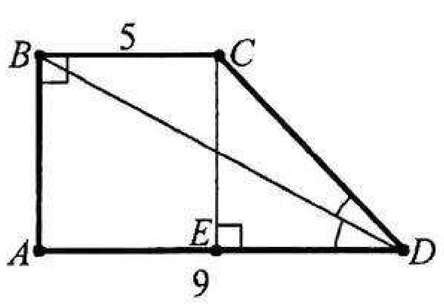
$$\begin{cases} x^2+160x-324=0, \\ (18-x)(18+x) \neq 0; \end{cases} \quad x_1 = 2,\ x_2 = -162$$ — не задовольняє умову задачі.

Відповідь: 2 км/год.

3.2. $$\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^2 + 2 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^2 + 2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2} = \left|\frac{(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}\right| = \left|\frac{6}{-1}\right| = 6.$$

3.3. Нехай $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\angle A = 90°$) — задана прямокутна трапеція, CE — висота трапеції. За умовою, $\angle ADB = \angle BDC$. $\angle ADB = \angle CBD$ ($BC \parallel AD$, BD — січна). Тому $\angle CBD = \angle CDB$, звідки $BC = CD = 5$ (см). $ED = AD - AE = AD - BC =$ $= 9 - 5 = 4$ (см). Із прямокутного трикутника CED ($\angle E = 90°$): $EC = \sqrt{CD^2 - ED^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).



Тоді $S_{\text{тр.}} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot EC = \dfrac{5+9}{2} \cdot 3 = 21$ (см^2).

Відповідь: 21 см^2.

ВАРІАНТ №34

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2		X		
1.3				X
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6			X	
1.7				X
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10			X	
1.11				X
1.12		X		

1.1. $\frac{3}{5}\cdot 180° = 3\cdot 36° = 108°$.

1.2. $x : 5 = 8 : 10$; $x = (5\cdot 8) : 10 = 4$.

1.4. $5c^2 - 5d^2 = 5(c^2 - d^2) = 5(c-d)(c+d)$.

1.5. $-x - 5 \ge 0$; $-x \ge 5$; $x \le -5$. $x \in (-\infty; -5]$.

1.6. $3\cdot 10^8 \cdot 0,5 \cdot 10^6 = 1,5\cdot 10^{14}$ (м).

1.9. $180° - 30° - 30° = 120°$.

1.11. $AO = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$.

1.12. Нехай задано рівносторонній трикутник ABC і центр O описаного навколо нього кола. Отримаємо: $S_{ABC} = 3S_{ABO} = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin 120° = 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ (см^2).

Частина 2

2.1.	0,5	**2.3.**	$p = 2$; $q = -5$
2.2.	–7; –6	**2.4.**	60 см

2.1. $\frac{4a}{a^2-4} : \left(\frac{a+2}{a-2} - \frac{a-2}{a+2}\right) = \frac{4a}{a^2-4} : \frac{(a+2)^2-(a-2)^2}{a^2-4} = \frac{4a}{a^2-4}\cdot\frac{a^2-4}{8a} = \frac{1}{2} = 0,5.$

2.2. $\begin{cases}\frac{x}{5} < \frac{x-1}{6} \,|\cdot 30,\\ 2(1-x)+5 > 14-3(x+5);\end{cases}$ $\begin{cases}6x < 5x-5,\\ 2-2x+5 > 14-3x-15;\end{cases}$ $\begin{cases}x < -5,\\ x > -8;\end{cases}$

$-8 < x < -5$. Цілими розв'язками системи нерівностей є: –7; –6.

2.3. $y = x^2 + px + q$. $\begin{cases}-2 = 1^2 + p + q,\\ 3 = (-4)^2 - 4p + q;\end{cases}$ $\begin{cases}p+q=-3,\\ 4p-q=13;\end{cases}$ $\begin{cases}q=-p-3,\\ 5p=10;\end{cases}$ $\begin{cases}q=-5,\\ p=2.\end{cases}$

2.4. $AB = 20 = 4x$; $x = 5$ (см). $2x + 3x + 3x + 4x = 12x = 12\cdot 5 = 60$ (см).

Частина 3

3.1. Нехай швидкість течії дорівнює x км/год. Тоді швидкість катера за течією — $(20 + x)$ км/год і час його руху — $\frac{22}{20+x}$ год, а швидкість катера проти течії — $(20 - x)$ км/год і час його руху — $\frac{36}{20-x}$ год. Пліт пропливе 6 км за $\frac{6}{x}$ год.

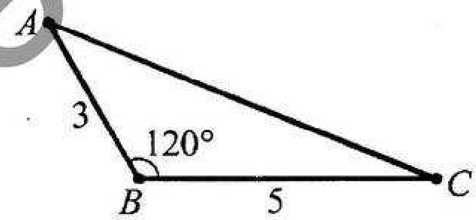
Рівняння: $\dfrac{22}{20+x}+\dfrac{36}{20-x}=\dfrac{6}{x}$; $\dfrac{22x(20-x)+36x(20+x)-6\left(400-x^2\right)}{x(20-x)(20+x)}=0$;

$\dfrac{440x-22x^2+720x+36x^2-2400+6x^2}{x(20-x)(20+x)}=0$; $\dfrac{20x^2+1160x-2400}{x(20-x)(20+x)}=0$;

$\dfrac{x^2+58x-120}{x(20-x)(20+x)}=0$; $x_1=-60$ не задовольняє умову задачі, $x_2=2$ (км/год).

Відповідь: 2 км/год.

3.2. Нехай x_1 та x_2 — корені даного рівняння, x_1' та x_2' — корені шуканого рівняння. Тоді $x_1' = x_1 + 3$, $x_2' = x_2 + 3$. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = -7$. Маємо: $x_1' + x_2' = x_1 + 3 + x_2 + 3 = (x_1 + x_2) + 6 = 2 + 6 = 8$;
$x_1'\,x_2' = (x_1 + 3)(x_2 + 3) = x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = -7 + 3\cdot 2 + 9 = 8$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта, отримуємо рівняння $x^2 - 8x + 8 = 0$.
Відповідь: $x^2 - 8x + 8 = 0$.



3.3. Нехай ABC — заданий трикутник, $BC = 5$ см, $AB = 3$ см, $\angle ABC = 120°$. За теоремою косинусів маємо: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$;
$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120° = 9 + 25 + 15 = 49$;
$AC = 7$ (см). $P_{ABC} = 5 + 3 + 7 = 15$ (см). Периметри подібних фігур відносяться як лінійні розміри цих фігур. Тому сторони подібного трикутника будуть у $\dfrac{30}{15} = 2$ (рази) більші за сторони заданого, тобто $5\cdot 2 = 10$ (см), $3\cdot 2 = 6$ (см), $7\cdot 2 = 14$ (см). Тоді площа подібного трикутника дорівнюватиме: $S=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\sin 120°=30\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $15\sqrt{3}$ см^2.

ВАРІАНТ №35

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2			X	
1.3		X		
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6	X			
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10			X	
1.11		X		
1.12			X	

1.2. $(-3,5 + 15) : (-10,8 + 5,8) = 11,5 : (-5) = -2,3.$

1.4. $-2(x - 0,5) = -3x + 6; -2x + 1 = -3x + 6; -2x + 3x = 6 - 1; x = 5.$

1.5. $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1.$

1.6. $\frac{5x(x+3)}{x^2+3x} = \frac{5x(x+3)}{x(x+3)} = 5.$

1.7. $S_8 = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = \frac{2 \cdot 2,5 + 7 \cdot (-2)}{2} \cdot 8 = -36.$

1.10. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2; 12^2 + d_2^2 = 4 \cdot 8^2; 144 + d_2^2 = 256; d_2^2 = 112; d_2 = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$ (см).

1.11. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\left(\vec{a}\vec{b}\right) = 5 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$

1.12. Оскільки $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$, то заданий трикутник прямокутний.

Частина 2

2.1.	b^{-7}
2.2.	$\frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$

2.3.	$x \in [-2; 2)$
2.4.	5

2.1. $\left(4a^4b^{-3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}a^{-2}b^5\right)^{-2} = \frac{1}{4}a^{-4}b^3 \cdot 4a^4b^{-10} = b^{-7}.$

2.2. $\frac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{5}} = \frac{4\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{13}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)}{13-5} = \frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}.$

2.3. $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 18 \le 0, \\ -4x + 8 > 0; \end{cases} \begin{cases} 2(x+2)(x-4,5) \le 0, \\ x < 2; \end{cases} \begin{cases} x \in [-2; 4,5], \\ x \in (-\infty; 2); \end{cases} x \in [-2; 2).$

2.4. Точка M — середина відрізка BC. Її координати:

$x_M = \frac{-4+6}{2} = 1; y_M = \frac{3+1}{2} = 2. M(1; 2). AM = \sqrt{(1-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$

3.1. Нехай за 1 год друга бригада виготовляла x деталей, тому вона затратила $\frac{450}{x}$ год. Тоді за 1 год перша бригада виготовляла $(x + 5)$ деталей і затратила $\frac{450}{x+5}$ год. Рівняння: $\frac{450}{x} - \frac{450}{x+5} = 1$; $\frac{450(x+5) - 450x - x(x+5)}{x(x+5)} = 0$;

$\frac{x^2 + 5x - 2250}{x(x+5)} = 0$; $x_1 = -50$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 45$ (дет.).

Перша бригада виготовила 45 + 5 = 50 (деталей).

Відповідь: 50 і 45 деталей.

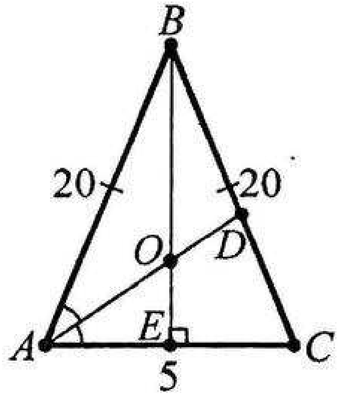
3.2. Нехай у коробці x чорних кульок. Тоді разом у коробці $(x + 10)$ кульок.

Імовірність вибрати чорну кульку з коробки дорівнює $\frac{x}{x+10}$. За умовою,

$\begin{cases} \frac{x}{x+10} > 0,4, \\ \frac{x}{x+10} < 0,5, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} \frac{x - 0,4x - 4}{x+10} > 0, \\ \frac{x - 0,5x - 5}{x+10} < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{0,6x - 4}{x+10} > 0, \\ \frac{0,5x - 5}{x+10} < 0. \end{cases}$ Оскільки $x + 10 > 0$, то

маємо: $\begin{cases} 0,6x - 4 > 0, \\ 0,5x - 5 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 6\frac{2}{3}, \\ x < 10. \end{cases}$ Отже, чорних кульок може бути 7, 8 або 9.

Відповідь: 7, 8 або 9.



3.3. Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник, $AB = CB = 20$ см, AD — бісектриса, $AC = 5$ см. BE — висота трикутника. За властивістю бісектриси трикутника $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$, звідки $\frac{BD}{20} = \frac{20 - BD}{5}$; $5BD = 400 - 20BD$; $BD = 16$ (см). $DC = 20 - 16 = 4$ (см).

$\cos\angle C = \frac{EC}{BC} = \frac{5:2}{20} = \frac{1}{8}$. За теоремою косинусів для трикутника ADC маємо: $AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos\angle C =$
$= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = 36$; $AD = 6$ см.

Відповідь: 6 см.

ВАРІАНТ №36

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1	X			
1.2				X
1.3			X	
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10				X
1.11			X	
1.12	X			

1.1. $789 - (289 - 25) = 789 - 289 + 25 = 500 + 25 = 525.$

1.3. $11 - 4x = 27; -4x = 27 - 11; -4x = 16; x = -4.$

1.7. Якщо $1 < a < 3$, то: $1 \cdot 5 < 5a < 3 \cdot 5$; $5 < 5a < 15$.

1.8. $a_5 = a_1 + 4d$; $35 = a_1 + 4 \cdot 6$; $a_1 = 35 - 24$; $a_1 = 11$.

1.9. $\angle MOB = 60° : 2 = 30°$; $\angle AOM = 180° - 30° = 150°$.

1.12. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{(2-4; -2+1)} = \overrightarrow{(-2; -1)}; \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$

Частина 2

2.1.	1
2.2.	8

2.3.	$\frac{1}{3}$
2.4.	88 см^2

2.1. $\frac{12}{\sqrt{3x+1}} = 6$; $\frac{2}{\sqrt{3x+1}} = 1$; $\sqrt{3x+1} = 2$; $3x + 1 = 4$; $3x = 3$; $x = 1$.

2.2. Віссю симетрії параболи є пряма $x = \frac{-b}{2a}$. Тоді для параболи $y = 2x^2 + bx - 7$ отримаємо: $-2 = -\frac{b}{2 \cdot 2}$; $b = 8$. Рівняння параболи $y = 2x^2 + 8x - 7$.

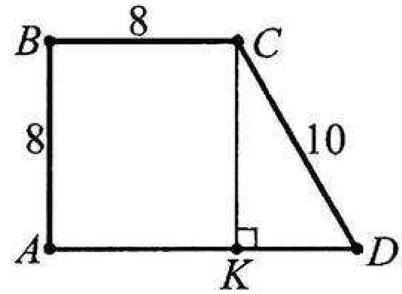
2.3. Число 24 має 8 натуральних дільників (1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24), а усіх натуральних чисел 24, тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

2.4. $AK = BC = 8$ см, $AB = CK = 8$ см.

$KD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

$AD = AK + KD = 8 + 6 = 14$ (см).

$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CK = \frac{14 + 8}{2} \cdot 8 = 88$ (см^2).



Частина 3

3.1. Нехай у початковому сплаві було x г срібла, тоді його вміст у сплаві $\frac{x}{x+20}$. У новому сплаві стало $(x + 5)$ г срібла і $(10 + 20) = 30$ г золота, а вміст срібла у новому сплаві $\frac{x+5}{(x+5)+30}=\frac{x+5}{x+35}$. Отриманий сплав містить на

$5\ \%=\frac{1}{20}$ більше срібла, ніж початковий: $\frac{x+5}{x+35}-\frac{x}{x+20}=\frac{1}{20}$;

$\frac{(x+5)(x+20)-x(x+35)}{(x+20)(x+35)}=\frac{1}{20}$; $\frac{10(10-x)}{(x+20)(x+35)}=\frac{1}{20}$;

$\begin{cases}200(10-x)=(x+20)(x+35),\\ x\neq-35,\ x\neq-20;\end{cases}$ $\begin{cases}2000-200x=x^2+35x+20x+700,\\ x\neq-35,\ x\neq-20;\end{cases}$

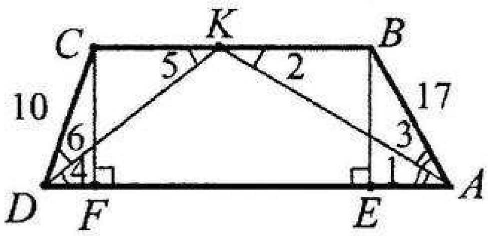
$\begin{cases}x^2+255x-1300=0,\\ x\neq-35,\ x\neq-20;\end{cases}$ $x_1=-260$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=5$ (г).

Відповідь: 5 г.

3.2. Усіх двоцифрових чисел є: 99 – 9 = 90. Скориставшись властивістю арифметичної прогресії (a_n), знайдемо кількість двоцифрових чисел, кратних 4: $a_1=12, a_n=96, d=4$. Оскільки $a_n=a_1+d(n-1)$, то $96 = 12 + 4(n-1)$. Звідки $n = 22$. Аналогічно знайдемо кількість двоцифрових чисел, кратних 5: $a_1 = 10$, $a_n = 95$, $d = 5$. Отже, $95 = 10 + 5(n-1)$. Звідки $n = 18$. Виключимо один раз числа, які враховані двічі, це числа кратні 4 і 5, тобто кратні 20: $a_1 = 20$, $a_n = 80$, $d = 20$. Отже, $80 = 20 + 20(n-1)$. Звідки $n = 4$. Тому кількість двоцифрових чисел, які діляться на 4 або 5, дорівнює $22 + 18 - 4 = 36$. Отже, ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число буде кратне 4 або 5, дорівнює: $\frac{36}{90}=\frac{2}{5}$. *В-дь:* $\frac{2}{5}$.

3.3. Нехай $ABCD$ $(AD\|BC)$ — трапеція, $AB = 17$ см, $CD = 10$ см, BE і CF — висоти трапеції, $BE = CF = 8$ см, K — точка основи BC, AK і DK — бісектриси кутів A і D відповідно. $\angle1=\angle3$, бо AK — бісектриса кута A, $\angle1=\angle2$ як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK. Отже, $\angle3=\angle2$ і трикутник ABK — рівнобедрений, $BK = AB = 17$ см. Аналогічно $\angle5=\angle6$ і $KC = CD = 10$ см. З трикутника AEB $(\angle E = 90°)$ маємо: $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$ (см). Аналогічно $DF=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (см). Знайдемо AD: $AD = AE + EF + FD = 15 + BC + 6 = 15 + (10 + 17) + 6 = 48$ (см).

Площа трапеції дорівнює: $S_{\text{тр.}}=\frac{AD+BC}{2}\cdot BE=\frac{48+27}{2}\cdot 8=300$ (см^2).



Відповідь: 300 см^2.

ВАРІАНТ №37

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1	X			
1.2			X	
1.3				X
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6		X		
1.7				X
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10	X			
1.11				X
1.12			X	

1.2. $5\frac{5}{6}+1\frac{1}{8}=6\frac{20+3}{24}=6\frac{23}{24}$.

1.5. $\frac{5m^6}{6}\cdot\frac{3}{m^2}=\frac{5m^6\cdot 3}{6\cdot m^2}=\frac{5m^4\cdot 1}{2\cdot 1}=\frac{5m^4}{2}$.

1.6. Якщо $a>0$, то: $-3a\sqrt{3}=-\sqrt{(3a)^2\cdot 3}=-\sqrt{27a^2}$.

1.7. $y=x^2-2x-3$. $x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$; $y_в=y(1)=1^2-2\cdot 1-3=-4$. $K(1;-4)$.

1.8. Усіх кульок у коробці $5+7+3=15$, не зелених кульок — $7+3=10$.

Шукана ймовірність дорівнює: $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

1.11. Знайдемо кут між бічними сторонами трикутника: $180°-30°-30°=$

$=120°$. $S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\sin 120°=32\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$ (см^2).

1.12. Нехай K — середина відрізка AB. Тоді: $x_K=\frac{3-1}{2}=1$; $y_K=\frac{-2+4}{2}=1$;

$K(1;1)$. $OK=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Частина 2

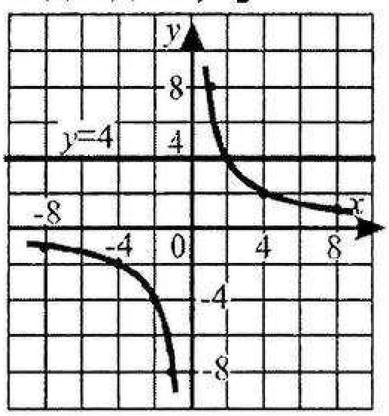
2.1.	9
2.2.	(0; 2)

2.3.	5; 2
2.4.	7 см

2.1. $\frac{12-x}{x^2+6x}+\frac{3}{x^2-6x}=\frac{6}{x^2-36}$; $\frac{12-x}{x(x+6)}+\frac{3}{x(x-6)}=\frac{6}{(x-6)(x+6)}\Big|\cdot x(x-6)(x+6)$.

Якщо $x\neq 0$ та $x\neq\pm 6$, то: $(12-x)(x-6)+3(x+6)=6x$; $12x-72-x^2+6x+3x+$ $+18=6x$; $-x^2+15x-54=0$; $x^2-15x+54=0$; $x_1=6$ — не підходить, $x_2=9$.

2.2. Графіком функції $y=\frac{8}{x}$ є гіпербола. Побудуємо графік по точках.



x	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
y	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1

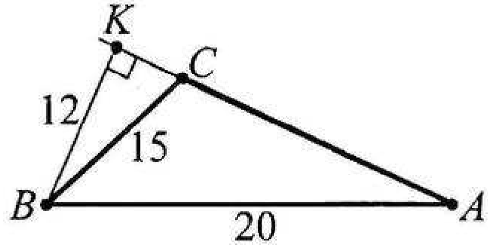
Функція набуває значень, більших за 4, якщо $0<x<2$.

2.3. Нехай (a_n) арифметична прогресія, у якій $a_1 = 8$, $a_4 = -1$. Отримаємо: $a_4 = a_1 + 3d$; $-1 = 8 + 3d$; $3d = -9$; $d = -3$. Тоді: $a_2 = 8 + d = 8 - 3 = 5$; $a_3 = 8 + 2d = 8 - 6 = 2$.

2.4. $KC = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ (см).

$AK = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ (см).

$AC = AK - KC = 16 - 9 = 7$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай x км/год — власна швидкість човна, а y км/год — швидкість течії. Тоді швидкість човна за течією — $(x + y)$ км/год, а проти течії — $(x - y)$ км/год. За 5 год руху за течією човен проплив $5(x + y)$ км, а за 2 год озером він проплив $2x$ км, що разом становить 123 км. Звідси: $2x + 5(x + y) = 123$. Оскільки за 5 год руху за течією човен долає відстань, у 3 рази більшу, ніж за 2 год руху проти течії, то: $5(x+y) = 3 \cdot 2(x-y)$. Система:

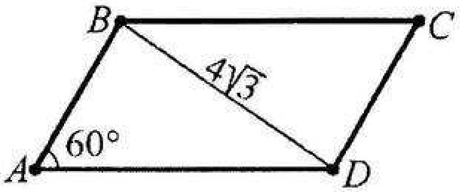
$$\begin{cases} 2x+5(x+y)=123, \\ 5(x+y)=6(x-y); \end{cases} \begin{cases} 7x+5y=123, \\ -x+11y=0; \end{cases} \begin{cases} 77y+5y=123; \\ x=11y, \end{cases} \begin{cases} 82y=123, \\ x=11y; \end{cases} \begin{cases} y=1,5; \\ x=11y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1,5, \\ x=16,5. \end{cases}$$

Відповідь: 16,5 км/год і 1,5 км/год.

3.2. Перетворимо різницю: $(a-2)^2 - 5 - 2(a-6) = a^2 - 4a + 4 - 5 - 2a + 12 =$
$= a^2 - 6a + 11 = (a^2 - 6a + 9) + 2 = (a-3)^2 + 2$ — вираз набуває додатних значень при всіх дійсних значеннях a. Отже, $(a-2)^2 - 5 > 2(a-6)$ при всіх дійсних значеннях a.

3.3. Нехай $ABCD$ — заданий паралелограм, $\angle A = \angle C = 60°$, $BD = 4\sqrt{3}$ см, $\angle ABD : \angle DBC = 3:1$. За властивістю кутів паралелограма $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$. Нехай $\angle DBC = x$, тоді $\angle ABD = 3x$. $x + 3x = 120°$; $4x = 120°$; $x = 30°$. $\angle DBC = 30°$, $\angle ABD = 3 \cdot 30 = 90°$.



Якщо ж $\angle ABD : \angle DBC = 1:3$, то $\angle DBC = 90°$, $\angle ABD = 30°$.

З прямокутного трикутника ABD ($\angle B = 90°$): $AB = \dfrac{BD}{\operatorname{tg} 60°} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$ (см),

$AD = \dfrac{BD}{\sin 60°} = 4\sqrt{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8$ (см). $P_{ABCD} = 2(4 + 8) = 24$ (см).

Відповідь: 24 см.

ВАРІАНТ №38

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2		X		
1.3	X			
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10			X	
1.11	X			
1.12				X

1.1. $84 - 3x = 12$; $-3x = 12 - 84$; $-3x = -72$; $x = 24$.

1.2. $\frac{4}{7} : \frac{1}{14} = \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{1} = \frac{4 \cdot 14}{7 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 8.$

1.4. $xy(2x - 3y) - 3y(x^2 - xy) = 2x^2y - 3xy^2 - 3x^2y + 3xy^2 = -x^2y.$

1.6. $\frac{2x-8}{x+2} \cdot \frac{3x+6}{x^2-16} = \frac{2(x-4)}{x+2} \cdot \frac{3(x+2)}{(x-4)(x+4)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{x+4} = \frac{6}{x+4}.$

1.10. Трикутники AOC і BOD подібні. Отже, $\angle CAO = \angle DBO = 45°$.

1.11. $n = 360° : 30° = 12$ (сторін).

1.12. Нехай бічна сторона дорівнює x см. Отримаємо:

$S = \frac{1}{2}x^2 \sin\varphi$; $24 = \frac{1}{2}x^2 \sin 30°$; $24 = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{2}$; $x^2 = 96$; $x = \sqrt{96}$; $x = 4\sqrt{6}$ (см).

Частина 2

2.1.	2006
2.2.	$q = -40$; $x_2 = -8$

2.3.	(2; 1), (–2; 1)
2.4.	110°

2.1. $\frac{9b^2 + a^2}{a-3b} + \frac{6ab}{3b-a} = \frac{9b^2 + a^2}{a-3b} - \frac{6ab}{a-3b} = \frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a-3b} = \frac{(a-3b)^2}{a-3b} = a - 3b.$

Якщо $a = 2013$, $b = 2\frac{1}{3}$, то: $a - 3b = 2013 - 3 \cdot 2\frac{1}{3} = 2013 - 3 \cdot \frac{7}{3} =$

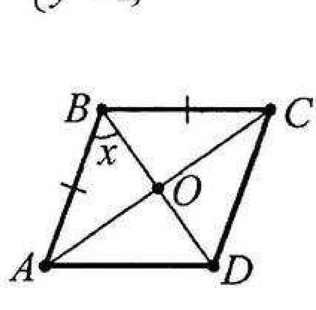
$= 2013 - 7 = 2006$.

2.2. $5 + x_2 = -3$; $x_2 = -8$. Тоді: $q = 5 \cdot (-8) = -40$.

2.3. $\begin{cases} 2x^2 + y = 9, \\ 3x^2 - 2y = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 + y = 9, \\ 3x^2 - 2y = 10; \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{vmatrix}$ $\begin{cases} 2x^2 + y = 9, \\ 7y = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 = 8, \\ y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2, \\ y = 1; \end{cases}$

(2; 1), (–2; 1).

2.4. Нехай $\angle ABD = x$, тоді $\angle BAC = x - 20°$. З ΔABO ($\angle O = 90°$) одержимо: $x + x - 20° = 90°$; $2x = 110°$; $x = 55°$. $\angle B = 2x = 2 \cdot 55° = 110°$.



Частина 3

3.1. Нехай на склад завезли x кг бананів, тоді апельсинів завезли $(x + 100)$ кг. Після продажу на складі залишилось $0{,}2(x + 100)$ кг апельсинів і $0{,}7x$ кг бана-

нів, що на 105 кг більше, ніж апельсинів: $0,7x - 0,2(x + 100) = 105$; $0,5x = 125$; $x = 250$. Апельсинів завезли $250 + 100 = 350$ (кг).
Відповідь: 350 кг апельсинів, 250 кг бананів.

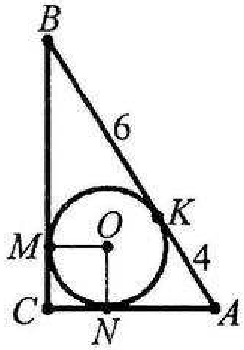
3.2. $(2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2)-(1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2)=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+$
$+(6^2-5^2)+\ldots+(100^2-99^2) = (2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+(6-5)(6+5)+$
$+\ldots+(100-99)\cdot(100+99) = 1\cdot3+1\cdot7+1\cdot11+\ldots+1\cdot199=3+7+11+\ldots+199$.

Це сума n членів арифметичної прогресії (a_n), у якої:

$a_1 = 3; a_n = 199; d = 7-3 = 4; 199 = a_1+(n-1)d; 199 = 3+4(n-1); 4n = 200; n = 50.$

Маємо: $S_{50} = \dfrac{3+199}{2}\cdot 50 = 5050$.

Відповідь: 5050.



3.3. Нехай коло O радіуса x дотикається до катетів трикутника в точках M і N. Оскільки $OMCN$ — квадрат, то $CM = CN = x$ см. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, одержимо: $AN = AK = 4$ см, $BM = BK = 6$ см. Розглянемо прямокутний трикутник ABC. У ньому: $AB = 4 + 6 = 10$ (см), $AC = (4 + x)$ см, $BC = (6 + x)$ см. За теоремою Піфагора маємо: $AC^2 + BC^2 = AB^2$; $(4 + x)^2 + (6 + x)^2 = 10^2$; $2x^2 + 20x + 52 = 100$; $x^2 + 10x - 24 = 0$; $x_1 = -12$ — не підходить; $x_2 = 2$. Тоді: $AC = 4 + 2 = 6$ (см), $BC = 6 + 2 = 8$ (см).
$P_{ABC} = 10 + 6 + 8 = 24$ (см).
Відповідь: 24 см.

ВАРІАНТ №39

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2			X	
1.3		X		
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5	X			
1.6		X		
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10			X	
1.11		X		
1.12		X		

1.2. 180 км = 180000 м = 18000000 см. 18000000 см : 5000000 = 18 см : 5 = 3,6 см.

1.5. $-2{,}5\sqrt{4^2} = -2{,}5 \cdot 4 = -10$.

1.6. $\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^{-2} \cdot a^4 \cdot b^{-7} = \dfrac{a^{-6}}{b^{-4}} \cdot a^4 \cdot b^{-7} = a^{-6} \cdot b^4 \cdot a^4 \cdot b^{-7} = a^{-2}b^{-3}$.

1.7. 3,5 : 20 · 400 = 70 (кг).

1.9. $\angle K = 180° - 35° - 25° = 120°$. Отже, трикутник MNK — тупокутний.

1.11. $x_M = \dfrac{2-6}{2} = -2$; $y_M = \dfrac{-3+7}{2} = 2$; $M(-2; 2)$.

1.12. $R = 4\sqrt{3}$ (см). $r = 4\sqrt{3}\cos 30° = 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$ (см). $S = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ (см^2).

Частина 2

2.1.	–1
2.2.	0; 1

2.3.	$a = 3$; $b = -2$
2.4.	9 см

2.1. $\left(\dfrac{a}{b^2-ab} + \dfrac{b}{a^2-ab}\right) \cdot \dfrac{ab}{b+a} = \left(-\dfrac{a}{b(a-b)} + \dfrac{b}{a(a-b)}\right) \cdot \dfrac{ab}{a+b} =$

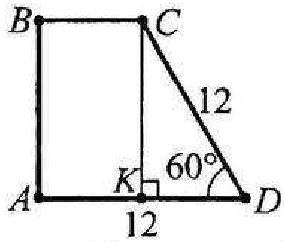
$= \dfrac{-a^2+b^2}{ab(a-b)} \cdot \dfrac{ab}{a+b} = -\dfrac{(a-b)(a+b)ab}{ab(a-b)(a+b)} = -1$.

2.2. $0 < 1 + \dfrac{2-3x}{2} < 3$; $\begin{cases} 1+\dfrac{2-3x}{2} > 0 \,\Big|\cdot 2, \\ 1+\dfrac{2-3x}{2} < 3 \,\Big|\cdot 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2+2-3x > 0, \\ 2+2-3x < 6; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x > -4, \\ -3x < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < \dfrac{4}{3}, \\ x > -\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

$-\dfrac{2}{3} < x < 1\dfrac{1}{3}$. Цілими розв'язками нерівності є: 0; 1.

2.3. $y = ax^2 + bx - 5$. $\begin{cases} -4 = a+b-5, \\ 11 = a(-2)^2 - 2b - 5; \end{cases}$ $\begin{cases} a+b=1, \\ 4a-2b=16; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1-a, \\ 4a-2+2a=16; \end{cases}$ $\begin{cases} b=-2, \\ a=3. \end{cases}$

2.4. $KD = CD\cos 60° = 12 \cdot 0{,}5 = 6$ (см). $BC = AD - KD =$ $= 12 - 6 = 6$ (см). $l = \dfrac{AD + BC}{2} = \dfrac{12 + 6}{2} = 9$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай x км/год — швидкість першого туриста, а y км/год — швидкість другого туриста. До зустрічі перший турист пройшов $2x$ км, а другий — $2y$ км. Рівняння: $2x + 2y = 20$. $\dfrac{20}{x}$ год — час руху першого туриста з 1-го пункту в 2-ий, що на 1 год 40 хв $= \dfrac{5}{3}$ год більше від $\dfrac{20}{y}$ год — часу руху другого туриста з 2-го пункту в 1-ий. Рівняння: $\dfrac{20}{x} - \dfrac{20}{y} = \dfrac{5}{3}$; $\dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{3}$.

Система: $\begin{cases} 2x + 2y = 20, \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 - y, \\ \dfrac{12y - 12x - xy}{3xy} = 0; \end{cases}$ ОДЗ: $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$\begin{cases} x = 10 - y, \\ 12y - 12(10 - y) - y(10 - y) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 - y, \\ y^2 + 14y - 120 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 10 - y, \\ y_1 = -20, y_2 = 6; \end{cases}$ $y = -20$ не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість першого туриста становить $10 - 6 = 4$ (км/год), а швидкість другого — 6 км/год.

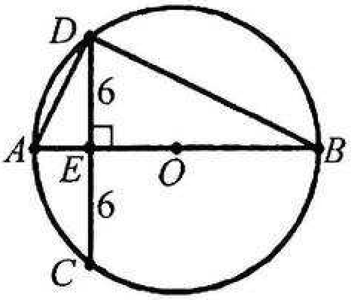
Відповідь: 4 км/год, 6 км/год.

3.2. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 5 = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 5$.

Два перші доданки перетвореного виразу набирають невід'ємних значень, тому вираз набуває найменшого значення при $x = -1$, $y = 2$. Якщо $x = -1$, $y = 2$, то: $(x+1)^2 + (y-2)^2 - 5 = 0^2 + 0^2 - 5 = -5$.

Відповідь: –5.

3.3. Нехай задане коло O, у якому проведено хорду CD і діаметр AB ($CD \perp AB$), $DE = CE = 12 : 2 = 6$ (см), $BE - AE = 9$ см. Нехай $AE = x$ см, тоді $BE = (9 + x)$ см. З прямокутного трикутника ADB ($\angle D = 90°$) за властивістю перпендикуляра маємо: $DE^2 = AE \cdot BE$; $6^2 = x \cdot (x + 9)$; $x^2 + 9x - 36 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = -12$ — не підходить. Отже, $AE = 3$ см, $BE = 9 + 3 = 12$ (см), $AB = 3 + 12 = 15$ (см). Тоді $l = \pi d = 15\pi$ (см).



Відповідь: 15π см.

ВАРІАНТ №40

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3			X	
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6			X	
1.7		X		
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9	X			
1.10		X		
1.11			X	
1.12		X		

1.1. $48{,}5 \cdot 0{,}1 + 48 : 1{,}6 = 4{,}85 + 480 : 16 = 4{,}85 + 30 = 34{,}85.$

1.5. $-x^2 + 5x - 6 = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$; $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

1.6. $\dfrac{15}{x^2 - 5x} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{15}{x(x-5)} + \dfrac{3^{\backslash x-5}}{x} = \dfrac{15 + 3x - 15}{x(x-5)} = \dfrac{3x}{x(x-5)} = \dfrac{3}{x-5}.$

1.7. $b_4 = b_1 \cdot q^3 = -32 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = -32 \cdot \left(-\dfrac{1}{8}\right) = 4.$

1.8. Якщо $4 < a < 7$, то: $4 \cdot 3 < 3a < 7 \cdot 3$; $12 < P < 21$.

1.10. $NK = \sqrt{MK^2 - MN^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ (см).

1.11. $\vec{a}\vec{b} = 6 \cdot 3 + (-5) \cdot 4 = 18 - 20 = -2.$

1.12. За теоремою синусів $\dfrac{AC}{\sin\angle B} = \dfrac{AB}{\sin\angle C}$; $\sin\angle B = \dfrac{AC \sin\angle C}{AB} =$

$= \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\angle B = 45^\circ$ або $\angle B = 135^\circ$.

Оскільки $AB > AC$, то $\angle C = 60^\circ > \angle B$. Отже, $\angle B = 45^\circ$.

Частина 2

2.1.	$\dfrac{13}{27}$
2.2.	$-\dfrac{a}{2x}$

2.3.	$x \in (-1; 4)$
2.4.	5 см

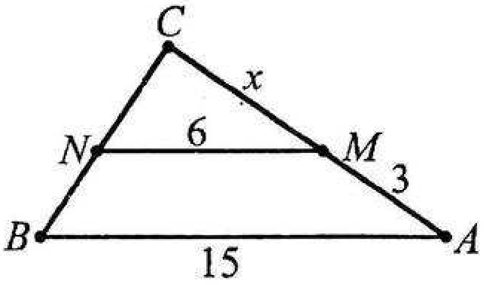
2.1. $0{,}75^{-2} - 1{,}5^{-3} - (-3)^0 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - 1 = \dfrac{16}{9} - \dfrac{8}{27} - 1 = \dfrac{48 - 8 - 27}{27} = \dfrac{13}{27}.$

2.2. $\dfrac{2x^3}{a^2}\sqrt{\dfrac{a^6}{16x^8}} = \dfrac{2x^3}{a^2} \cdot \dfrac{|a^3|}{4x^4} = \dfrac{2x^3}{a^2} \cdot \dfrac{-a^3}{4x^4} = -\dfrac{a}{2x}.$

2.3. Область визначення функції:

$-x^2 + 3x + 4 > 0$; $x^2 - 3x - 4 < 0$; $(x-4)(x+1) < 0$; $x \in (-1; 4)$.

2.4. $\Delta NCM \sim \Delta BCA$, $CM = x$ см. $AC = (3 + x)$ см.
$\frac{MN}{AB} = \frac{MC}{AC}$; $\frac{6}{15} = \frac{x}{3+x}$; $6(3 + x) = 15x$; $9x = 18$;
$x = 2$ (см). $AC = 3 + 2 = 5$ (см).

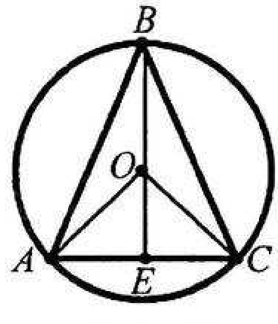


Частина 3

3.1. Нехай x км/год — швидкість руху поїзда за розкладом, тоді час його руху за розкладом $\frac{300}{x}$ год. Збільшена швидкість руху поїзда — $(x + 10)$ км/год і час його руху з новою швидкістю — $\frac{300}{x+10}$ год, що на 1 год менше, ніж за розкладом. Рівняння: $\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1$; $\frac{300(x+10) - 300x - x(x+10)}{x(x+10)} = 0$;
$\frac{x^2 + 10x - 3000}{x(x+10)} = 0$; $\begin{cases} x_1 = -60,\ x_2 = 50, \\ x(x+10) \neq 0; \end{cases}$ $x_1 = -60$ не задовольняє умову задачі.
Отже, поїзд мав проїхати перегін за 300 : 50 = 6 (год).
Відповідь: 6 год.

3.2. Область визначення функції $y = \frac{3}{\sqrt{2x+4}} + \frac{5}{|x| - 3}$ знайдемо із системи:
$\begin{cases} 2x + 4 > 0, \\ |x| - 3 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > -4, \\ |x| \neq 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x \neq \pm 3. \end{cases}$ Звідси: $x \in (-2; 3) \cup (3; +\infty)$.
Відповідь: $(-2; 3) \cup (3; +\infty)$.

3.3. Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник, який вписано в коло O завдовжки 50π см, BE — висота, $BE = 32$ см. Центр описаного кола — точка перетину серединних перпендикулярів, тому висота BE проходить через точку O. $l = 2\pi r$; $r = \frac{l}{2\pi} = \frac{50\pi}{2\pi} = 25$ (см). Отже,



$OA = OB = OC = 25$ см. $OE = BE - OB = 32 - 25 = 7$ (см). З прямокутного трикутника OEC: $OC^2 = OE^2 + EC^2$; $25^2 = 7^2 + EC^2$; $EC = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (см).
$AE = EC = 24$ (см). $AC = 24 + 24 = 48$ (см). З прямокутного трикутника BEC ($\angle E = 90°$): $BC^2 = BE^2 + EC^2$; $BC = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ (см).
$P_{ABC} = 40 + 40 + 48 = 128$ (см).
Відповідь: 128 см.

ВАРІАНТ №41

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3			X	
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7				X
1.8	X			

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10			X	
1.11				X
1.12		X		

1.5. $\frac{2x^{\backslash 4}}{y}+\frac{y^{\backslash y}}{4}=\frac{8x+y^2}{4y}$.

1.8. $q=-1:\frac{1}{3}=-3;\ b_4=b_1\cdot q^3=\frac{1}{3}\cdot(-3)^3=-9$.

1.9. Нехай $AM=x$, тоді $BM=3x$. Рівняння: $x+3x=84$; $4x=84$; $x=21$; $3x=63$. Отже, $BM=63$.

1.10. Сума двох суміжних сторін паралелограма дорівнює 70 : 2 = 35 (см). Нехай одна сторона паралелограма дорівнює $3x$, тоді інша дорівнює $4x$. Рівняння: $3x+4x=35$; $7x=35$; $x=5$; $3x=15$; $4x=20$. Отже, сторони дорівнюють 15 см, 20 см, 15 см і 20 см.

1.11. За теоремою косинусів отримаємо: $a^2=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cos 60°=$
$=36+64-2\cdot 48\cdot 0{,}5=100-48=52;\ a=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ (см).

1.12. $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}=\overrightarrow{3(-1;1)}-2\overrightarrow{(2;-3)}=\overrightarrow{(-3;3)}-\overrightarrow{(4;-6)}=\overrightarrow{(-3-4;3-(-6))}=\overrightarrow{(-7;9)}$.

Частина 2

2.1.	33
2.2.	(4; 4); (–1; –1)

2.3.	3456 грн
2.4.	10 см

2.1. $\sqrt{(-7)^4}-\frac{2\sqrt{160}}{\sqrt{2{,}5}}=(-7)^2-2\sqrt{\frac{160}{2{,}5}}=49-2\sqrt{64}=49-16=33$.

2.2. $x=x^2-2x-4;\ x^2-3x-4=0;\ x_1=4;\ x_2=-1;\ \ y_1=y(4)=4;\ y_2=y(-1)=-1$.
(4; 4); (–1; –1).

2.3. Через рік вкладник матиме: 10 000 · 1,16 = 11 600 гривень. Через два роки вкладник матиме: 11 600 · 1,16 = 13 456 гривень. Відсоткових грошей він матиме 13456 – 10000 = 3 456 (гривень).

2.4. 360° : 72° = 5. Отже, у крузі поміститься 5 таких секторів і $S_{кр.}=20\pi\cdot 5=$ $=100\pi.\ S_{кр.}=\pi r^2;\ r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\sqrt{\frac{100\pi}{\pi}}=10$ (см).

Частина 3

3.1. Нехай швидкість течії дорівнює x км/год. Тоді швидкість човна за течією — $(18+x)$ км/год і час його руху — $\frac{30}{18+x}$ год, а швидкість човна проти течії — $(18-x)$ км/год і час його руху — $\frac{16}{18-x}$ год. Рівняння:

$$\frac{30}{18+x}+\frac{16}{18-x}=\frac{5}{2};\quad \frac{60(18-x)+32(18+x)-5\left(324-x^2\right)}{2(18+x)(18-x)}=0;$$

$$\frac{5x^2-28x+36}{(18-x)(18+x)}=0;\quad x_1=2,\ x_2=3,6.$$

Відповідь: 2 км/год або 3,6 км/год.

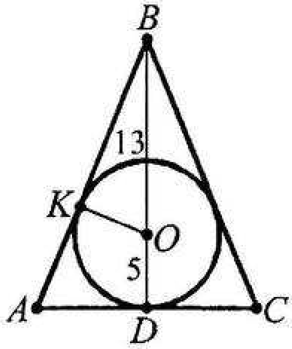
3.2. Звільнимось від ірраціональності у знаменниках дробів:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+$$

$$+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{7-5}+\ldots+\frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{121-119}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{121}-\sqrt{1}}{2}=\frac{11-1}{2}=5.$$

Відповідь: 5.



3.3. Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник ($AB = BC$), O — центр вписаного кола, BD — висота трикутника, $OD = 5$ см, $OB = 13$ см, K — точка дотику кола до бічної сторони AB, $OK = OD = 5$ см. З прямокутного трикутника BKO ($\angle K = 90°$) маємо:

$KB=\sqrt{BO^2-KO^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см).

$BD = BO + OD = 13 + 5 = 18$ (см). З подібних прямокутних трикутників ABD і OBK маємо: $AD : BD = KO : KB$; $AD : 18 = 5 : 12$;

$AD=\frac{18\cdot 5}{12}=7,5$ (см). $AC = 2AD = 15$ (см). З прямокутного трикутника ADB ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора маємо: $AD^2 + DB^2 = AB^2$;

$AB=\sqrt{AD^2+DB^2}=\sqrt{7,5^2+18^2}=\sqrt{380,25}=19,5$ (см). Тоді

$P_{ABC} = 19,5 + 19,5 + 15 = 54$ (см).

Відповідь: 54 см.

ВАРІАНТ №42

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3	X			
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6		X		
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10		X		
1.11	X			
1.12			X	

1.1. 16 год 26 хв – 9 год 52 хв = 15 год 86 хв – 9 год 52 хв = 6 год 34 хв.

1.2. $\frac{3^{\backslash 3}}{4}+\frac{1^{\backslash 2}}{6}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$.

1.6. $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

1.8. Серед шести послідовних натуральних чисел від 1 до 6 є 3 парних числа.

Шукана ймовірність дорівнює: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

1.9. Нехай менший із суміжних кутів дорівнює x, тоді більший дорівнює $4x$.
Рівняння: $x + 4x = 180°$; $5x = 180°$; $x = 36°$.

1.10. $l = (4 + 10) : 2 = 7$ (см).

1.12. Знайдемо півпериметр трикутника: $p = (13 + 14 + 15) : 2 = 21$ (см).
За формулою Герона отримаємо:
$S=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=7\cdot 4\cdot 3=84$ (дм^2).

Частина 2

2.1.	–2; –1; 1
2.2.	(2; 4)

2.3.	$\frac{127}{64}$
2.4.	21 см

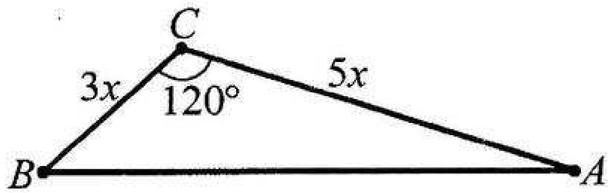
2.1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; $x^2(x + 2) - (x + 2) = 0$; $(x + 2)(x^2 - 1) = 0$;
$(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

2.2. Така точка має координати $(x; 2x)$. $10-3x=2x$; $x=2$. $y(2)=10-3\cdot 2=4$. (2; 4).

2.3. Нехай q — знаменник прогресії. Отримаємо: $q = b_3 : b_2 = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 0{,}5$;

$b_1 = b_2 : q = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$. $S_7=\frac{b_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{1\cdot\left(1-(0{,}5)^7\right)}{1-0{,}5}=\frac{127}{64}$.

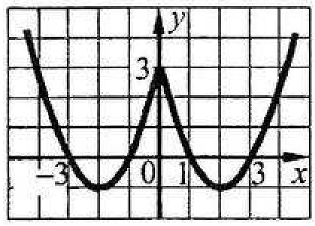
2.4. $AB^2 = 9x^2 + 25x^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5x \cdot \cos 120°$;
$AB^2 = 49x^2$; $AB = 7x$. $P = 3x + 5x + 7x = 15x$;
$15x = 45$; $x = 3$ (см). $AB = 3 \cdot 7 = 21$ (см).



3.1. Нехай перша труба може наповнити басейн за x год, наповнюючи за 1 год $\frac{1}{x}$ частину басейну. Тоді друга зможе спорожнити басейн за $(x + 3)$ год, спорожняючи за 1 год $\frac{1}{x+3}$ частину басейну. Якщо відкрити 2 труби, то за 1 год буде наповнюватись $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$ частина басейну, що становить $\frac{1}{36}$ басейну. Рівняння: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{36}$; $\frac{36(x+3)-36x-x(x+3)}{x(x+3)}=0$;

$\frac{x^2+3x-108}{x(x+3)}=0$; $x_1=-12$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=9$ (год). Отже, перша труба може наповнити басейн за 9 год, а друга спорожнити за $9 + 3 = 12$ (год).

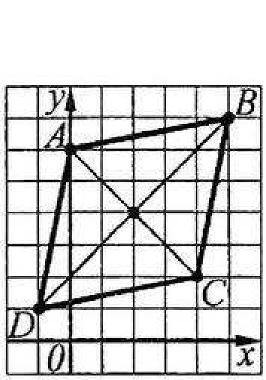
Відповідь: 9 год, 12 год.



3.2. $y=x^2-4|x|+3$. Врахувавши означення модуля, отримаємо: 1) Якщо $x \geq 0$, то $y=x^2-4x+3$ і графіком функції є частина параболи, вітки якої напрямлені вгору $(a=1>0)$.

Координати вершини дорівнюють: $x_в=\frac{-b}{2a}=2; y_в=y(2)=-1$. Частина параболи перетинає вісь x у точках з абсцисами 1 і 3, вісь ординат у точці (0; 3);
2) якщо $x < 0$, то $y=x^2+4x+3$ і графіком функції є частина параболи, вітки якої напрямлені вгору $(a=1>0)$. Координати її вершини дорівнюють:

$x_в=-\frac{b}{2a}=-2; y_в=y(-2)=-1$. Частина параболи перетинає вісь x у точках з абсцисами –3 і –1. Найменше значення функції –1.



3.3. $AB=\sqrt{(5-0)^2+(7-6)^2}=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{(4-5)^2+(2-7)^2}=\sqrt{26}$,
$CD=\sqrt{(-1-4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$, $DA=\sqrt{(0+1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{26}$.
Чотирикутник $ABCD$, у якого всі сторони рівні, — ромб.

ВАРІАНТ №43

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3		X		
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6				X
1.7		X		
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10			X	
1.11		X		
1.12				X

1.1. $35x = 2100$; $x = 2100 : 35$; $x = 60$.

1.2. $4\frac{1}{6} : 5 = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{6}$.

1.4. $(x-3)(x+4) = x^2$; $x^2 + 4x - 3x - 12 = x^2$; $x^2 + 4x - 3x - x^2 = 12$; $x = 12$.

1.5. $\frac{a^8 \cdot (a^2)^{-3}}{a^7} = \frac{a^8 \cdot a^{-6}}{a^7} = a^{8-6-7} = a^{-5}$.

1.6. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab} \cdot \frac{3a}{b-a} = -\frac{(a-b)(a+b)}{a(a+b)} \cdot \frac{3a}{a-b} = -3$.

1.8. $\frac{x^2 + 5x}{x} = 0; \frac{x(x+5)}{x} = 0$; $\begin{cases} x(x+5) = 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = -5, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $x = -5$.

1.10. За властивістю сторін описаного чотирикутника отримаємо:
$AB + CD = BC + DA$; $7 + CD = 8 + 9$; $CD = 10$ (см).

1.11. $R = 6\sqrt{2} : 2 = 3\sqrt{2}$ (см).

1.12. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin 150° = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$ (см^2).

Частина 2

2.1.	$-\frac{3}{xy}$
2.2.	$p = 2{,}5$; $x_2 = -4$

2.3.	(2; –1); (8; 11)
2.4.	10 см

2.1. $\frac{x-3}{xy - x^2} - \frac{3-y}{xy - y^2} = \frac{x-3}{x(y-x)} - \frac{3-y}{y(x-y)} = \frac{xy - 3y + 3x - xy}{xy(y-x)} = \frac{-3(y-x)}{xy(y-x)} = -\frac{3}{xy}$.

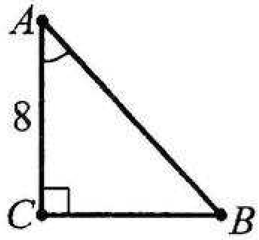
2.2. Оскільки $x_1 \cdot x_2 = -6$ і $x_1 = 1{,}5$, то $x_2 = -6 : 1{,}5 = -4$.
Тоді $p = -(x_1 + x_2) = -(1{,}5 - 4) = 2{,}5$.

2.3. $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 9, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y)^2 = 9, \\ 2x - y = 5 \,|\, \cdot(-1). \end{cases}$ 1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ -2x + y = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} -x = -2, \\ -2x + y = -5; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2, \\ -4 + y = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1; \end{cases}$ (2; –1); 2) $\begin{cases} x - y = -3, \\ -2x + y = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} -x = -8, \\ -2x + y = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8, \\ -16 + y = -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8, \\ y = 11; \end{cases}$
(8; 11).

2.4. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$; $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$; $\cos A = \dfrac{4}{5}$.

$AB = \dfrac{AC}{\cos A} = 8 : \dfrac{4}{5} = 10$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай перший робітник за планом повинен виготовити x деталей. Тоді другий — $(250 - x)$ деталей. Насправді перший виготовив $1{,}1x$ деталей, а другий — $1{,}15(250 - x)$ деталей. Рівняння:
$1{,}1x + 1{,}15(250 - x) = 280$; $-0{,}05x = -7{,}5$; $x = 150$. Отже, перший робітник повинен був виготовити 150 деталей, а другий — $250 - 150 = 100$ (дет.).
Відповідь: 150 і 100 деталей.

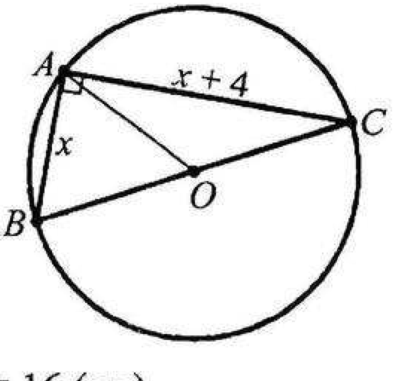
3.2. $$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt{b}\right)^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1.$$

Відповідь: 1.

3.3. Нехай задане коло O радіуса r, у якому проведено хорди AB і AC ($AB \perp AC$), $r = AO = BO = CO = 10$ см, $AC - AB = 4$ см. Нехай $AB = x$ см, тоді $AC = (4 + x)$ см. Оскільки $\angle A = 90°$, то ΔBAC — прямокутний, у якому $BC = 2OB = 2 \cdot 10 = 20$ (см). З прямокутного трикутника BAC маємо: $AB^2 + AC^2 = BC^2$; $x^2 + (4 + x)^2 = 20^2$;
$x^2 + 16 + 8x + x^2 = 400$; $x^2 + 4x - 192 = 0$; $x_1 = 12$,
$x_2 = -16$ — не підходить. Отже, $AB = 12$ см, $AC = 4 + 12 = 16$ (см).
Відповідь: 12 см, 16 см.



ВАРІАНТ №44

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2		X		
1.3				X
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6				X
1.7			X	
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10		X		
1.11		X		
1.12	X			

1.1. $2\frac{7}{8}+3\frac{5}{8}=5\frac{7+5}{8}=5\frac{12}{8}=6\frac{4}{8}=6\frac{1}{2}$.

1.2. $0,2:\frac{5}{4}=0,2:1,25=0,16=16\%$.

1.4. $(3x-2)^2+12x=9x^2-12x+4+12x=9x^2+4$.

1.5. $\sqrt{5^2}-\left(\sqrt{7}\right)^2=5-7=-2$.

1.6. $(-2)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=-2^{-3}\cdot 2^4=-2^{-3+4}=-2$.

1.8. $x^2\le 49$; $x^2-49\le 0$; $(x+7)(x-7)\le 0$; $x\in[-7;\,7]$.

1.9. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів не суміжних з ним. Отримаємо: $43°+100°=143°$.

1.10. $c=4:0,8=5$.

1.12. Довжина кола дорівнює $2\pi\cdot 6=12\pi$. Дуга становить $\pi:12\pi=\frac{1}{12}$ частину кола і її градусна міра дорівнює $360°:12=30°$.

Частина 2

2.1.	$\frac{x-1}{2(x+1)}$
2.2.	$x\in(-\infty;0)$

2.3.	3
2.4.	$p_1=-5;\ p_2=3$

2.1. $\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}\right):\frac{4x^2+4}{x^2-2x+1}=\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{4x^2+4}=$

$=\frac{x^2-2x+1+x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^2}{4x^2+4}=\frac{2x^2+2}{(x+1)}\cdot\frac{(x-1)}{4x^2+4}=\frac{2(x^2+1)}{(x+1)}\cdot\frac{(x-1)}{4(x^2+1)}=\frac{x-1}{2(x+1)}$.

2.2. $\begin{cases}\frac{x+8}{4}<2, & \cdot 4\\ 4-\frac{5+5x}{3}>1-\frac{1-x}{2}; & \cdot 6\end{cases}$ $\begin{cases}x+8<8,\\ 24-10-10x>6-3+3x;\end{cases}$ $\begin{cases}x<0,\\ -13x>-11;\end{cases}$ $\begin{cases}x<0,\\ x<\frac{11}{13};\end{cases}$

$x\in(-\infty;0)$.

2.3. $y = -2x^2 + 8x - 5$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Координати її вершини: $x = -\dfrac{8}{-4} = 2$; $y = y(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 5 = 3$. Найбільше значення функції 3.

2.4. $|\vec{a}| = 5$; $\sqrt{(p+1)^2 + (-3)^2} = 5$; $\sqrt{p^2 + 2p + 1 + 9} = 5$; $p^2 + 2p + 10 = 25$; $p^2 + 2p - 15 = 0$; $p_1 = -5$; $p_2 = 3$.

Частина 3

3.1. Нехай для перевезення 60 т вантажу потрібно x машин, на які планували навантажити по $\dfrac{60}{x}$ т. Якщо навантажити на кожну машину $\left(\dfrac{60}{x} + 1\right)$ т вантажу, то потрібно буде $(x - 2)$ машини. Рівняння: $60 = (x-2)\left(\dfrac{60}{x} + 1\right)$;

$60x = (x-2)(60+x)$; $60x = 60x + x^2 - 120 - 2x$; $x^2 - 2x - 120 = 0$; $x_1 = 12$; $x_2 = -10$ — не задовольняє умову задачі. Отже, для перевезення вантажу використали $12 - 2 = 10$ (машин).

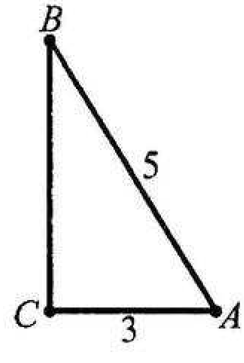
Відповідь: 10 машин.

3.2. Нехай q — знаменник прогресії. Тоді: $\begin{cases} b_2 - b_4 = 3, \\ b_3 - b_1 = -6; \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 q - b_1 q^3 = 3, \\ b_1 q^2 - b_1 = -6; \end{cases}$

$\begin{cases} b_1 q(1-q^2) = 3, \\ b_1(1-q^2) = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} q = 0,5, \\ b_1(1-q^2) = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} q = 0,5, \\ b_1 = 8. \end{cases}$ Звідси $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{8}{1-0,5} = 16$.

Відповідь: 16.

3.3. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), у якому $AB = 5$ см, $AC = 3$ см. За теоремою Піфагора маємо: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). Тоді: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$;



$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (см^2). Площі подібних фігур відносяться як квадрати відповідних сторін. Нехай найбільша сторона подібного трикутника (гіпотенуза) дорівнює x см. Маємо: $\dfrac{5^2}{x^2} = \dfrac{6}{54}$; $x^2 = \dfrac{25 \cdot 54}{6}$; $x = 15$ (см).

Відповідь: 15 см.

ВАРІАНТ №45

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3		X		
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5	X			
1.6				X
1.7				X
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9	X			
1.10		X		
1.11			X	
1.12				X

1.1. $500 \cdot 0{,}25 = 125.$

1.2. $2(-1{,}5x + 3) - 3(1{,}3 - x) = -3x + 6 - 3{,}9 + 3x = 2{,}1.$

1.5. $x^2 + 8x + 7 = 0$; $D = 64 - 4 \cdot 7 = 36$; $x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2}$; $x_1 = -7$; $x_2 = -1$.

1.6. $\frac{2a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b} = \frac{2a+b}{(a-b)(a+b)} + \frac{1^{\backslash a-b}}{a+b} = \frac{2a+b+a-b}{(a-b)(a+b)} = \frac{3a}{a^2-b^2}.$

1.7. $a_5 = a_1 + 4d = 6 + 4 \cdot (-4) = -10.$

1.10. $x^2 + x^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$; $2x^2 = 32$; $x^2 = 16$; $x = 4$ (см).

1.11. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1-(-3); -2-2)} = \overrightarrow{(2; -4)}.$

1.12. За теоремою косинусів отримаємо: $AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3\cos 120° =$
$= 25 + 9 + 30 \cdot 0{,}5 = 34 + 15 = 49$; $AC = 7$ (см).

Частина 2

2.1.	0,672
2.2.	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-5}$

2.3.	1; 2
2.4.	$C(-4; 0)$

2.1. $1{,}25^{-3} + 2{,}5^{-2} = \left(1\frac{1}{4}\right)^{-3} + \left(2\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = 0{,}8^3 + 0{,}4^2 =$
$= 0{,}512 + 0{,}16 = 0{,}672.$

2.2. $\frac{a+5\sqrt{a}}{a-25} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+5\right)}{\left(\sqrt{a}-5\right)\left(\sqrt{a}+5\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-5}.$

2.3. $-2x^2 + 5x - 2 \ge 0$; $2x^2 - 5x + 2 \le 0$; $2(x - 0{,}5)(x - 2) \le 0$; $x \in [0{,}5; 2]$. Цілими розв'язками нерівності є числа: 1; 2.

2.4. $C(x; 0)$. $CA^2 = CB^2$; $(x-1)^2 + (0-5)^2 = (x-3)^2 + (0-1)^2$; $x^2 - 2x + 1 + 25 =$
$= x^2 - 6x + 9 + 1$; $4x = -16$; $x = -4$. $C(-4; 0)$.

Частина 3

3.1. Нехай слюсар може виконати замовлення за x год, виконуючи за 1 год $\frac{1}{x}$ частину замовлення. Тоді перший учень виконає замовлення за $(x + 4)$ год, виконуючи за 1 год $\frac{1}{x+4}$ частину замовлення. Другий учень виконає замовлення за $(x + 9)$ год, виконуючи за 1 год $\frac{1}{x+9}$ частину замовлення. Оскільки слюсар може виконати замовлення за той самий час, що й два учні, які працюють разом, то: $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x}$; $\frac{x(x+9)+x(x+4)-(x+4)(x+9)}{x(x+4)(x+9)}=0$;

$\frac{x^2-36}{x(x+4)(x+9)}=0$; $x_1=-6$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=6$. Отже, перший учень виконає замовлення за $6 + 4 = 10$ (год), а другий — за $6 + 9 =$ $=15$ (год).

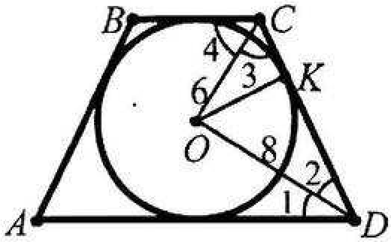
Відповідь: 6 год, 10 год, 15 год.

3.2. $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{3x}{x}$; $y=\sqrt{4-x^2}+3$, де $x\neq 0$. Підкореневий вираз $4-x^2$ для даної функції може набирати значень [0; 4). Тому $0\leq 4-x^2<4$;

$0\leq\sqrt{4-x^2}<2$; $3\leq\sqrt{4-x^2}+3<5$. Областю значень функції є проміжок [3; 5).

Відповідь: [3; 5).

3.3. Нехай $ABCD$ ($AD||BC$) — задана рівнобічна трапеція, O — центр вписаного в трапецію кола, K — точка дотику кола до сторони CD, $CO = 6$ см, $OD = 8$ см. Центр кола O — точка перетину бісектрис кутів трапеції. Отже, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Оскільки



$\angle D + \angle C = 180°$, то $\angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2}\cdot 180° = 90°$. Звідси трикутник CDO — прямокутний ($\angle O = 180° - 90° = 90°$) і OK — його висота. З ΔCOD за теоремою Піфагора $CD^2 = CO^2 + OD^2$; $CD^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $CD = 10$ (см).

$S_{COD}=\frac{1}{2}OK\cdot CD=\frac{1}{2}OC\cdot OD$; $r=OK=\frac{OC\cdot OD}{CD}=\frac{6\cdot 8}{10}=4{,}8$ (см). Тоді

$l = 2\pi r = 9{,}6\pi$ (см).

Відповідь: $9{,}6\pi$ см.

ВАРІАНТ №46

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1				X
1.2			X	
1.3		X		
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6	X			
1.7		X		
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10				X
1.11		X		
1.12	X			

1.1. $432 \cdot 48 - 38 \cdot 432 = 432 \cdot (48 - 38) = 432 \cdot 10 = 4320.$

1.5. $\frac{7^{\backslash y}}{x} - \frac{5^{\backslash x}}{y} = \frac{7y - 5x}{xy}.$

1.6. $-2x^2 + 3x - 1 = 0;\ 2x^2 - 3x + 1 = 0;\ D = 9 - 4 \cdot 2 = 1;\ \ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2};\ \ x_1 = \frac{1}{2},$
$x_2 = 1.$

1.7. $-3x - 15 < 0; -3x < 15; x > -5; x \in (-5; +\infty).$

1.8. $S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot (-2)}{2} \cdot 5 = -5.$

1.9. Нехай одна частина відрізка дорівнює $5x$, тоді інша дорівнює $2x$.
Рівняння: $5x + 2x = 70$; $7x = 70$; $x = 10$. $5x = 50$ (см), $2x = 20$ (см).

1.10. $\angle ABC = 2\angle ABD = 2 \cdot 75° = 150°.$

1.11. За теоремою синусів $\frac{MK}{\sin\angle N} = \frac{MN}{\sin\angle K}$; $MN = \frac{MK\sin\angle K}{\sin\angle N} =$
$= \frac{6 \cdot \sin 45°}{\sin 60°} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$

Частина 2

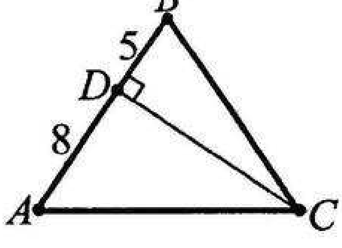
2.1.	3
2.2.	6,5
2.3.	4 червоні кульки
2.4.	78 см^2

2.1. $5\sqrt{8x - 20} - 10 = 0;\ 5\sqrt{8x - 20} = 10;\ \sqrt{8x - 20} = 2;\ 8x - 20 = 4;\ 8x = 24;\ x = 3.$

2.2. Отримаємо: $y = ax^2 + 5x - 7$; $9 = 4a - 10 - 7$; $4a = 26$; $a = 6{,}5$.

2.3. Нехай у коробці є x червоних кульок, тоді всіх кульок є $x + 16$. Рівняння:
$\frac{x}{x + 16} = \frac{1}{5}$; $5x = x + 16$; $4x = 16$; $x = 4$. У коробці є 4 червоні кульки.

2.4. $BC = AB = 8 + 5 = 13$ (см). З прямокутного ΔCDB:
$CD = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ (см). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DC =$
$= \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78$ (см^2).



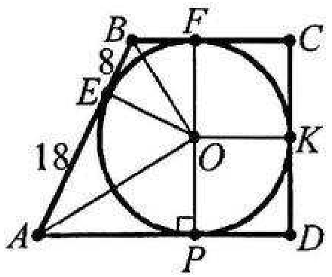
3.1. Нехай x км/год — швидкість поїзда за розкладом, тоді час його руху має бути $\frac{180}{x}$ год. Збільшена швидкість руху поїзда — $(x + 5)$ км/год. Час його руху з цією швидкістю $\frac{180}{x+5}$ год, що на 24 хв = $\frac{2}{5}$ год менше, ніж за розкладом. Рівняння: $\frac{180}{x}-\frac{180}{x+5}=\frac{2}{5}$; $\frac{900(x+5)-900x-2x(x+5)}{5x(x+5)}=0$;

$\frac{-2x^2-10x+4500}{5x(x+5)}=0$; $\frac{x^2+5x-2250}{5x(x+5)}=0$; $x_1=-50$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=45$ (км/год).

Відповідь: 45 км/год.

3.2. $(a + b + c)(a - b + c) = ((a+c)+b)((a+c)-b)=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$.

Отже, $a^2 + 2ac - b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Звідси $b^2 = ac$ і $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$. Тобто a, b, c — послідовні члени геометричної прогресії.



3.3. Нехай $ABCD$ ($AD \| BC$, $CD \perp AD$) — задана прямокутна трапеція, у яку вписано коло з центром O; E, F, K і P — точки дотику кола до сторін трапеції (див. рис.), $AE = 18$ см, $EB = 8$ см. Нехай AO і BO — бісектриси кутів A та B трапеції. Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle OAB + \angle OBA = 180° : 2 = 90°$ як сума половин кутів A та B. Тоді $\angle AOB = 180° - 90° = 90°$ і трикутник AOB — прямокутний, а OE — висота, проведена до гіпотенузи. Маємо: $OE^2 = AE \cdot BE$,

$OE=\sqrt{18\cdot 8}=$ 12 (см) — радіус вписаного кола. Маємо:

$CD = 2 \cdot 12 = 24$ (см). $FC = PD = 12$ см, $BF = BE = 8$ см. $AP = AE = 18$ см.

Отже $AD = 18 + 12 = 30$ (см), $BC = 8 + 12 = 20$ (см). $AB = 18 + 8 = 26$ (см).

$P_{тр.} = AD + DC + CB + BA = 30 + 24 + 20 + 26 = 100$ (см).

Відповідь: 100 см.

ВАРІАНТ №47

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2			X	
1.3				X
1.4			X	

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6				X
1.7				X
1.8			X	

	А	Б	В	Г
1.9			X	
1.10		X		
1.11				X
1.12	X			

1.1. $\frac{1}{2}$ т + 150 кг = 500 кг + 150 кг = 650 кг.

1.2. $9-4\frac{2}{5}=8\frac{5}{5}-4\frac{2}{5}=4\frac{3}{5}$.

1.3. $(a+3)(b-4)=ab-4a+3b-12$.

1.6. $\frac{8}{\sqrt{3}-1}=\frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{8(\sqrt{3}+1)}{3-1}=4(\sqrt{3}+1)$.

1.8. 1725 – 1500 = 225 (грн) — приріст грошей через рік; 225 : 1500 = 0,15 = 15%.

1.9. Кут, суміжний з кутом 110° дорівнює: 180° – 110° = 70°.

1.10. Сума основ рівнобічної трапеції дорівнює: 48 – 2 · 6 = 36 (см). Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює: 36 : 2 = 18 (см).

1.11. $S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ=20\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=10\sqrt{3}$ (см^2).

1.12. $\begin{cases}y-x=2,\\x+y=4;\end{cases}\begin{cases}2y=6,\\x+y=4;\end{cases}\begin{cases}y=3,\\x+3=4;\end{cases}\begin{cases}y=3,\\x=1.\end{cases}$ $M(1;\,3)$.

Частина 2

2.1.	$x_1=3;\ x_2=-4$
2.2.	$b=-2;\ k=0$

2.3.	$\frac{9}{110}$
2.4.	13 см

2.1. $\frac{6}{1+x}+\frac{x}{x-2}=\frac{6}{1+x}\cdot\frac{x}{x-2}$; $\frac{6(x-2)+x(1+x)}{(1+x)(x-2)}=\frac{6x}{(1+x)(x-2)}$;

$\frac{6x-12+x+x^2-6x}{(1+x)(x-2)}=0$; $\begin{cases}x^2+x-12=0,\\(1+x)(x-2)\neq 0;\end{cases}$ $x_1=3;\ x_2=-4$.

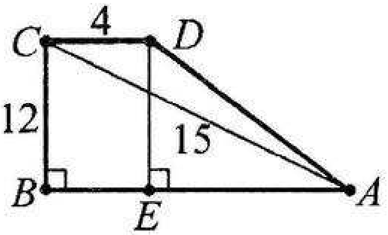
2.2. Якщо графік функції $y=kx+b$ паралельний осі абсцис, то $k=0$. Координати точки $B(3;\,-2)$ задовольняють рівняння прямої $y=b$: $-2=0\cdot 3+b$. Отже, $b=-2$.

2.3. $0,2(3)=0,2+0,03+0,003+...=0,2+\frac{0,03}{1-0,1}=0,2+\frac{0,03}{0,9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30}$.

$0,(15)=0,15+0,0015+...=\frac{0,15}{1-0,01}=\frac{0,15}{0,99}=\frac{15}{99}=\frac{5}{33}$;

$0{,}2(3) - 0{,}(15) = \frac{7}{30} - \frac{5}{33} = \frac{7 \cdot 11 - 5 \cdot 10}{330} = \frac{27}{330} = \frac{9}{110}.$

2.4. З ΔABC: $AB = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$ (см).
$BE = 4$ см. $EA = AB - BE = 9 - 4 = 5$ (см). $DE = 12$ см.
З ΔAED: $DA = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай швидкість течії x км/год. Тоді швидкість човна проти течії $(15 - x)$ км/год. Час руху човном — $\frac{18}{15 - x}$ год, а час руху плотом — $\frac{18}{x}$ год. Оскільки човном турист плив на 4,5 год менше, ніж плотом, то:

$\frac{18}{x} - \frac{18}{15 - x} = \frac{9}{2}$; $\frac{36(15 - x) - 36x - 9x(15 - x)}{2x(15 - x)} = 0$; $\frac{9x^2 - 207x + 540}{x(15 - x)} = 0$;

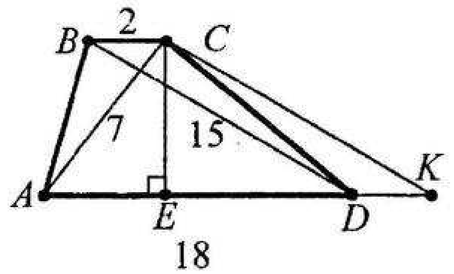
$\frac{x^2 - 23x + 60}{x(15 - x)} = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 20$ — не задовольняє умову задачі, оскільки ця швидкість більша за швидкість човна. *Відповідь*: 3 км/год.

3.2. $a_1 = -15{,}1$, $a_2 = -14{,}4$. Отже, $d = a_2 - a_1 = -14{,}4 - (-15{,}1) = 0{,}7$. Знайдемо найменший додатній та найбільший від'ємний член даної прогресії.
$a_n = a_1 + d(n - 1) = -15{,}1 + 0{,}7(n - 1)$. Якщо $a_n > 0$, то $-15{,}1 + 0{,}7(n - 1) > 0$,

$0{,}7n > 15{,}8$; $n > 22\frac{4}{7}$. $a_{23} = -15{,}1 + 0{,}7(23 - 1) = 0{,}3$. Тоді $a_{22} = a_{23} - 0{,}7 = -0{,}4$.

Оскільки $|0{,}3| < |-0{,}4|$, то найменший за модулем член арифметичної прогресії 0,3. *Відповідь:* 0,3.

3.3. Нехай $ABCD$ — задана трапеція ($AD \| BC$), $BC = 2$ см, $AD = 18$ см, CE — її висота, $AC = 7$ см, $BD = 15$ см — діагоналі. Проведемо $CK \| BD$, тоді $BCKD$ — паралелограм, $BC = DK = 2$ см, $BD = CK = 15$ см, $AK = AD + DK = 18 + 2 = 20$ (см). $S_{\text{тр.}} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{AK}{2} \cdot CE =$



$= \frac{1}{2} AK \cdot CE = S_{\Delta ACK}$. За формулою Герона $S_\Delta = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, де

$p = \frac{7 + 15 + 20}{2} = 21$ (см) маємо: $S_{\text{тр.}} = S_{\Delta ABE} = \sqrt{21(21 - 7)(21 - 15)(21 - 20)} =$

$= \sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 1} = 42$ (см^2).

Відповідь: 42 см^2.

ВАРІАНТ №48

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2			X	
1.3				X
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5		X		
1.6			X	
1.7				X
1.8	X			

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10	X			
1.11				X
1.12				X

1.2. $\frac{2}{5}:\frac{1}{10}=\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{1}=4.$

1.4. $(a^2-2b)(b-3a^2)=a^2b-3a^4-2b^2+6a^2b=-3a^4+7a^2b-2b^2.$

1.5. $2^6\cdot 2^{-8}+2=2^{-2}+2=\frac{1}{4}+2=2\frac{1}{4}.$

1.6. $\frac{a+2}{a-2}:\frac{a^2+4a+4}{3a-6}=\frac{a+2}{a-2}\cdot\frac{3a-6}{a^2+4a+4}=\frac{a+2}{a-2}\cdot\frac{3(a-2)}{(a+2)^2}=\frac{3}{a+2}.$

1.8. $y=2x^2+12x-5.\ x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-12}{4}=-3.$ Функція набуває найменшого значення при $x=-3$.

1.10. $360°:3=120°.$

1.11. Сума внутрішніх кутів шестикутника дорівнює $180°\cdot 6-360°=720°$. Міра внутрішнього кута шестикутника дорівнює $720°:6=120°$.

1.12. $S=\frac{1}{2}Pr=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 3=60$ (см^2).

Частина 2

2.1.	$\frac{3}{a+2}$
2.2.	$-\frac{1}{3}(x-3)(x+6)$

2.3.	$(-1;-2);(1;2)$
2.4.	16 см

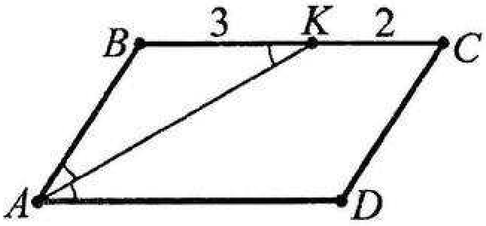
2.1. $\frac{12-6a+3a^2}{a^3+8}=\frac{3(a^2-2a+4)}{(a+2)(a^2-2a+4)}=\frac{3}{a+2}.$

2.2. $-\frac{1}{3}x^2-x+6=-\frac{1}{3}(x^2+3x-18)=-\frac{1}{3}(x-3)(x+6).$

2.3. $\begin{cases}y^2-xy=2, \mid\cdot 3\\2y^2+3xy=14;\end{cases}\begin{cases}3y^2-3xy=6,\\2y^2+3xy=14;\end{cases}\begin{cases}5y^2=20,\\2y^2+3xy=14;\end{cases}\begin{cases}y^2=4,\\2y^2+3xy=14.\end{cases}$

1) $\begin{cases}y_1=-2,\\8-6x=14;\end{cases}\begin{cases}y_1=-2,\\-6x=6;\end{cases}\begin{cases}y_1=-2,\\x_1=-1;\end{cases}$ $(-1;-2)$; 2) $\begin{cases}y_2=2,\\8+6x=14;\end{cases}\begin{cases}y_2=2,\\6x=6;\end{cases}\begin{cases}y_2=2,\\x_2=1;\end{cases}$ $(1;2)$.

2.4. $\angle BAK = \angle KAD$, $\angle BKA = \angle KAD$ як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK. Отже, $\angle BKA = \angle BAK$ і ΔABK — рівнобедрений, $AB = 3$ см.
$BC = BK + KC = 3 + 2 = 5$ (см).
$P = 2(AB + BC) = 2(3 + 5) = 16$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай маса початкового сплаву була x кг. Тоді вміст міді у початковому сплаві $\dfrac{2}{x}$. Оскільки до сплаву додали 6 кг міді, то її у сплаві стало $2 + 6 = 8$ (кг), а загальна маса нового сплаву стала $(x + 6)$ кг. Вміст міді у новому сплаві $\dfrac{8}{x+6}$, що на 30 % більше, ніж $\dfrac{2}{x}$. Звідки: $\dfrac{8}{x+6} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{10}$;

$$\frac{80x - 20(x+6) - 3x(x+6)}{10x(x+6)} = 0; \quad \frac{-3x^2 + 42x - 120}{x(x+6)} = 0; \quad \frac{x^2 - 14x + 40}{x(x+6)} = 0;$$

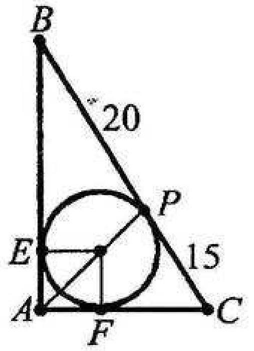
$x_1 = 4$, $x_2 = 10$. *Відповідь*: 4 кг або 10 кг.

3.2. $\begin{cases} 3xy + y = 7, \\ 3xy - x = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} 3xy + y = 7, \\ -3xy + x = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} 3xy + y = 7, \\ x + y = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 3(3-y)y + y = 7, \\ x = 3 - y; \end{cases}$

$\begin{cases} 3y^2 - 10y + 7 = 0, \\ x = 3 - y; \end{cases}$ $\begin{cases} (3y-7)(y-1) = 0, \\ x = 3 - y; \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = \dfrac{7}{3}, \\ x = 3 - y; \end{cases}$ або $\begin{cases} y_2 = 1, \\ x = 3 - y. \end{cases}$

Звідки: $\begin{cases} y_1 = 2\dfrac{1}{3}, \\ x_1 = \dfrac{2}{3}; \end{cases}$ або $\begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$ *Відповідь:* $\left(\dfrac{2}{3}; 2\dfrac{1}{3}\right)$, $(2; 1)$.

3.3. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник ($\angle A = 90°$), у якому AP — бісектриса, $BP = 20$ см, $PC = 15$ см. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам:
$AC : AB = CP : PB = 15 : 20 = 3 : 4$. Нехай $AC = 3x$ см, тоді $AB = 4x$ см. За теоремою Піфагора, $BC^2 = AB^2 + AC^2$;
$(20 + 15)^2 = 9x^2 + 16x^2$; $25x^2 = 1225$; $x^2 = 49$; $x_1 = 7$, $x_2 = -7$ — не підходить. Тому $AC = 3 \cdot 7 = 21$ (см), $AB = 4 \cdot 7 = 28$ (см).



$S = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC$; $S = pr$, де $p = \dfrac{35 + 21 + 28}{2} = 42$ (см), r — радіус вписаного кола, звідки $r = \dfrac{AB \cdot AC}{2p} = \dfrac{28 \cdot 21}{2 \cdot 42} = 7$ (см). *Відповідь:* 7 см.

ВАРІАНТ №49

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2			X	
1.3		X		
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6		X		
1.7				X
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10				X
1.11			X	
1.12				X

1.2. 6,4 см · 2 000 000 = 12 800 000 см = 128 000 м = 128 км.

1.5. $-\sqrt{16}+\sqrt{81}-\sqrt{121}=-4+9-11=-6.$

1.7. 5000 · 0,15 = 750 (грн).

1.10. $AB=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{85}.\ \cos A=\dfrac{6}{\sqrt{85}}.$

1.12. Площа круга дорівнює: $\pi\cdot 5^2=25\pi$ (см^2). $S_{сек.}=S_{кр}\cdot\dfrac{72}{360}=25\pi\cdot\dfrac{72}{360}=5\pi(\text{см}^2)$.

Частина 2

2.1.	4
2.2.	–1

2.3.	–1
2.4.	6 см

2.1. $\left(\dfrac{x}{xy-y^2}-\dfrac{y}{x^2-xy}\right):\dfrac{x+y}{4xy}=\left(\dfrac{x}{y(x-y)}-\dfrac{y}{x(x-y)}\right):\dfrac{x+y}{4xy}=\dfrac{x^2-y^2}{xy(x-y)}\cdot\dfrac{4xy}{x+y}=4.$

2.2. $\begin{cases}3-5(2x+1)>7x-2(x+1),\\6(1+x)+2>3(1-x)+7x;\end{cases}$ $\begin{cases}3-10x-5>7x-2x-2,\\6+6x+2>3-3x+7x;\end{cases}$ $\begin{cases}-10x-2>5x-2,\\6x+8>4x+3;\end{cases}$

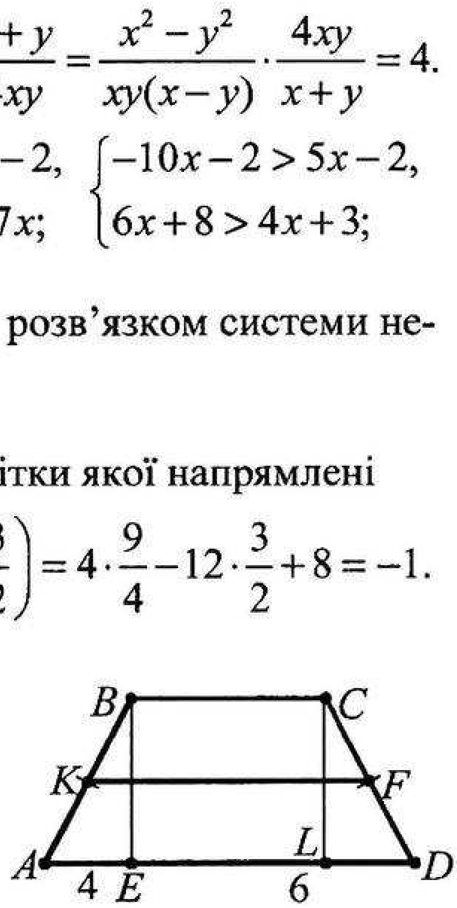
$\begin{cases}-15x>0,\\2x>-5;\end{cases}$ $\begin{cases}x<0,\\x>-2,5;\end{cases}$ $-2,5<x<0$. Найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей є -1.

2.3. $y=4x^2-12x+8$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Координати її вершини: $x=\dfrac{12}{2\cdot 4}=\dfrac{3}{2};\ \ y=y\left(\dfrac{3}{2}\right)=4\cdot\dfrac{9}{4}-12\cdot\dfrac{3}{2}+8=-1.$

Найменше значення функції: –1.

2.4. $AB=CD$. $AD=AE+ED=4+6=10$ (см). $LD=AE=4$ см. $EL=BC=ED-LD=6-4=2$ (см).

$KF=\dfrac{AD+BC}{2}=\dfrac{10+2}{2}=6$ (см).



3.1. Будемо вважати, що 18 км/год — це швидкість човна відносно води (власна швидкість). Нехай човен наздожене пліт через x год після того, як човен відплив. Пліт до зустрічі плив $(x + 9)$ год і мав швидкість $\frac{20}{x+9}$ (км/год). Тоді швидкість човна за течією $\left(18+\frac{20}{x+9}\right)$ км/год і він за x год проплив 20 км:

$x\left(18+\frac{20}{x+9}\right)=20;$ $x\cdot\frac{9(x+9)+10}{x+9}=10.$ Оскільки $x + 9 > 0$, то

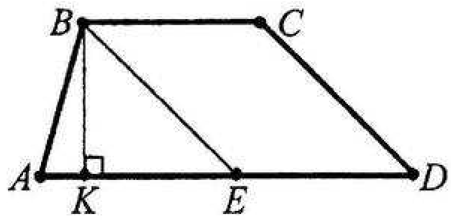
$9x^2+91x=10(x+9);$ $9x^2+81x-90=0;$ $x^2+9x-10=0;$ $x_1=-10$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=1.$ $18 + 1 = 19$ (год). *Відповідь*: О 19 год.

3.2. $\begin{cases} x^2+x-6\ge 0, \\ x(x-1)-(x+1)^2\le 8; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x+3)\ge 0, \\ x^2-x-x^2-2x-1\le 8; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x+3)\ge 0, \\ -3x\le 9; \end{cases}$

$\begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty), \\ x\ge -3; \end{cases}$ $x\in\{-3\}\cup[2;+\infty).$

Відповідь: $\{-3\}\cup[2;+\infty).$

3.3. Нехай $ABCD$ ($AD\|BC$) — задана трапеція, $AD = 14$ см, $BC = 10$ см, $AB = 13$ см, $CD = 15$ см. Проведемо $BE\|CD$, тоді $BCDE$ — паралелограм, $BE = CD = 15$ см, $ED = BC = 10$ см, $AE = AD - ED =$ $= 14 - 10 = 4$ (см). Знайдемо висоту BK трикутника



ABE за його площею. За формулою Герона маємо: $p=\frac{13+15+4}{2}=16$ (см),

$S_{\Delta ABE}=\sqrt{16(16-13)(16-15)(16-4)}=\sqrt{16\cdot 3\cdot 1\cdot 12}=4\cdot 6=24$ (см^2).

$S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}AE\cdot BK;$ $BK=2S_{\Delta ABE}:AE;$ $BK=2\cdot 24:4=12$ (см).

$S_{тр.}=\frac{AD+BC}{2}\cdot BK=\frac{14+10}{2}\cdot 12=144$ (см^2).

Відповідь: 144 см^2.

ВАРІАНТ №50

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3			X	
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10				X
1.11			X	
1.12				X

1.1. $23{,}8 - (3{,}45 + 2{,}17) = 23{,}8 - 5{,}62 = 18{,}18.$

1.4. $-2(x - 1{,}5) = -3;\ x - 1{,}5 = 1{,}5;\ x = 3.$

1.6. $\dfrac{2x+1}{x-3} - \dfrac{2x+3}{3-x} = \dfrac{2x+1}{x-3} + \dfrac{2x+3}{x-3} = \dfrac{2x+1+2x+3}{x-3} = \dfrac{4x+4}{x-3}.$

1.7. $b_1 = 3;\ b_2 = 3 \cdot (-2) = -6;\ b_3 = -6 \cdot (-2) = 12;\ b_4 = 12 \cdot (-2) = -24;\ b_1 = -24 \cdot (-2) = 48.\ S_5 = 3 - 6 + 12 - 24 + 48 = 33.$

1.8. $4 - 2x > 0;\ -2x > -4;\ x < 2.\ x \in (-\infty; 2).$

1.9. $\angle OAM = 90° - 75° = 15°;\ \angle MAN = 2 \cdot 15° = 30°.$

1.10. $c = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$ (см).

1.11. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

1.12. За теоремою синусів $\dfrac{MN}{\sin\angle P} = \dfrac{NP}{\sin\angle M}$; $\sin\angle M = \dfrac{NP\sin\angle P}{MN} = \dfrac{4\sqrt{3}\cdot\sin 45°}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Оскільки трикутник гострокутний, то $\angle M = 60°$.

Частина 2

2.1.	$\dfrac{y-x}{xy}$	**2.3.**	2; 3; 4
2.2.	$-\sqrt{3}$	**2.4.**	6 см

2.1. $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1}) = \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{y^2 - x^2}{x^2y^2} : \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2} \cdot \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{y-x}{xy}.$

2.2. Якщо $b < 0$, то: $\dfrac{1}{3}b\sqrt{\dfrac{27}{b^2}} = -\sqrt{\dfrac{27b^2}{9b^2}} = -\sqrt{3}$.

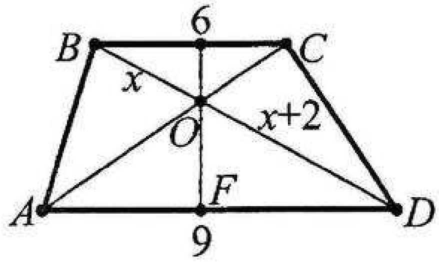
2.3. $\begin{cases} 2x - 9 < 0, \\ 4x^2 - 4x - 3 \ge 0; \end{cases} \begin{cases} x < 4{,}5, \\ 4(x+0{,}5)(x-1{,}5) \ge 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; 4{,}5), \\ x \in (-\infty; -0{,}5] \cup [1{,}5; +\infty); \end{cases}$

$x \in (-\infty; -0{,}5] \cup [1{,}5; 4{,}5)$. Натуральними розв'язками будуть: 2, 3, 4.

2.4. $BO = x$ см, $DO = (x + 2)$ см. $\Delta BCO \sim \Delta DAO$.

$\frac{BC}{BO} = \frac{AD}{OD}$; $\frac{6}{x} = \frac{9}{x+2}$; $6(x + 2) = 9x$; $3x = 12$; $x = 4$.

$BO = 4$ см, $DO = 4 + 2 = 6$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай один робітник сам може виконати завдання за x год, виконуючи за 1 год $\frac{1}{x}$ частину завдання. Тоді інший — за $(x + 6)$ год, виконуючи за 1 год $\frac{1}{x+6}$ частину завдання. Рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$; $\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0$;

$\frac{x^2-2x-24}{x(x+6)}=0$; $\begin{cases} x^2-2x-24=0, \\ x(x+6)\neq 0; \end{cases}$ $x_1=-4$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=6$. Отже, один робітник може виконати завдання за 6 год, а інший — за $6 + 6 = 12$ (год).

Відповідь: 6 год; 12 год.

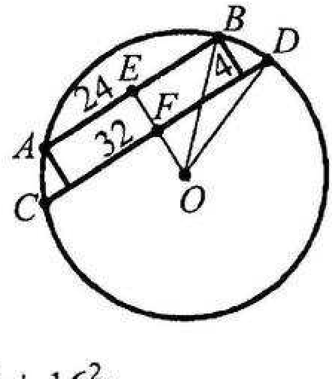
3.2. $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(a\sqrt{a}-1)}{a+\sqrt{a}+1}}+\sqrt{a}=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)\left((\sqrt{a})^3-1\right)}{a+\sqrt{a}+1}}+\sqrt{a}=$

$=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{a+\sqrt{a}+1}}+\sqrt{a}=\sqrt{(\sqrt{a}-1)^2}+\sqrt{a}=\left|\sqrt{a}-1\right|+\sqrt{a}$.

Якщо $a = 0{,}97$, то $\sqrt{a}<1$ і $\left|\sqrt{a}-1\right|+\sqrt{a}=-(\sqrt{a}-1)+\sqrt{a}=1$.

Відповідь: 1.

3.3. Нехай задане коло O, у якому проведено хорди AB і CD, $AB = 24$ см, $CD = 32$ см, $EF = 4$ см. Проведемо $OE \perp CD$. $AE = EB = 12$ (см), $CF = FD = 16$ (см). Трикутники OBE і ODF прямокутні, до того ж гіпотенузи $OB = OD = r$. Нехай $OF = x$ см, тоді $OE = EF + x = (4 + x)$ см. З прямокутного трикутника OEB за теоремою Піфагора $OB^2 = OE^2 + BE^2$; $r^2 = (4 + x)^2 + 12^2$. Аналогічно $OD^2 = OF^2 + FD^2$; $r^2 = x^2 + 16^2$. $(4 + x)^2 + 12^2 = x^2 + 16^2$; $16 + 8x + x^2 + 144 = x^2 + 256$; $8x = 96$; $x = 12$.



Тоді $r=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{400}=20$ (см).

Відповідь: 20 см.

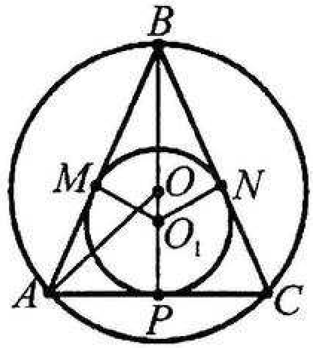
4.1. $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$. Нехай $\left(x+\frac{1}{x}\right)=t$, тоді $t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+1$;

$7t-2\left(t^2-2\right)=9; -2t^2+7t-5=0; t_1=2,5; t_2=1$. Тепер:

1) $x+\frac{1}{x}=2,5; \frac{x^2-2,5x+1}{x}=0; x_1=0,5; x_2=2;$

2) $x+\frac{1}{x}=1; \frac{x^2-x+1}{x}=0; x\in\varnothing$. Звідси $x_1=0,5; x_2=2$.

Відповідь: 0,5; 2.



4.2. Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник, у якому $AB=BC=2AC$, O — центр описаного кола, $R=OA=8$ см, O_1 — центр вписаного кола. Нехай $AC=x$, тоді $AB=BC=2x$.

Площа трикутника: $S=\frac{abc}{4R}=\frac{2x\cdot 2x\cdot x}{4\cdot 8}=\frac{x^3}{8}$ (см^2). BP — висота рівнобедреного трикутника ABC. З ΔBPC ($\angle P=90°$):

$H=BP=\sqrt{BC^2-PC^2}=\sqrt{(2x)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{x\sqrt{15}}{2}$ (см). Площа трикутника:

$S=\frac{1}{2}AC\cdot BP=\frac{1}{2}x\cdot\frac{x\sqrt{15}}{2}=\frac{x^2\sqrt{15}}{4}$ (см^2). Маємо: $\frac{x^3}{8}=\frac{x^2}{4}\sqrt{15}$, звідки

$x=2\sqrt{15}$ (см). Отже, площа трикутника ABC: $S=\frac{\left(2\sqrt{15}\right)^2}{4}\sqrt{15}=15\sqrt{15}$ (см^2),

півпериметр: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{2x+2x+x}{2}=\frac{5}{2}x=\frac{5}{2}\cdot 2\sqrt{15}=5\sqrt{15}$ (см). Щоб знайти радіус вписаного кола, використаємо формулу: $S=p\cdot r$, звідки $r=\frac{S}{p}$.

Отже, $r=\frac{15\sqrt{15}}{5\sqrt{15}}=3$ (см).

Відповідь: 3 см.

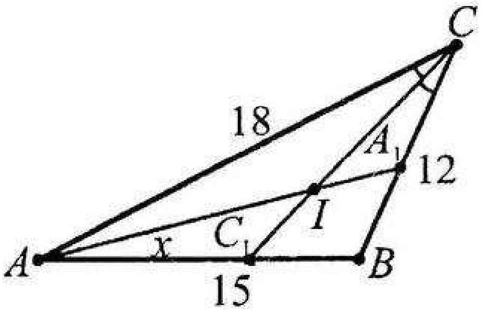
4.1. Нехай b_1 — перший член даної геометричної прогресії. Оскільки $|q|<1$, то $\frac{b_1}{1-q}=4$. Так як $b_{n+1}=b_n\cdot q$, то $b_{n+1}^3=b_n^3\cdot q^3$ і послідовність кубів членів даної геометричної прогресії також геометрична прогресія з першим членом b_1^3 та знаменником q^3, причому $\left|q^3\right|<1$. Отже, $\frac{b_1^3}{1-q^3}=192$. Система:

$$\begin{cases}\frac{b_1}{1-q}=4,\\ \frac{b_1^3}{1-q^3}=192;\end{cases}\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ \frac{\left(4(1-q)\right)^3}{1-q^3}=192;\end{cases}\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ \frac{(1-q)^3}{(1-q)\left(1+q+q^2\right)}=3;\end{cases}\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ (1-q)^2=3\left(1+q+q^2\right);\end{cases}$$

$$\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ 1-2q+q^2=3+3q+3q^2;\end{cases}\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ 2q^2+5q+2=0;\end{cases}\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ q_1=-2, q_2=-0,5.\end{cases}$$ $q_1=-2$ — не задовольняє умову задачі, $q_2=-0,5$.

Відповідь: –0,5.

4.2. За властивістю бісектриси трикутника $\frac{AC}{AC_1}=\frac{BC}{BC_1}$. Нехай $AC_1=x$, тоді $BC_1=15-x$. Тоді маємо: $\frac{18}{x}=\frac{12}{15-x}$; $18(15-x)=12x$; $x=9$ (см). У ΔACC_1 AI — бісектриса, тому $\frac{CI}{IC_1}=\frac{AC}{AC_1}=\frac{18}{9}=2$.



Відповідь: 2.

4.1. Проведемо перетворення, застосовуючи умову $a + b = 1$.

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{a}{(b-1)\left(b^2+b+1\right)}-\frac{b}{(a-1)\left(a^2+a+1\right)}=$$

$$=\frac{a}{-a\left(b^2+b+1\right)}-\frac{b}{-b\left(a^2+a+1\right)}=\frac{-1}{b^2+b+1}+\frac{1}{a^2+a+1}=$$

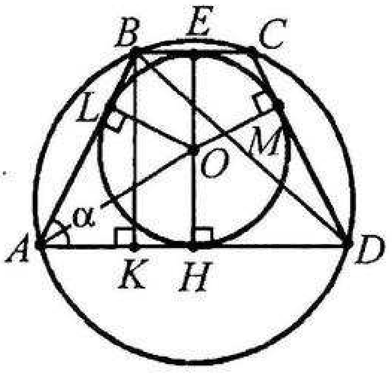
$$=\frac{-\left(a^2+a+1\right)+b^2+b+1}{\left(b^2+b+1\right)\left(a^2+a+1\right)}=\frac{-a^2-a-1+b^2+b+1}{b^2a^2+b^2a+b^2+ba^2+ba+b+a^2+a+1}=$$

$$=\frac{b^2-a^2+b-a}{b^2a^2+b^2+\left(ba^2+b^2a\right)+ba+a^2+a+b+1}=\frac{(b-a)(b+a)+b-a}{b^2a^2+b^2+ba(a+b)+ba+a^2+a+b+1}=$$

$$=\frac{(b-a)\cdot 1+b-a}{b^2a^2+\left(b^2+2ba+a^2\right)+(a+b)+1}=\frac{2(b-a)}{b^2a^2+(b+a)^2+(a+b)+1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

Що й треба було довести.

4.2. Нехай $ABCD$ — задана рівнобічна трапеція ($AD \parallel BC$), $AB = CD$, $\angle BAD = \alpha$. Позначимо радіус описаного кола через R, а радіус вписаного кола — r.



$BK = 2r$. З ΔAKB ($\angle K = 90°$): $AB = \dfrac{BK}{\sin\alpha} = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$.

$KD = KH + HD$; $HD = DM$ (як відрізки дотичних, проведених з однієї точки). Аналогічно $CE = CM$.

$EC = BE = KH$. Отже, $KD = CD = AB = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$. З ΔBKD ($\angle K = 90°$) за теоремою Піфагора: $BD^2 = BK^2 + KD^2$;

$$BD^2=(2r)^2+\left(\frac{2r}{\sin\alpha}\right)^2=4r^2\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)=4r^2\,\frac{\sin^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}.$$ Таким чином,

$BD=\dfrac{2r}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. З ΔABD за наслідком з теореми синусів маємо:

$R=\dfrac{BD}{2\sin\alpha}=\dfrac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. Отже, $\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$.

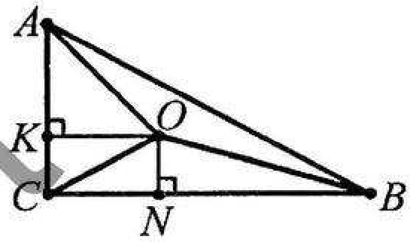
Відповідь: $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$.

ВАРІАНТ №4 *Частина 4*

4.1. Оскільки $x > 2\sqrt{2}$, то $\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}} - \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}} = \dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2}} -$

$- \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{2}} - \sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-8}}$. При $x = 3$ маємо: $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3^2-8}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 2.$

Відповідь: 2.



4.2. $S_{AOC} = S_{AOB} = S_{BOC}$. Нехай $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ab$. Оскільки $S_{AOC} = S_{AOB} = S_{BOC}$, то $S_{AOC} =$

$= S_{COB} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$, $S_{AOC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot OK = \dfrac{1}{2}b \cdot OK = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}ab$.

Отже, $OK = \dfrac{a}{3}$. Аналогічно $ON = \dfrac{b}{3}$. З ΔAKO ($\angle K = 90°$, $AK = AC - KC = AC -$ $- ON = b - \dfrac{b}{3} = \dfrac{2}{3}b$) за теоремою Піфагора: $OA^2 = OK^2 + AK^2 =$

$= \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}b\right)^2 = \dfrac{1}{9}\left(a^2+4b^2\right)$. Аналогічно з ΔONB ($\angle N = 90°$,

$NB = a - \dfrac{a}{3} = \dfrac{2}{3}a$) за теоремою Піфагора: $OB^2 = \dfrac{1}{9}\left(4a^2+b^2\right)$. З ΔCNO

($\angle N = 90°$): $OC^2 = CN^2 + ON^2 = \left(\dfrac{a}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}\left(a^2+b^2\right)$.

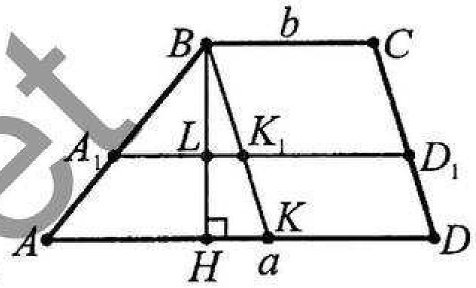
$OA^2 + OB^2 = \dfrac{1}{9}\left(a^2+4b^2\right) + \dfrac{1}{9}\left(4a^2+b^2\right) = \dfrac{5}{9}\left(a^2+b^2\right)$. Звідки $\dfrac{5}{9}\left(a^2+b^2\right) = d^2$;

$\dfrac{1}{9}\left(a^2+b^2\right) = \dfrac{d^2}{5}$. Отже, $OC^2 = \dfrac{1}{9}\left(a^2+b^2\right) = \dfrac{d^2}{5}$. Тому $OC = \dfrac{d}{\sqrt{5}}$.

Відповідь: $\dfrac{d}{\sqrt{5}}$.

4.1. За умовою $\dfrac{a+b}{2} = m\sqrt{ab}$, тоді $a+b = 2m\sqrt{ab}$; $\dfrac{a}{b} - 2m\sqrt{\dfrac{a}{b}} + 1 = 0$. Позначимо $x = \sqrt{\dfrac{a}{b}} > 1$. Тоді $x^2 - 2mx + 1 = 0$. Оскільки за теоремо Вієта $x_1 \cdot x_2 = 1$, то знайдемо x_1 — більший корінь рівняння. $x_1 = m + \sqrt{m^2 - 1}$. Тоді $\dfrac{a}{b} = x_1^2 =$

$$= \left(m + \sqrt{m^2-1}\right)^2 = \frac{\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^2\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)}{m-\sqrt{m^2-1}} = \frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}},$$ що й потрібно було довести.



4.2. Нехай $ABCD$ — задана трапеція ($BC \| AD$), у якої $AD = a$, $BC = b$, $A_1D_1 \| AD$, $S_{AA_1D_1D} = S_{A_1BCD_1}$. Проведемо $BK \| CD$. Нехай $BH = h$, $A_1D_1 = x$. $\Delta ABK \sim \Delta A_1BK_1$ (за двома кутами), звідки $\dfrac{BL}{h} = \dfrac{x-b}{a-b}$; $BL = \dfrac{x-b}{a-b} \cdot h$. $S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$. Оскільки $S_{AA_1D_1D} = S_{A_1BCD_1}$, то $S_{A_1BCD_1} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} \cdot h$. У той же час

$$S_{A_1BCD_1} = \frac{BC + A_1D_1}{2} \cdot BL = \frac{b+x}{2} \cdot \frac{x-b}{a-b} \cdot h.$$ Отже, $\dfrac{b+x}{2} \cdot \dfrac{x-b}{a-b} \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a+b}{2} \cdot h$;

$2(x^2 - b^2) = a^2 - b^2$; $2x^2 = a^2 + b^2$; $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

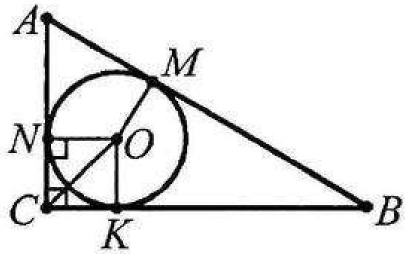
Відповідь: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

4.1. $4x^4-16x^3+3x^2+4x-1=0; 4x^4-16x^3+4x^2-x^2+4x-1=0;$

$4x^2\left(x^2-4x+1\right)-\left(x^2-4x+1\right)=0;\left(x^2-4x+1\right)\left(4x^2-1\right)=0;$

$x_1=-0,5; x_2=2-\sqrt{3}; x_3=0,5; x_4=2+\sqrt{3}$.

Відповідь: $-0,5$; $2-\sqrt{3}$; $0,5$; $2+\sqrt{3}$.



4.2. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник ($\angle C=90°$), O — центр вписаного кола, M — точка дотику кола до гіпотенузи AB, $AM:MB=2:3$, $OC=\sqrt{8}$ см. Точки N і K — точки дотику кола до катетів AC і BC. $NOKC$ — квадрат, діагональ якого $OC=\sqrt{8}$ см. Тоді за теоремою Піфагора $NC^2+ON^2=\left(\sqrt{8}\right)^2$; $2NC^2=8$; $NC=2$ (см). Нехай $MB=3x$, тоді $AM=2x$, $AB=2x+3x=5x$. $AN=AM=2x$ см, $BK=BM=3x$ см як відрізки дотичних, проведених з однієї точки. Отже, $AC=AN+NC=(2x+2)$ см, $BC=BK+KC=(3x+2)$ см. За теоремою Піфагора $AB^2=AC^2+BC^2$; $(5x)^2=(2x+2)^2+(3x+2)^2$; $12x^2-20x-8=0$;

$3x^2-5x-2=0$; $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{1}{3}$ — не підходить. Отже, $AC=2x+2=6$ (см); $BC=3x+2=8$ (см); $AB=5x=5\cdot2=10$ (см).

Відповідь: 6 см, 8 см, 10 см.

4.1. $\dfrac{a^2-1}{ax-1}+\dfrac{a-x}{a}=1;\dfrac{a(a^2-1)+(ax-1)(a-x)-a(ax-1)}{a(ax-1)}=0;$

$$\frac{a^3-a+a^2x-ax^2-a+x-a^2x+a}{a(ax-1)}=0;\frac{-ax^2+a^3+x-a}{a(ax-1)}=0;\ \frac{-a(x^2-a^2)+(x-a)}{a(ax-1)}=0;$$

$$\frac{(x-a)(-a(x+a)+1)}{a(ax-1)}=0;\frac{-a(x-a)\left(x+a-\frac{1}{a}\right)}{a^2\left(x-\frac{1}{a}\right)}=0;\ \frac{(x-a)\left(x+a-\frac{1}{a}\right)}{a\left(x-\frac{1}{a}\right)}=0.$$

1) Дослідимо випадок, коли $x-a=x-\dfrac{1}{a};\ a=\dfrac{1}{a};\ a^2=1;\ a=\pm1$. Отримаємо:

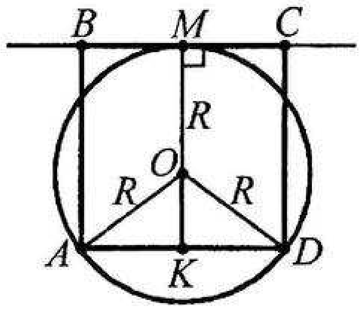
$a=1;\ \dfrac{-(x-1)(x+1-1)}{1\cdot(x-1)}=0;\ x=0;\ a=-1;\ \dfrac{(x+1)(x-1+1)}{1\cdot(x+1)}=0;\ x=0$. Отже, при $a=\pm1$ $x=0$;

2) Нехай другий множник чисельника дорівнює знаменнику, тоді маємо:

$x+a-\dfrac{1}{a}=x-\dfrac{1}{a};\ a=0$, що неможливо; 3) Якщо $a=0$, то рівняння немає змісту; 4) у всіх інших випадках маємо: $\left[\begin{array}{l} x-a=0, \\ x+a-\dfrac{1}{a}=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=a, \\ x_2=-a+\dfrac{1}{a}. \end{array}\right.$

Відповідь: Якщо $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$ то $x_1=a, x_2=-a+\dfrac{1}{a}$; якщо $a=\pm1$, то $x=0$; якщо $a=0$, то рівняння коренів не має.

4.2. Нехай $ABCD$ — заданий квадрат, O — центр кола радіуса R, до того ж точки A і D належать колу, а BC — дотична до кола. Позначимо сторону квадрата через a. У рівнобедреному трикутнику AOD ($AO = OD$) проведемо висоту $OK = MK - MO = a - R$. З ΔAKO ($\angle K = 90°$) за теоремою Піфагора: $AO^2 = AK^2 + OK^2$; $R^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+(a-R)^2$;



$R^2=\dfrac{a^2}{4}+a^2-2aR+R^2;\ \dfrac{5}{4}a^2-2aR=0;\ a\left(\dfrac{5}{4}a-2R\right)=0;\ a=0$ — не підходить, $\dfrac{5}{4}a-2R=0;\ a=\dfrac{8R}{5}$. Отже, $S_{ABCD}=a^2=\left(\dfrac{8R}{5}\right)^2=\dfrac{64}{25}R^2$. *В-дь:* $\dfrac{64}{25}R^2$.

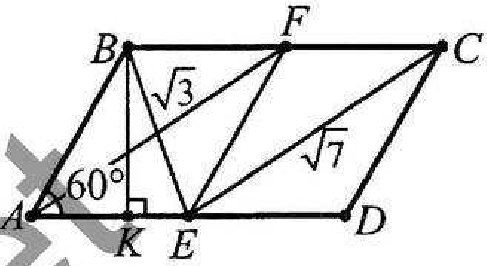
4.1. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності.

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{4\left(a^3+b^3\right)-(a+b)^3}{8}=\frac{4(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-(a+b)^3}{8}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(4a^2-4ab+4b^2-a^2-2ab-b^2\right)}{8}=\frac{(a+b)\left(3a^2-6ab+3b^2\right)}{8}=$$

$$=\frac{3(a+b)\left(a^2-2ab+b^2\right)}{8}=\frac{3(a+b)(a-b)^2}{8}>0 \text{ при } a>0 \text{ і } b>0.$$

Нерівність доведена.



4.2. Нехай $ABCD$ — паралелограм, $\angle A = 60°$, $BE = \sqrt{3}$ см, $CE = \sqrt{7}$ см. Проведемо $EF \| DC$. У паралелограма $ABFE$ діагоналі $BE = \sqrt{3}$ см і $FA = CE = \sqrt{7}$ см. Нехай $AB = x$.
Тоді $2AB^2 + 2AE^2 = BE^2 + FA^2$;
$2x^2 + 2AE^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$, звідки $AE = \sqrt{5-x^2}$. Проведемо $BK \perp AE$. З ΔAKB

$(\angle K = 90°)$: $BK = AB\sin\angle A = x\sin 60° = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$; $AK = AB\cos\angle A = x\cos 60° = \dfrac{x}{2}$.

$KE = AE - AK = \sqrt{5-x^2} - \dfrac{x}{2}$. За теоремою Піфагора з ΔBKE $(\angle K = 90°)$:

$KE^2 + BK^2 = BE^2$; $\left(\sqrt{5-x^2}-\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$;

$5-x^2-x\sqrt{5-x^2}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3x^2}{4}=3$; $x\sqrt{5-x^2}=2$; $x^2(5-x^2)=4$; $x^4-5x^2+4=0$. За теоремою Вієта $x^2=1$, $x^2=4$; $x_1=1$, $x_2=2$. Таким чином, $AB = 1$ см, тоді $AD = 2AE = 2\sqrt{5-1} = 4$ (см) або $AB = 2$ см, тоді $AD = 2AE = 2\sqrt{5-4} = 2$ (см).
Відповідь: 1 см і 4 см або 2 см і 2 см.

ВАРІАНТ №9

Частина 4

4.1. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1; \dfrac{6}{x^2+3x+2}+\dfrac{8}{x^2+3x-4}=1$. Нехай

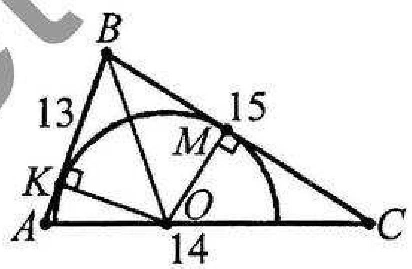
$t=x^2+3x+2$, тоді $\dfrac{6}{t}+\dfrac{8}{t-6}=1; \dfrac{6(t-6)+8t-t(t-6)}{t(t-6)}=0; \dfrac{6t-36+8t-t^2+6t}{t(t-6)}=0;$

$\dfrac{-t^2+20t-36}{t(t-6)}=0; t_1=18, t_2=2$. Погодивши отримані значення з ОДЗ маємо:

1) $18=x^2+3x+2; x^2+3x-16=0; x_1=\dfrac{-3-\sqrt{73}}{2}, x_2=\dfrac{-3+\sqrt{73}}{2};$

2) $2=x^2+3x+2; x^2+3x=0; x_3=0, x_4=-3.$

Відповідь: $\dfrac{-3-\sqrt{73}}{2}; -3; 0; \dfrac{-3+\sqrt{73}}{2}$.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому $AB = 13$ см, $AC = 14$ см, $BC = 15$ см, O — центр вписаного півкола, $O \in AC$. Позначимо радіус півкола через r, тоді $OK = OM = r$. $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{COB} =$

$= \dfrac{1}{2} r \cdot AB + \dfrac{1}{2} r \cdot BC = \dfrac{1}{2} r(AB + BC)$, звідки

$r = \dfrac{2S_{ABC}}{AB+BC} = \dfrac{2S_{ABC}}{13+15} = \dfrac{S_{ABC}}{14}$. У той же час, площу трикутника можна обчислити за формулою Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де півпериметр

$p=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=\dfrac{13+14+15}{2}=21$ (см). Отже, площа трикутника ABC:

$S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$ (см^2). Тоді

$r=\dfrac{84}{14}=6$ (см). Довжина півкола: $l=\pi r=6\pi$ (см).

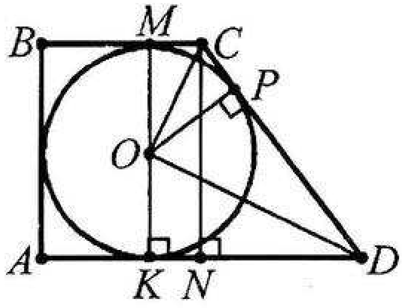
Відповідь: 6π см.

4.1. За наслідком з теореми Вієта матимемо: $ab = 1$, $a + b = -p$, $bc = 2$, $b + c = -q$.

$$(b-a)(b-c) = b^2 - cb - ab + ac = b^2 + cb + ab + ac - 2cb - 2ab =$$

$$= b(b+c) + a(b+c) - 2 \cdot cb - 2 \cdot ab = (b+a)(b+c) - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = -p \cdot (-q) - 6 = pq - 6.$$

Що й треба було довести.



4.2. Нехай $ABCD$ — задана прямокутна трапеція, O — центр вписаного кола, $OC = 3$ см, $OD = 9$ см.
$OP = OM = OK = r$. З ΔOPC ($\angle P = 90°$):
$CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{3^2 - r^2} = \sqrt{9 - r^2}$. Аналогічно з ΔOPD ($\angle P = 90°$): $PD = \sqrt{OD^2 - OP^2} = \sqrt{9^2 - r^2} =$
$= \sqrt{81 - r^2}$. $CM = CP$ і $PD = KD$ як відрізки дотичних до кола, проведені з однієї точки. $CN \perp AD$, $MC = KN$ і $ND = KD - KN =$
$= PD - PC = \sqrt{81 - r^2} - \sqrt{9 - r^2}$. З ΔCND ($\angle N = 90°$) за теоремою Піфагора:

$ND^2 + CN^2 = CD^2$; $\left(\sqrt{81 - r^2} - \sqrt{9 - r^2}\right)^2 + (2r)^2 = \left(\sqrt{81 - r^2} + \sqrt{9 - r^2}\right)^2$;

$81 - r^2 - 2\sqrt{81 - r^2}\sqrt{9 - r^2} + 9 - r^2 + 4r^2 = 81 - r^2 + 2\sqrt{81 - r^2}\sqrt{9 - r^2} + 9 - r^2$;

$4r^2 - 2\sqrt{81 - r^2}\sqrt{9 - r^2} = 2\sqrt{81 - r^2}\sqrt{9 - r^2}$; $r^2 = \sqrt{(81 - r^2)(9 - r^2)}$;

$r^4 = 9 \cdot 81 - 90r^2 + r^4$; $r^2 = \dfrac{9 \cdot 81}{90} = \dfrac{81}{10}$; $r = \dfrac{9}{\sqrt{10}} = 0{,}9\sqrt{10}$ (см). Тоді

$CP = \sqrt{9 - \dfrac{81}{10}} = \sqrt{\dfrac{9}{10}} = 0{,}3\sqrt{10}$ (см). $PD = \sqrt{81 - \dfrac{81}{10}} = \dfrac{27}{\sqrt{10}} = 2{,}7\sqrt{10}$ (см), звідки $CD = CP + PD = 0{,}3\sqrt{10} + 2{,}7\sqrt{10} = 3\sqrt{10}$ (см). Оскільки в трапецію вписано коло, то $AB + CD = BC + AD$, тому
$P = 2(AB + CD) = 2\left(2 \cdot 0{,}9\sqrt{10} + 3\sqrt{10}\right) =$

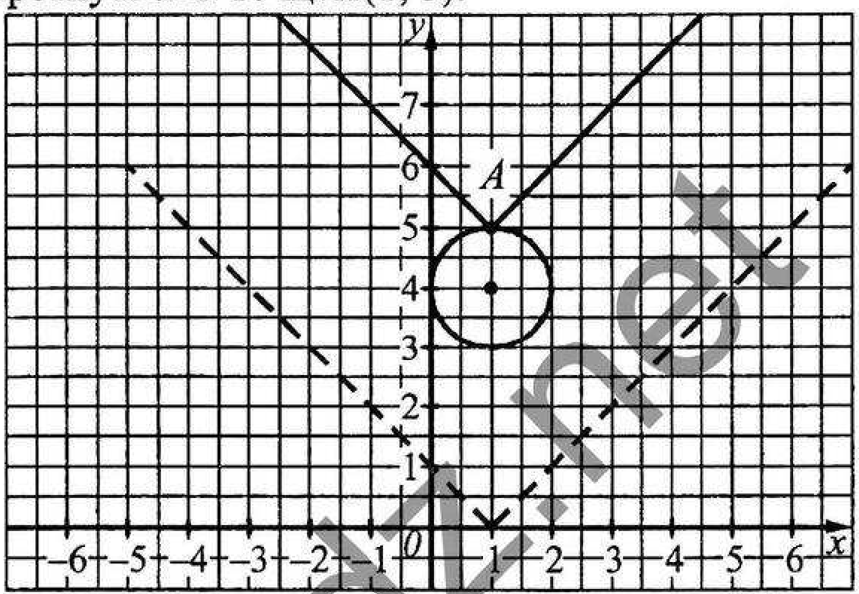
$= 9{,}6\sqrt{10}$ (см).

Відповідь: $9{,}6\sqrt{10}$ см.

ВАРІАНТ №11

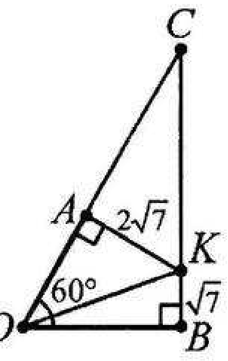
4.1. $\begin{cases} x^2+y^2-2x-8y+16=0, \\ y+|x-1|=a^2-1 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2-2x+1)-1+(y^2-8y+16)=0, \\ y=|x-1|+a^2-1; \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2+(y-4)^2=1, \\ y=|x-1|+a^2-1. \end{cases}$ Графіком першого рівняння системи є коло радіуса 1 з центром в точці $O(1;\ 4)$. Графіком другого рівняння є графік $y=|x-1|$, зміщений на a^2-1 вздовж осі ординат. Система матиме єдиний розв'язок, лише коли графіки перетнуться в точці $A(1;\ 5)$.



Тоді: $5=|1-1|+a^2-1; a=\pm\sqrt{6}$. *Відповідь:* $-\sqrt{6},\ \sqrt{6}$.

4.2. Нехай $\angle AOB$ — заданий кут, $\angle AOB=60°$, $KA\perp OA$, $KA=2\sqrt{7}$ см, $KB\perp OB$, $KB=\sqrt{7}$ см. Продовжимо BK до перетину з OA. У ΔOCB $\angle COB=60°$, тоді $\angle OCB=30°$. З ΔCAK $(\angle A=90°)$: $CK=\dfrac{KA}{\sin\angle C}=\dfrac{2\sqrt{7}}{\sin 30°}=4\sqrt{7}$ (см).



$AC=CK\cos\angle C=4\sqrt{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{21}$ (см). Тоді $CB=CK+KB=$ $=4\sqrt{7}+\sqrt{7}=5\sqrt{7}$ (см). $\Delta CBO\sim\Delta CAK$ (за двома кутами). Тоді $\dfrac{OB}{KA}=\dfrac{CB}{AC}$, звідки $OB=\dfrac{CB\cdot KA}{AC}=\dfrac{5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}}{2\sqrt{21}}=5\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ (см). З ΔKBO $(\angle B=90°)$:

$OK=\sqrt{OB^2+KB^2}=\sqrt{25\cdot\dfrac{7}{3}+7}=\sqrt{\dfrac{196}{3}}=\dfrac{14}{\sqrt{3}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ (см). *Відповідь:* $\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$ см.

4.1. Нехай a та b $(a > b)$ шукані натуральні числа, тоді

$19 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Оскільки 19 — просте число, а множники отриманого виразу натуральні числа, то:

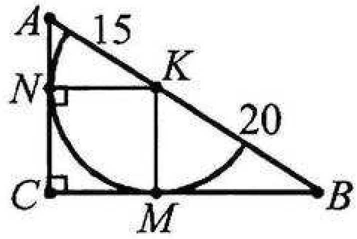
1) $\begin{cases} a-b=1, \\ a^2+ab+b^2=19; \end{cases} \begin{cases} a=b+1, \\ (b+1)^2+(b+1)b+b^2=19; \end{cases}$

$\begin{cases} a=b+1, \\ 3b^2+3b-18=0; \end{cases} \begin{cases} a=b+1, \\ b^2+b-6=0; \end{cases} \begin{cases} a_1=3, \\ b_1=2; \end{cases} \begin{cases} a_2=-2, \\ b_2=-3; \end{cases}$ пара (–2; –3) — не задовольняє умову задачі, отже, $a_1=2, b_1=3$;

2) $\begin{cases} a-b=19, \\ a^2+ab+b^2=1; \end{cases} \begin{cases} a=b+19, \\ (b+19)^2+(b+19)b+b^2=1; \end{cases}$

$\begin{cases} a=b+19, \\ 3b^2+57b+360=0; \end{cases} \begin{cases} a=b+19, \\ b^2+19b+120=0; \end{cases} \begin{cases} a=b+19, \\ b\in\varnothing. \end{cases}$ Єдиний розв'язок вказує на єдиність подання числа 19 у вигляді різниці кубів натуральних чисел.

Відповідь: 2 і 3.



4.2. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), K — центр вписаного півкола, $AK = 15$ см, $KB = 20$ см. Позначимо радіус півкола через r. З ΔKMB ($\angle M = 90°$): $MB = \sqrt{KB^2 - KM^2} = \sqrt{20^2 - r^2} = \sqrt{400 - r^2}$.

Оскільки $\Delta ANK \sim \Delta KMB$ (за двома кутами), то

$\frac{AK}{KN} = \frac{KB}{MB}$, тобто $\frac{15}{r} = \frac{20}{\sqrt{400-r^2}}$; $3\sqrt{400-r^2} = 4r$; $9(400 - r^2) = 16r^2$;

$25r^2 = 3600$; $r^2 = 144$; $r_1 = 12$, $r_2 = -12$ — не підходить. Оскільки дуга MN відповідає центральному куту $\angle MKN = 90°$, то

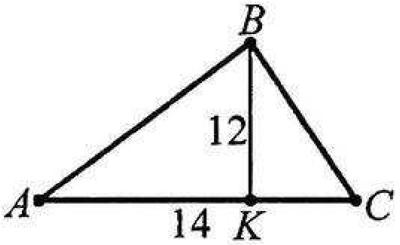
$l = \frac{\pi \cdot r \cdot n°}{180°} = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 90°}{180°} = 6\pi$ (см).

Відповідь: 6π см.

4.1. $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)=\left(1+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)=1+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+1=$

$=\left(\frac{x}{z}-2+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}-2+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)+8=\left(\sqrt{\frac{x}{z}}-\sqrt{\frac{z}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{y}}-\sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2+$

$+ 8 \geq 8$, що й потрібно було довести.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому $AC = 14$ см, BK — висота, $BK = 12$ см, $P = 42$ см. Нехай $BC = a$, $AB = c$. Тоді $P = a + 14 + c = 42$ (см), звідки $a + c = 28$ (см); $c = 28 - a$. Площа трикутника ABC:

$S=\frac{1}{2}AC\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 12=84$ (см^2). За формулою

Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = 42 : 2 = 21$ (см). Тоді

$S=\sqrt{21(21-a)(21-14)(21-c)}$; $S=7\sqrt{3}\sqrt{(21-a)(21-28+a)}=84$;

$\sqrt{3}\sqrt{(21-a)(a-7)}=12$; $(21-a)(a-7)=48$; $a^2-28a+195=0$, звідки $a_1 = 15$, $a_2 = 13$. Таким чином, $c_1 = 28 - a = 13$ (см), $c_2 = 15$ см. Отже, довжини інших сторін трикутника 15 см і 13 см.

Відповідь: 15 см, 13 см.

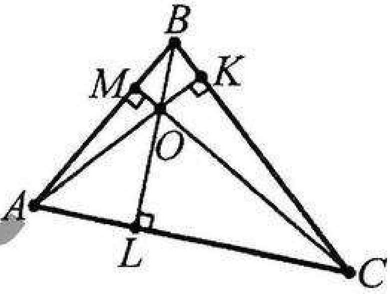
ВАРІАНТ №14

4.1. $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ (x+y)^2-xy=13; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ (x+y)^2+(x+y)=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ (x+y)^2+(x+y)-20=0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x+y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} xy=3, \\ x+y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x+y=-5; \end{cases}$ $\begin{cases} xy=12, \\ x+y=-5; \end{cases}$

$\begin{cases} x(-5-x)=12, \\ y=-5-x; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+5x+12=0, \\ y=-5-x; \end{cases}$ $D=25-48<0$. Отже, рівняння, а значить і система, розв'язків немає.

Відповідь: (1; 3), (3; 1).



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому AK, CM і BL — висоти, до того ж, $h_1=AK=12$ см, $h_2=BL=15$ см, $h_3=CM=20$ см. Позначимо $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Очевидно, що $ah_1=bh_2=ch_3$,

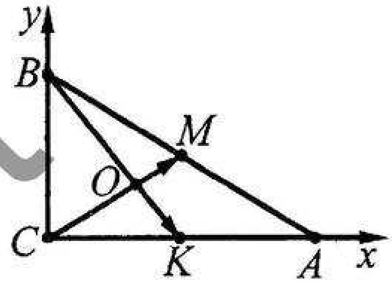
$12a=15b=20c$. Звідси маємо, що $c=\frac{12}{20}a=\frac{3}{5}a$;

$b=\frac{12}{15}a=\frac{4}{5}a$. Одержимо: $c^2+b^2=\left(\frac{3}{5}a\right)^2+\left(\frac{4}{5}a\right)^2=\left(\frac{9}{25}+\frac{16}{25}\right)a^2=a^2$. Оскільки для трикутника ABC виконується співвідношення $a^2=b^2+c^2$, то заданий трикутник — прямокутний.

4.1. $$\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\frac{\left(a^2-4\right)^2+16a^2}{(2a)^2}}}=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\frac{a^4-8a^2+16+16a^2}{(2a)^2}}}=$$

$$=\frac{a^2+4}{a\sqrt{\frac{\left(a^2+4\right)^2}{(2a)^2}}}=\frac{a^2+4}{a\frac{\left|a^2+4\right|}{|2a|}}=\frac{|2a|}{a}=\frac{2|a|}{a}=\begin{cases}2, & \text{якщо } a>0;\\ -2, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases}2, & \text{якщо } a>0;\\ -2, & \text{якщо } a<0.\end{cases}$



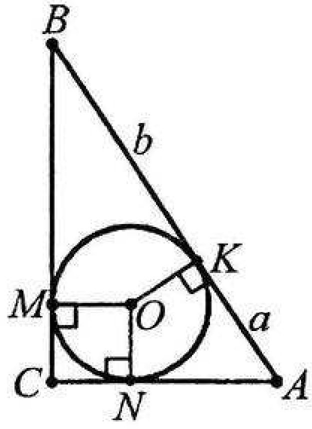
4.2. На катетах CB і CA трикутника ABC побудуємо систему координат. Тоді координати вершин трикутника: $A\left(2\sqrt{2};0\right)$, $B(0;2)$, $C(0;0)$. Координати точки M знайдемо, врахувавши, що точка M є серединою відрізка AB, тому $x_M=\frac{2\sqrt{2}+0}{2}=\sqrt{2};\ y_M=\frac{0+2}{2}=1$. Отже, $M\left(\sqrt{2};1\right)$. Точка K є серединою відрізка CA, тому $x_K=\frac{2\sqrt{2}+0}{2}=\sqrt{2};$ $y_K=\frac{0+0}{2}=0$. Отже, $K\left(\sqrt{2};0\right)$. Знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{\left(\sqrt{2}-0;0-2\right)}=\overrightarrow{\left(\sqrt{2};-2\right)}$; $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{\left(\sqrt{2}-0;1-0\right)}=\overrightarrow{\left(\sqrt{2};1\right)}$. Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{BK}$: $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BK}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+(-2)\cdot 1=$ $=2-2=0$. Оскільки $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{BK}=0$, то $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{BK}$ і $CM\perp BK$.

4.1. x і y — числа одного знака, а оскільки $x + y = 20$, то $x > 0$, $y > 0$.

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{xy} = \dfrac{80}{\sqrt{xy}}, \\ x + y = 20; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x + xy - 80}{\sqrt{xy}} = 0, \\ y = 20 - x; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x + x(20 - x) - 80}{\sqrt{xy}} = 0, \\ y = 20 - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-x^2 + 21x - 80}{\sqrt{xy}} = 0, \\ y = 20 - x; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 4 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 15. \end{cases}$$

Відповідь: (16; 4), (5; 15).



4.2. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник, K — точка дотику вписаного кола, до того ж $AK = a$, $KB = b$. Нехай $OK = x$. M і N — точки дотику кола до катетів, тому $OMCN$ — квадрат і $CN = CM = x$. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AN = AK = a$, $BM = BK = b$. У ΔABC ($\angle C = 90°$): $AB = AK + KB = a + b$; $AC = a + x$, $BC = b + x$. За теоремою Піфагора маємо: $(a + x)^2 + (b + x)^2 = (a + b)^2$, звідки $2x^2 + 2ax + 2bx + a^2 + b^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2$; $x^2 + (a + b)x = ab$. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC =$

$= \dfrac{1}{2}(a + x)(b + x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + (a + b)x + ab) = \dfrac{1}{2}(ab + ab) = ab$.

Відповідь: ab.

4.1. $\left(x^2+2x-2\right)^2+x\left(x^2+2x-2\right)=2x^2;$

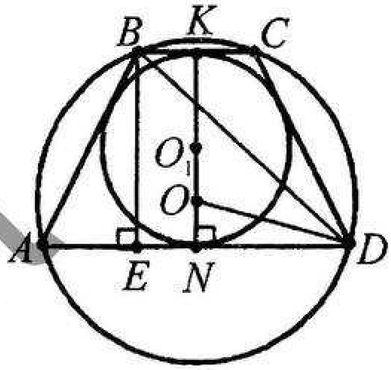
$$\left(\left(x^2+2x-2\right)^2-2x\left(x^2+2x-2\right)+x^2\right)+\left(3x\left(x^2+2x-2\right)-3x^2\right)=0;$$

$$\left(x^2+2x-2-x\right)^2+3x\left(x^2+2x-2-x\right)=0;\left(x^2+x-2\right)^2+3x\left(x^2+x-2\right)=0;$$

$$\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x-2+3x\right)=0;\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x^2+4x-2\right)=0.$$

$x_1=-2-\sqrt{6};x_2=-2;x_3=-2+\sqrt{6};x_4=1$.

Відповідь: $-2-\sqrt{6};-2;-2+\sqrt{6};1$.



4.2. Нехай $ABCD$ — заданий трапеція, у якої $AD=8$ см, $BC=2$ см, O — центр описаного кола, O_1 — центр вписаного кола, $OD=R$, $O_1K=r$. Оскільки трапеція вписана в коло і $BC\|AD$, то $AB=CD$. Отже, трапеція рівнобічна. $AE=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{8-2}{2}=3$ (см). Оскільки трапеція описана навколо кола, то має місце властивість $AB+CD=AD+BC$, тобто $2AB=8+2=10$ (см); $AB=5$ см. З ΔBEA $(\angle E=90°)$: $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (см). $\sin\angle DAB=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{4}{5}$.

$BE=2r$, звідки $r=\dfrac{BE}{2}=\dfrac{4}{2}=2$ (см). У ΔBED $(\angle E=90°)$:

$BD=\sqrt{BE^2+ED^2}=\sqrt{4^2+(8-3)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$ (см). За наслідком з теореми синусів з ΔABC: $2R=\dfrac{BD}{\sin\angle DAB}$, звідки $R=\dfrac{BD}{2\sin\angle DAB}=\dfrac{\sqrt{41}}{2\cdot\dfrac{4}{5}}=\dfrac{5\sqrt{41}}{8}$ (см).

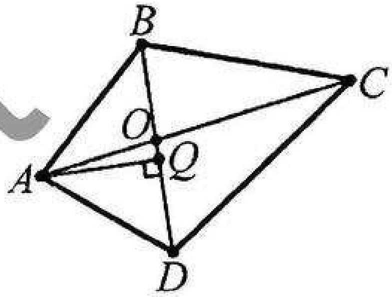
Відповідь: $r=2$ см, $R=\dfrac{5\sqrt{41}}{8}$ см.

4.1. ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0, x + y \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy+y^2-2xy}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x+y} - \dfrac{2xy}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-2\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} x+y=6, \\ \dfrac{6}{xy} = \dfrac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} x+y=6, \\ xy=8; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: (2; 4), (4; 2).



4.2. Нехай $ABCD$ — заданий чотирикутник, у якого AC і BD — діагоналі; $S_1 = 2$ дм^2, $S_2 = 4$ дм^2, $S_3 = 6$ дм^2. Діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Нехай площа трикутника COB — найбільша. Оскільки в ΔAOD і ΔAOB однакова висота AQ, то $S_{AOD} = \dfrac{1}{2}AQ \cdot OD$;

$S_{AOB} = \dfrac{1}{2}AQ \cdot OB$. Тому $\dfrac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \dfrac{OD}{OB}$. Аналогічно для трикутників DOC і COB

$\dfrac{S_{DOC}}{S_{COB}} = \dfrac{OD}{OB}$. Отже, $\dfrac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \dfrac{S_{DOC}}{S_{COB}}$, звідки $S_{AOD} \cdot S_{COB} = S_{DOC} \cdot S_{AOB}$. Оскільки площа S_{COB} — найбільша, то для виконання останньої рівності необхідно, щоб площа S_{AOD} була найменшою. Тому $S_{AOD} = 2$ дм^2. Тоді $2S_{COB} = 4 \cdot 6$; $S_{COB} = 12$ (дм^2). Таким чином, $S_{ABCD} = 2 + 4 + 6 + 12 = 24$ (дм^2).
Відповідь: 24 дм^2.

4.1. Рівняння матиме корені якщо $D > 0$;

$(3k+2)^2 - 4\cdot 4(k^2-1) = 9k^2 + 12k + 4 - 16k^2 + 16 = -7k^2 + 12k + 20 > 0$ при усіх k. Відношення більше має зміст для додатних чисел. Нехай a ($a > 0$) — корінь даного рівняння, тоді другий корінь — $3a$. За теоремою Вієта маємо:

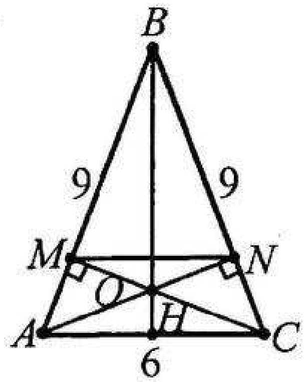
$$\begin{cases} 3a^2 = \dfrac{k^2-1}{4}, \\ 3a + a = \dfrac{3k+2}{4}; \end{cases} \begin{cases} 3\left(\dfrac{3k+2}{16}\right)^2 = \dfrac{k^2-1}{4}, \\ a = \dfrac{3k+2}{16}; \end{cases} \begin{cases} 3(3k+2)^2 = 64(k^2-1), \\ a = \dfrac{3k+2}{16}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27k^2 + 36k + 12 = 64k^2 - 64, \\ a = \dfrac{3k+2}{16}; \end{cases} \begin{cases} 37k^2 - 36k - 76 = 0, \\ a = \dfrac{3k+2}{16}; \end{cases} \begin{cases} k_1 = -\dfrac{38}{37}, \\ a_1 = -\dfrac{5}{74}; \end{cases} \begin{cases} k_2 = 2, \\ a_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$ Пара

$(k_1; a_1)$ не задовольняє умову задачі, тому розв'язком є $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

Відповідь: $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$.

4.2. Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник, у якого $AB = BC = 9$ см, $AC = 6$ см, CM і AN — висоти. З теореми Піфагора для ΔAHB ($\angle H = 90°$): $BH = \sqrt{AB^2 - \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2} =$



$= \sqrt{9^2 - \left(\dfrac{6}{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}$ (см). Площа трикутника ABC:

$S = \dfrac{1}{2} BH \cdot AC$ і $S = \dfrac{1}{2} AN \cdot BC$. Звідси $AN = \dfrac{BH \cdot AC}{BC} = \dfrac{6\sqrt{2}\cdot 6}{9} = 4\sqrt{2}$ (см).

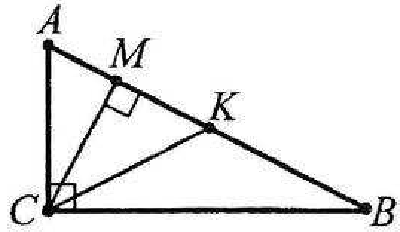
З ΔABN ($\angle N = 90°$): $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{9^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{49} = 7$ (см).

$\Delta MBN \sim \Delta ABC$, тому $\dfrac{MN}{BN} = \dfrac{AC}{BC}$, звідки $MN = \dfrac{AC \cdot BN}{BC} = \dfrac{6 \cdot 7}{9} = \dfrac{14}{3} = 4\dfrac{2}{3}$ (см).

Відповідь: $4\dfrac{2}{3}$ см.

4.1. Рівняння матиме два корені, якщо $D>0: a^2+2a+1-4a-16=a^2-2a-15>0;$ $a\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$. Для того, щоб корені були від'ємними, достатньо, щоб їх добуток був додатним, а сума — від'ємною. За теоремою Вієта маємо систему: $\begin{cases}a+4>0,\\a+1<0;\end{cases}$ $\begin{cases}a>-4,\\a<-1;\end{cases}$ $a\in(-4;-1)$. Врахувавши, що корені існують при $a\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$, одержуємо: $a\in(-4;-3)$.

Відповідь: $a\in(-4;-3)$.



4.2. Нехай $AB=c$ і $\angle A=\alpha$. Тоді $AC=c\cos\alpha$, $BC=c\sin\alpha$. $P=AB+BC+AC=c+c\sin\alpha+$ $+c\cos\alpha=c(1+\sin\alpha+\cos\alpha)=72$. У той же час $CK=R=\dfrac{c}{2}$. З ΔAMC ($\angle M=90°$):

$CM=AC\sin\alpha=c\cos\alpha\sin\alpha$. $CK-CM=$ $=\dfrac{c}{2}-c\cos\alpha\sin\alpha=7$. Отже, $\begin{cases}c(1+\sin\alpha+\cos\alpha)=72;\\ \dfrac{c}{2}-c\sin\alpha\cos\alpha=7;\end{cases}$ $\begin{cases}c(\sin\alpha+\cos\alpha)=72-c;\\2c\sin\alpha\cos\alpha=c-14;\end{cases}$

$\begin{cases}c^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha)=(72-c)^2;\\2c\sin\alpha\cos\alpha=c-14;\end{cases}$ $\begin{cases}c^2+2c^2\sin\alpha\cos\alpha=(72-c)^2;\\2c\sin\alpha\cos\alpha=c-14;\end{cases}$

$c^2+c(c-14)=(72-c)^2$, звідки $c^2+130c-72^2=0$; $c_1=32$, $c_2=-162$ — не підходить. Отже, $AB=32$ см.

Відповідь: 32 см.

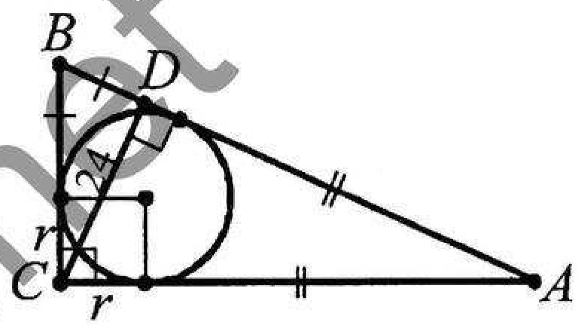
4.1. $\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

$$\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)-4\sqrt{\frac{a}{b}}=a+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{a}+\frac{1}{b}-4\sqrt{\frac{a}{b}}=$$

$$=\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{b}{a}\right)=\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right)+$$

$$+\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right)=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0$$ при всіх допустимих значеннях a та b.



4.2. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює 120 см^2, CD — його висота, проведена до гіпотенузи, $CD = 24$ см. Нехай $AB = x$ см, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}x\cdot 24=12x$ (см^2). Крім того, $S_{\Delta ABC}=pr$, де $p=\frac{120}{2}=60$ (см), а r — радіус вписаного кола, маємо:

$12x = 60r$; $r = 0{,}2x$ (см). $P_{\Delta ABC} = 2AB + 2r$; $2(AB + r) = 120$; $x + 0{,}2x = 60$; $1{,}2x = 60$; $x = 50$ (см). Урахувавши, що $P = AB + AC + BC = 120$ (см) і $AB = x = 50$ см, то $BC + AC = 120 - 50 = 70$ (см). Але $S_{\Delta ABC} = 12x = 12 \cdot 50 = 600$ (см^2). Нехай $BC = y$ см, тоді $AC = 70 - y$ (см). Отже, $\frac{1}{2}y\cdot(70-y)=600$; $y^2 - 70y + 1200 = 0$; $y_1 = 30$, $y_2 = 40$. Якщо $BC = y_1 = 30$ (см), то $AC = 70 - 30 = 40$ (см). Якщо $BC = y_2 = 40$ (см), то $AC = 70 - 40 = 30$ (см). Отже, катети трикутника дорівнюють 30 см і 40 см, а гіпотенуза — 50 см.

Відповідь: 30 см, 40 см, 50 см.

4.1. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)=7$. $(x+1)(x-4)(x-1)(x-2)=7$.

$(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)=7$. Заміна: $y=x^2-3x$.

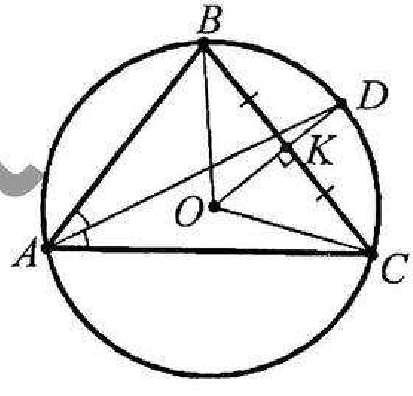
$(y-4)(y+2)=7$. $y^2-2y-15=0$; $(y+3)(y-5)=0$; $y_1=-3$; $y_2=5$.

Повернемось до заміни:

1. $x^2-3x+3=0$; $D=9-12<0$; $x\in\varnothing$.

2. $x^2-3x-5=0$; $x=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$; $\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник. Проведемо OK — серединний перпендикуляр до сторони BC, де O — центр описаного кола. $BC\perp OK$, $BK=KC$. Позначимо через D точку перетину OK й описаного кола. З рівнобедреного трикутника OBC випливає, що $\angle BOD=\angle DOC$. Тоді D — середина дуги BC. Із рівності вписаних кутів $\angle BAD$ і $\angle CAD$ випливає, що AD є бісектрисою кута A трикутника ABC. Але кут A має єдину бісектрису, яка і проходить через точку D.

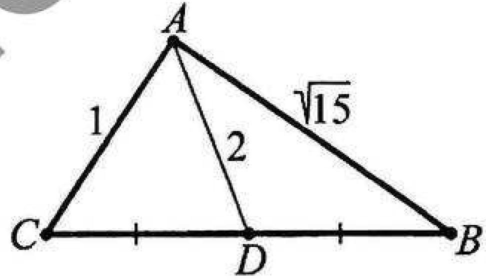
4.1. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy = 17, \\ y^2 - x^2 = 16. \end{cases}$ Перше рівняння запишемо як різницю першого і другого, а друге — як суму першого і подвоєного другого:

$$\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 = 1, \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = 49; \end{cases} \begin{cases} (2x-y)^2 = 1, \\ (x-2y)^2 = 49; \end{cases} \begin{cases} 2x - y = \pm 1, \\ x - 2y = \pm 7; \end{cases}$$

1) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - 2y = 7; \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}, \\ y = -\dfrac{13}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ x - 2y = -7; \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{5}{3}, \\ y = \dfrac{13}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - 2y = -7; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ x - 2y = 7; \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ y = -5; \end{cases}$

Відповідь: $(-3;-5)$; $(3;5)$; $\left(-\dfrac{5}{3}; -\dfrac{13}{3}\right)$; $\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, AD — медіана, $AD = 2$ см, $AC = 1$ см, $AB = \sqrt{15}$ см. Маємо:

$$AD^2 = \frac{1}{4}\left(2AC^2 + 2AB^2 - CB^2\right);$$

$$4 = \frac{1}{4}\left(2 \cdot 1^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{15}\right)^2 - CB^2\right);\ CB^2 = 16;\ CB = 4 \text{ (см)}.$$

Даний трикутник прямокутний ($1^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = 4^2$), тому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ см^2.

4.1. $\left||x+2|-|x-6|\right|=|x|$.

1) $x<-2$; $|-x-2+x-6|=-x$; $-x=8$; $x=-8$.

2) $-2\le x<0$; $|x+2+x-6|=-x$; $|2x-4|=-x$; $-2x+4=-x$; $x=4$ — не підходить.

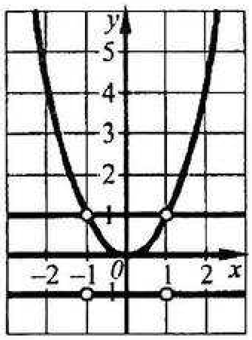
3) $0\le x<6$; $|x+2+x-6|=x$; $|2x-4|=x$;

а) $0\le x<2$; $-2x+4=x$; $x=\frac{4}{3}$; б) $2\le x<6$; $2x-4=x$; $x=4$.

4) $x\ge 6$; $|x+2-x+6|=x$; $x=8$.

Відповідь: -8; $1\frac{1}{3}$; 4; 8.

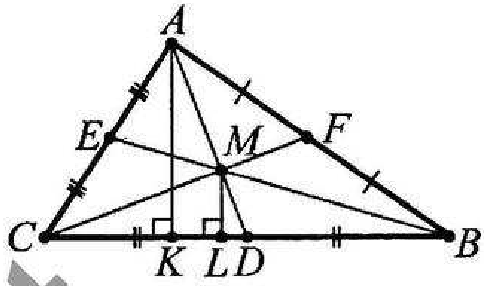
4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому проведено медіани $m_a = AE$, $m_b = BM$, $m_c = CF$. Продовжимо медіану BM так, що $BD = 2BM = 2m_b$. $ABCD$ — паралелограм, $AD = BC = a$, $AB = CD = c$. Розглянемо ΔDAB. $BD < AD + AB$, тобто $2m_b < a + c$. Аналогічно можна одержати нерівності $2m_a < b + c$ і $2m_c < b + a$. Додавши почастинно всі три нерівності, одержимо: $2m_b + 2m_a + 2m_c < a + c + b + c + b + a$; $2(m_b + m_a + m_c) < 2(a + b + c)$; $m_b + m_a + m_c < a + b + c$.



4.1. $\frac{(y-x^2)(|y|-1)}{1-x^2}=0$. ОДЗ: $1-x^2\neq 0$; $x\neq\pm1$. Маємо:

$y-x^2=0$ або $|y|-1=0$. Отже, $y=x^2$ або $y=\pm1$ та $x\neq\pm1$.

Графіком рівняння є парабола $y=x^2$ та прямі $y=1$, $y=-1$ без точок з абсцисами -1 та 1, а саме: $(1; 1)$, $(-1; 1)$; $(-1; -1)$; $(1; -1)$.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, $AB=25$ см, $BC=29$ см, $CA=6$ см. AD, BE і CF — медіани трикутника ABC. Проведемо у трикутнику ABC висоту AK, а в трикутнику CMD — висоту ML.

Маємо: $\Delta AKD\sim\Delta MLD$, звідки $\frac{AK}{ML}=\frac{AD}{MD}$. Оскільки M — точка перетину медіан, то $\frac{AD}{MD}=\frac{3}{1}$. Тоді $\frac{AK}{ML}=\frac{3}{1}$. $S_{\Delta ABC}=$

$=\frac{1}{2}BC\cdot AK$; $S_{\Delta CMD}=\frac{1}{2}CD\cdot ML=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot\frac{1}{3}AK=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot AK=$

$=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$. Аналогічно $S_{\Delta DMB}=S_{\Delta BMF}=S_{\Delta FMA}=S_{\Delta AME}=S_{\Delta CEM}=\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$.

$p_{\Delta ABC}=\frac{25+29+6}{2}=30$ (см). $S_{\Delta ABC}=\sqrt{30(30-25)(30-29)(30-6)}=$

$=\sqrt{30\cdot5\cdot1\cdot24}=60$ (см^2). Тоді площа кожного з шести трикутників дорівнює $60:6=10$ (см^2).

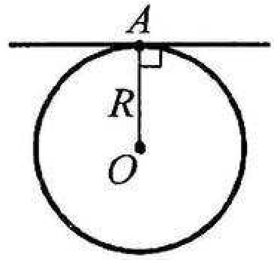
Відповідь: 10 см^2.

4.1. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=13, \\ x^2+xy+y^2=91; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=13, \\ (x+y)^2-xy=91; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=13, \\ \left(x+y+\sqrt{xy}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)=91; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=13, \\ 13\cdot\left(x+y-\sqrt{xy}\right)=91; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=13, \\ x+y-\sqrt{xy}=7; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2y=20, \\ 2\sqrt{xy}=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=10, \\ \sqrt{xy}=3; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=10, \\ xy=9; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=9; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=9, \\ y_2=1. \end{cases}$

Відповідь: (1; 9), (9; 1).



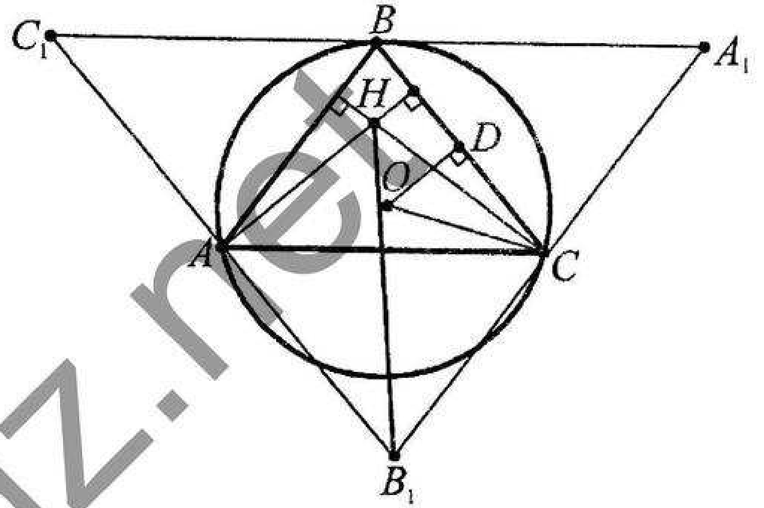
4.2. Рівняння кола з центром у точці $O(1; -2)$ має вигляд: $(x-1)^2+(y+2)^2=R^2$. Радіус кола, проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної. Тому, щоб знайти R, необхідно знайти відстань від точки $O(1; -2)$ до прямої

$3x-4y+9=0$: $d=\dfrac{|3\cdot1-4\cdot(-2)+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{25}}=4$ (см). Отже,

рівняння кола: $(x-1)^2+(y+2)^2=4^2$.

4.1. $(\sqrt{x-1}-a)(4x-5)=0$. ОДЗ: $x-1\geq 0$; $x\geq 1$. Маємо: $4x-5=0$ або $\sqrt{x-1}-a=0$. $x=\frac{5}{4}$ є коренем даного рівняння. Щоб цей корінь був єдиний, потрібно, щоб корінь рівняння $\sqrt{x-1}=a$ дорівнював $\frac{5}{4}$ або щоб це рівняння не мало коренів. Отже: 1) $\sqrt{\frac{5}{4}-1}=a; a=\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{x-1}=a$. Рівняння не має коренів, якщо $a<0$. *Відповідь*: $(-\infty;0)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, H — ортоцентр, O — центр описаного кола. Доведемо, наприклад, що $AH=2OD$ (OD — серединний перпендикуляр до BC). Позначимо $BC=a$. Оскільки точка O — центр описаного навколо трикутника ABC кола, то вона лежить на перетині серединних перпендикулярів. З ΔODC



маємо: $OD=\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$, де $R=OC$ — радіус описаного кола.

Щоб знайти AH, добудуємо через кожну вершину трикутника ABC пряму, паралельну до протилежної сторони, у результаті чого утвориться $\Delta A_1B_1C_1$. Оскільки $CB_1\|AB$, $AB_1\|BC$, то AB_1CB — паралелограм, $AB_1=BC=a$. Аналогічно $AC_1=a$, тоді $B_1C_1=2a$. Також $B_1A_1=2AB$, $C_1A_1=2AC$. Отже, $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta ABC$ з коефіцієнтом подібності 2. Точка H — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника $A_1B_1C_1$, тобто центр описаного навколо нього кола. Тоді $HB_1=R_1=2R$. З ΔAHB_1:

$AH^2=B_1H^2-AB_1^2=(2R)^2-a^2=4R^2-a^2$. Отже, $AH=\sqrt{4R^2-a^2}$. Оскільки $OD=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$, то $AH=2OD$.

4.1. При $n = 1$ маємо: $1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$; $1=1$ — дана рівність справджується. Нехай рівність справджується для $n = k$, тоді:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \quad (1)$$

Доведемо, що рівність справджується для $n = k + 1$, тобто

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}. \quad (2)$$

Перетворимо ліву частину рівності (2), використавши рівність (1):

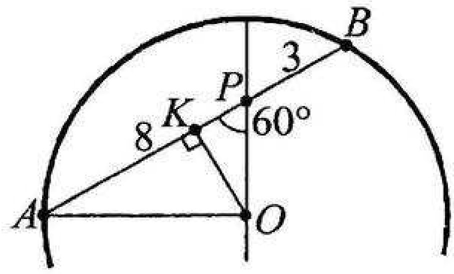
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6},$$

що і потрібно було довести.

4.2. Нехай задано коло O, у якому проведено хорду AB, $\angle APO = 60°$, $AP = 8$ см, $BP = 3$ см.



$AB = AP + PB = 8 + 3 = 11$ (см). Проведемо перпендикуляр OK до хорди AB, тоді $AK = KB = \frac{AB}{2} =$ $= 5{,}5$ (см). З ΔPOK $OK = PK\text{tg}60° = (8-5{,}5)\cdot\sqrt{3} =$ $= 2{,}5\sqrt{3}$ (см). З ΔAOK $AO=\sqrt{AK^2+KO^2}=\sqrt{5{,}5^2+\left(2{,}5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{49}=$ $= 7$ (см). Отже, $l = 2\pi r = 2\pi\cdot AO = 2\pi\cdot 7 = 14\pi$ (см).

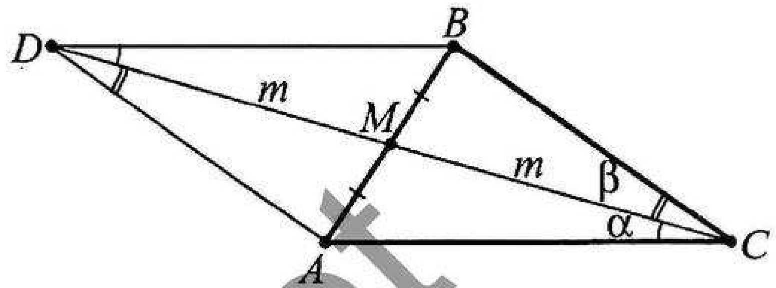
Відповідь: 14π см.

4.1. Дана подія може відбутись трьома способами: 1) біла, біла, чорна; 2) біла, чорна, біла; 3) чорна, біла, біла. Порахуємо ймовірності цих подій:

1) $P_1 = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{18}{28} = \frac{99}{1015}$; 2) $P_2 = \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} \cdot \frac{11}{28} = \frac{99}{1015}$; 3) $P_3 = \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} \cdot \frac{11}{28} = \frac{99}{1015}$.

Шукана ймовірність $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{297}{1015}$.

Відповідь: $\frac{297}{1015}$.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому CM — медіана, $CM = m$, $\angle ACM = \alpha$, $\angle MCB = \beta$. Продовжимо медіану CM так, що $CD = 2CM = 2m$. $ABCD$ — паралелограм, бо $MC = MD$, $AM = MB$. Розглянемо ΔCBD. $\angle DBC = 180° - (\alpha + \beta)$. За теоремою синусів

$$\frac{DC}{\sin \angle DBC} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{DB}{\sin\beta}, \text{ звідки: } BC = \frac{DC \sin\alpha}{\sin \angle DBC} = \frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)};$$

$$AC = DB = \frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Відповідь: $CA = \frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $CB = \frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

4.1. $\dfrac{x^2-4ax+3a^2-2a-1}{x-4}=0$. Рівняння матиме єдиний корінь, коли $D=0$ та $x\neq 4$ або коли $D>0$ і один з коренів дорівнює 4. $D=(-4a)^2-4\cdot(3a^2-2a-1)=$ $=16a^2-12a^2+8a+4=4a^2+8a+4=4(a+1)^2$.

1) $D=0$; $4(a+1)^2=0$; $a=-1$. $\dfrac{x^2+4x+3+2-1}{x-4}=0$; $\dfrac{x^2+4x+4}{x-4}=0$;

$\dfrac{(x+2)^2}{x-4}=0$; $x=-2$. Якщо $a=-1$, то рівняння має один корінь.

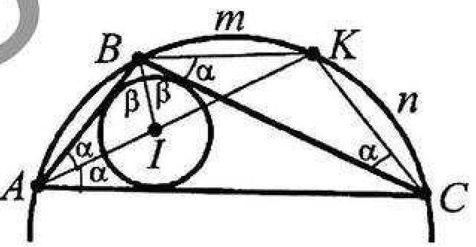
2) $D>0$; $a\neq-1$. $x^2-4ax+3a^2-2a-1=0$; $x_{1,2}=\dfrac{4a\pm2(a+1)}{2}$;

$x_{1,2}=2a\pm(a+1)$; $x_1=3a+1$, $x_2=a-1$.

а) $x_1=4$; $3a+1=4$; $a=1$. Якщо $a=1$, то рівняння має один корінь;

б) $x_2=4$; $a-1=4$; $a=5$. Якщо $a=5$, то рівняння має один корінь.

Відповідь: $(-1;\ 1;\ 5)$.



4.2. Нехай у трикутник ABC вписано коло I, а AK — бісектриса кута A.

У трикутнику ABC позначимо $\angle A=2\alpha$; $\angle B=2\beta$.

Оскільки AK — бісектриса кута A, то $\cup BmK=\cup CnK$. Тоді $\angle CBK=\angle KCB=\alpha$ (як кути, що спираються на рівні дуги). Отже, трикутник KCB — рівнобедрений і $BK=KC$. Оскільки BI — бісектриса $\angle B$, то в трикутнику BIK: $\angle B=\alpha+\beta$ і $\angle I=\alpha+\beta$ (як зовнішній кут ΔBIA). Отже, трикутник IKB — рівнобедрений, звідки $KI=KB$. Таким чином, $KI=KB=KC$.

4.1. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$; $(x+2)(x+12)(x+3)(x+8)=4x^2$;

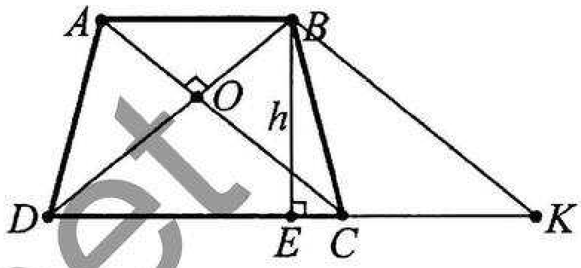
$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$; $((x^2+10x+24)+4x)((x^2+10x+24)+x)=4x^2$;

$(x^2+10x+24)^2+x(x^2+10x+24)+4x(x^2+10x+24)+4x^2=4x^2$;

$(x^2+10x+24)^2+5x(x^2+10x+24)=0$; $(x^2+10x+24)(x^2+10x+24+5x)=0$;

$(x+6)(x+4)(x^2+15x+24)=0$; $x_1=-6, x_2=-4, x_3=-\dfrac{15+\sqrt{129}}{2}, x_4=\dfrac{\sqrt{129}-15}{2}$.

Відповідь: -6; -4; $-\dfrac{15+\sqrt{129}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{129}-15}{2}$.

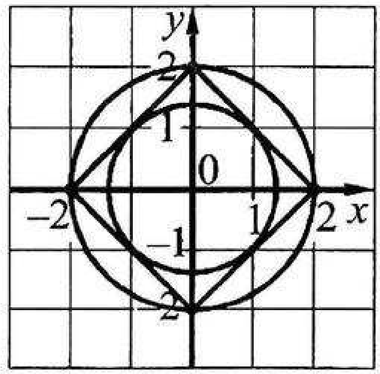


4.2. Нехай $ABCD$ — задана рівнобічна трапеція, O — точка перетину діагоналей AC і BD, $BE=h$ — висота. Проведемо $BK \parallel AC$. $S_{ABCD}=S_{\Delta DBK}$ (оскільки $S_{\Delta BCK}=S_{\Delta DAB}$ — $AB=CK$ як протилежні сторони паралелограма, а їхні висоти дорівнюють h). ΔDBK — рівнобедрений прямокутний ($\angle DBK=90°$). Тоді $S_{ABCD}=S_{\Delta DBK}=\dfrac{1}{2}\cdot 2h\cdot h=h^2$.

Відповідь: h^2.

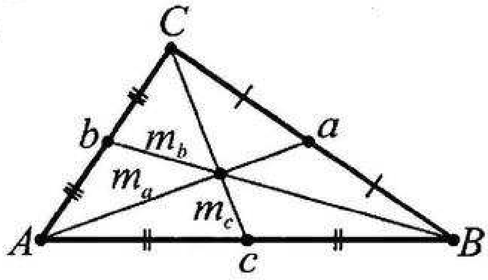
ВАРІАНТ №32

Частина 4



4.1. $\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ x^2+y^2=a^2. \end{cases}$ Якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи, то пари $(-x_0; y_0), (-x_0; -y_0), (x_0; -y_0)$ також є її розв'язками. Побудуємо графік першого рівняння системи. При $x \geq 0, y \geq 0$ це відрізок прямої $y = 2 - x$ з кінцями в точках $(0;2), (2;0)$. Загальний графік першого рівняння системи — квадрат з вершинами в точках $(0;2), (2;0), (0;-2), (-2;0)$ і зі стороною $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ та діагоналлю $2 + 2 = 4$. Графік другого рівняння системи — коло з центром в точці (0; 0) радіуса $|a|$. Чотири спільні точки ці графіки матимуть лише тоді, коли коло буде вписане в квадрат або описане навколо нього. Це можливо при $|a| = \sqrt{2}$ або $|a| = 2$. Маємо: $a = \pm\sqrt{2}$ або $a = \pm 2$.

Відповідь: $\pm\sqrt{2}; \pm 2$.



4.2. Для медіан трикутника справедливі формули:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right), \quad m_b^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right),$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right).$$

Тоді з формули $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ одержимо:

$$\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) + \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) = \frac{5}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right);$$

$2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 10a^2 + 10b^2 - 5c^2;$

$a^2 + b^2 + 4c^2 = 10a^2 + 10b^2 - 5c^2;$

$9c^2 = 9a^2 + 9b^2; \; c^2 = a^2 + b^2.$

А це означає, що за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник прямокутний.

4.1. $x^2+\dfrac{x^2}{(2x+1)^2}=2$. ОДЗ: $x\neq-\dfrac{1}{2}$.

$x^2(2x+1)^2+x^2=2(2x+1)^2;$

$x^2(2x+1)^2-(2x+1)^2+x^2-(2x+1)^2=0;$

$(2x+1)^2(x^2-1)+(x-(2x+1))(x+(2x+1))=0;$

$(2x+1)^2(x-1)(x+1)+(-x-1)(3x+1)=0;$

$(x+1)((4x^2+4x+1)(x-1)-(3x+1))=0;$

$(x+1)(4x^3+4x^2+x-4x^2-4x-1-3x-1)=0;$

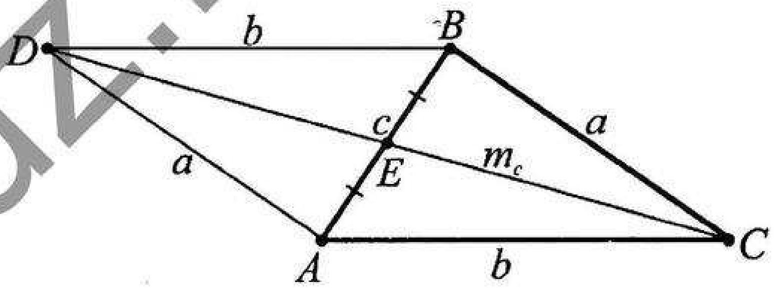
$(x+1)(4x^3-6x-2)=0;\ \ (x+1)(2x^3-3x-1)=0;$

$(x+1)((2x^3+2x^2)-(2x^2+2x)-(x+1))=0;$

$(x+1)(x+1)(2x^2-2x-1)=0;\quad x_1=-1; x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}; x_3=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$

Відповідь: $-1;\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, CE — медіана, $AE=EB$. Продовжимо медіану CE так, що $CD=2CE$. Тоді $ACBD$ — паралелограм.



$AB^2+DC^2=$

$=2(AC^2+BC^2)$; $c^2+(2m_c)^2=2(b^2+a^2)$, звідки $a^2+b^2=\dfrac{c^2}{2}+2m_c^2=2\left(\dfrac{c^2}{4}+m_c^2\right)$.

Отже, $a^2+b^2=2\left(\left(\dfrac{c}{2}\right)^2+m_c^2\right)$.

4.1. $\sqrt{11-2\sqrt{28}}-\sqrt{11+2\sqrt{28}}=\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7\cdot4}+\left(\sqrt{4}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7\cdot4}+\left(\sqrt{4}\right)^2}$

$=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{4}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{4}\right)^2}=\left|\sqrt{7}-2\right|-\left|\sqrt{7}+2\right|=\left(\sqrt{7}-2\right)-\left(\sqrt{7}+2\right)=-4.$

4.2. Рівняння кола має вигляд: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де $O(a;\ b)$ — координати центра кола, R — радіус кола. Тоді $OA=OB=OC=R$. Точки $A(2;\ 9)$, $B(11;\ 0)$ і $C(-5;\ -4)$ належать колу, тому задовольняють його рівняння:

$$\begin{cases}(2-a)^2+(9-b)^2=R^2,\\(11-a)^2+(0-b)^2=R^2,\\(-5-a)^2+(-4-b)^2=R^2.\end{cases}$$

Прирівняємо перші два рівняння:
$4-4a+a^2+81-18b+b^2=121-22a+a^2+b^2$; $18a-18b=36$; $a-b=2$.
Аналогічно, прирівнявши друге й третє рівняння, одержимо: $4a+b=10$.
$\begin{cases}a-b=2,\\4a+b=10;\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,4,\\b=0,4.\end{cases}$ Тоді $O(2,4;\ 0,4)$. Підставивши координати центра в одне з рівнянь, одержимо: $(11-2,4)^2+0,4^2=R^2$; $R^2=74,12$. Шукане рівняння: $(x-2,4)^2+(y-0,4)^2=74,12$.
Відповідь: $(x-2,4)^2+(y-0,4)^2=74,12$.

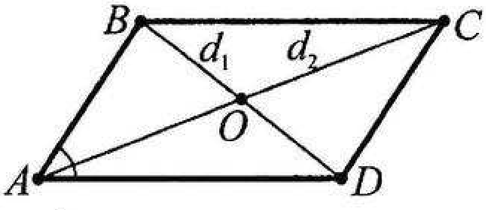
4.1. При $x = -3$ значення даного виразу дорівнює 0, тому:

$$x^3 - x^2 - 15x - 9 = (x^3 + 3x^2) - (4x^2 + 12x) - (3x + 9) =$$
$$= x^2(x+3) - 4x(x+3) - 3(x+3) = (x+3)(x^2 - 4x - 3).$$

Розв'яжемо рівняння: $x^2 - 4x - 3 = 0$; $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+3}$; $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$.

Маємо: $(x+3)(x^2 - 4x - 3) = (x+3)(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})$.

Відповідь: $(x+3)(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})$.



4.2. Нехай $ABCD$ — заданий паралелограм, BD і AC — його діагоналі, $BD = d_1$, $AC = d_2$. Позначимо $\angle DAB = \alpha$. Розглянемо ΔDAB. За теоремою косинусів $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. За теоремою косинусів з ΔCDA $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180 - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$. Помножимо ці рівності: $d_1^2 d_2^2 = \left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\right)\left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right)$;

$d_1^2 d_2^2 = \left(a^2 + b^2\right)^2 - \left(2ab\cos\alpha\right)^2$; $d_1^2 d_2^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2\cos^2\alpha$. Оскільки $a^4 + b^4 = d_1^2 d_2^2$, то $d_1^2 d_2^2 = d_1^2 d_2^2 + 2a^2b^2\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)$; $2a^2b^2\left(1 - 2\cos^2\alpha\right) = 0$;

$1 - 2\cos^2\alpha = 0$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}$;

1. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = 45°$; 2. $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = 135°$. Тоді гострий кут паралелограма дорівнює $180° - 45° = 45°$. В обох випадках гострий кут паралелограма дорівнює 45°.

4.1. $|x+2|+|x-1|-|x-4|>3$.

1) При $x<-2$: $-(x+2)-(x-1)+(x-4)>3; x<-8$. Отже $x\in(-\infty;-8)$;

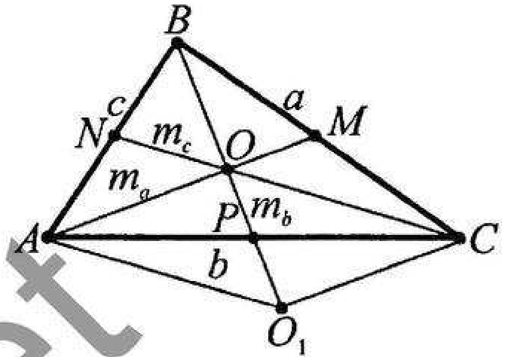
2) при $-2\le x<1: (x+2)-(x-1)+(x-4)>3; x>4$. Отже, $x\in\varnothing$;

3) при $1\le x<4: (x+2)+(x-1)+(x-4)>3; 3x>6; x>2$. Отже, $x\in(2;4)$;

4) при $x\ge 4: (x+2)+(x-1)-(x-4)>3; x>-2$. Отже, $x\in[4;+\infty)$.

Відповідь: $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якого проведено медіани $AM=5$ см, $BP=\sqrt{73}$ см, $CN=2\sqrt{13}$ см. Виразимо довжини сторін через медіани. Продовжимо відрізок OP: $OP=PO_1$. $AOCO_1$ — паралелограм.



За властивістю паралелограма одержимо:

$$AC^2+\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2=2\left(\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2\right);$$

$$AC^2=\frac{8}{9}m_a^2+\frac{8}{9}m_c^2-\frac{4}{9}m_b^2;\quad AC=b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2}.$$

Аналогічно: $BC=a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}$, $AB=c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}$.

Тоді: $a=\frac{2}{3}\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{73}\right)^2+2\cdot\left(2\sqrt{13}\right)^2-5^2}=\frac{2}{3}\sqrt{225}=10$ (см);

$b=\frac{2}{3}\sqrt{2\cdot5^2+2\cdot\left(2\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{73}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{81}=6$ (см);

$c=\frac{2}{3}\sqrt{2\cdot5^2+2\cdot\left(\sqrt{73}\right)^2-\left(2\sqrt{13}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{144}=8$ (см).

Оскільки $10^2=8^2+6^2$, то за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник ABC — прямокутний.

4.1. $|x-y|+|x+y|=2$. Нехай пара $(x_1;y_1)$ — розв'язок даного рівняння, тоді, використавши властивість модуля, отримуємо, що пари $(-x_1;y_1),(x_1;-y_1)$, $(-x_1;-y_1)$ теж корені даного рівняння. Наприклад, для пари $(-x_1;y_1)$ маємо: $|-x_1-y_1|+|-x_1+y_1|=|x_1+y_1|+|x_1-y_1|$. Будуємо графік рівняння в першій чверті координатної площини. Маємо: $|x-y|+x+y=2$.

1) При $x\geq y: x-y+x+y=2;\ 2x=2; x=1;$

2) при $x<y: -(x-y)+x+y=2;\ 2y=2; y=1.$

Для першої чверті одержимо графік див. рис. 1. Використавши симетрію розв'язків даного рівняння відносно осей координат, отримаємо кінцевий графік — квадрат з вершинами в точках: (1; 1), (–1; 1), (–1; –1), (1; –1) (рис. 2).

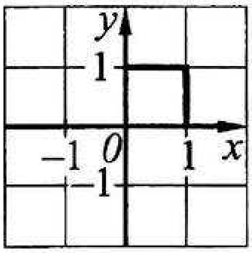


Рис. 1

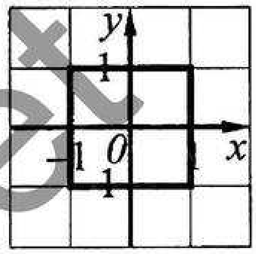
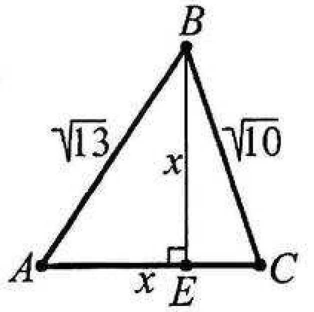


Рис. 2

4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, $BE\perp AC$, $AB=\sqrt{13}$ см, $BC=\sqrt{10}$ см, $AC=BE=x$ см. З ΔAEB $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=$ $=\sqrt{13-x^2}$ (см). З ΔCEB $EC=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{10-x^2}$ (см).



Рівняння: $\sqrt{13-x^2}+\sqrt{10-x^2}=x;$ $13-x^2+2\sqrt{(13-x^2)(10-x^2)}+$

$+10-x^2=x^2;$ $2\sqrt{(13-x^2)(10-x^2)}=3x^2-23;$

$\begin{cases}4(13-x^2)(10-x^2)=9x^4-138x^2+529,\\3x^2-23\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}520-52x^2-40x^2+4x^4=9x^4-138x^2+529,\\3x^2-23\geq 0;\end{cases}$

$\begin{cases}5x^4-46x^2+9=0,\\3x^2-23\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(5x^2-1)(x^2-9)=0,\\3x^2-23\geq 0;\end{cases}$

1. $\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{5}\text{ — не підходить},\\3x^2-23\geq 0;\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x^2=9,\\3x^2-23\geq 0;\end{cases}$ $x_1=3$, $x_2=-3$ — не підходить.

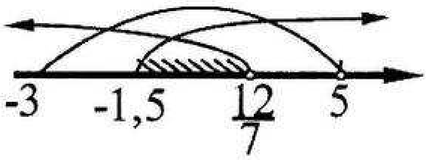
Отже, $AC=3$ см.

Відповідь: 3 см.

4.1. У квадратному рівнянні $4x^2-(3a+1)x-a-2=0$ дискримінант $D=9a^2+22a+33$ додатний для усіх a. Розглянемо функцію $f(x)=4x^2-(3a+1)x-a-2$. Її графіком є парабола вітками вгору. Для того щоб корені рівняння $4x^2-(3a+1)x-a-2=0$ належали проміжку $[-1;\,2)$, потрібно, щоб: 1) абсциса вершини параболи належала проміжку $[-1;\,2)$; 2) значення функції в точці -1 було невід'ємне; 3) значення функції в точці 2 було додатне. Звідси:

$$\begin{cases} -1\le -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3a+1}{2\cdot 4}<2, \\ f(-1)=4\cdot(-1)^2-(3a+1)\cdot(-1)-a-2=2a+3\ge 0, \\ f(2)=4\cdot 2^2-(3a+1)\cdot 2-a-2=-7a+12>0; \end{cases} \quad \begin{cases} -8\le 3a+1<16, \\ 2a\ge -3, \\ 7a<12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\le a<5, \\ a\ge -1{,}5, \\ a<\dfrac{12}{7}; \end{cases}$$



$$a\in\left[-1{,}5;\ 1\frac{5}{7}\right).$$

Відповідь: $a\in\left[-1{,}5;\ 1\dfrac{5}{7}\right)$.

4.2. Нехай $ABCD$ — задана трапеція, AC і DB — її діагоналі, $S_{\Delta AOB}=n^2$, $S_{\Delta DOC}=k^2$. $\Delta AOB\sim\Delta COD$;

$\left(\dfrac{OA}{OC}\right)^2=\dfrac{n^2}{k^2}$; $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{n}{k}$. Аналогічно $\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{n}{k}$.

ΔAOD і ΔDOC мають однакову висоту, опущену з точки D, тому їх площі відносяться як основи OA і OC відповідно, тобто $\dfrac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta DOC}}=\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{n}{k}$;

$$S_{\Delta AOD}=\frac{n}{k}\cdot S_{\Delta DOC}=\frac{n}{k}\cdot k^2=nk.$$

Аналогічно $S_{\Delta BOC}=\dfrac{n}{k}\cdot S_{\Delta DOC}=\dfrac{n}{k}\cdot k^2=nk$.

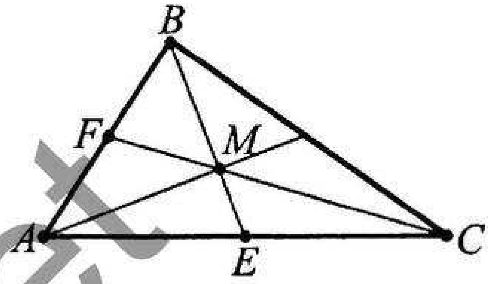
Отже, $S_{\text{тр.}}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta DOC}+S_{\Delta AOD}=n^2+nk+k^2+nk=(n+k)^2$.

4.1. $2x^2-8x+3=0$; $x^2-4x+\dfrac{3}{2}=0$. Якщо x_1, x_2 — корені рівняння, то за теоремою Вієта: $x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{2}, x_1+x_2=4$. Звідси: $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=$

$$=\sqrt{x_1^2-2x_1\cdot x_2+x_2^2}=\sqrt{(x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2)-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=$$

$$=\sqrt{4^2-4\cdot\frac{3}{2}}=\sqrt{10}.$$

Відповідь: $\sqrt{10}$.



4.2. Розглянемо ΔEMC і ΔAME. У них спільна висота, опущена з вершини M і $AE=EC$, тому $S_{EMC}=S_{AME}$. Аналогічно $S_{AMF}=S_{FMB}$, оскільки у них спільна висота, опущена з вершини M і $AF=FB$. Тому $S_{EMFA}=S_{FMB}+S_{EMC}$. Розглянемо ΔFMB і ΔBMC. У них спільна висота, опущена з вершини B і $\dfrac{FM}{MC}=\dfrac{1}{2}$. Отже, основи цих трикутників, а тим самим і площі відносяться як $\dfrac{S_{FMB}}{S_{BMC}}=\dfrac{1}{2}$. Отже, $S_{BMF}=\dfrac{1}{2}S_{BMC}$. Аналогічно $S_{EMC}=\dfrac{1}{2}S_{BMC}$.

Отже, $S_{BMF}+S_{EMC}=\dfrac{1}{2}S_{BMC}+\dfrac{1}{2}S_{BMC}=S_{BMC}$. Звідки $S_{BMC}=S_{EMFA}$.

4.1. $x^4-3x^3-6x^2+12x+16=0;$

$(x^4-2x^3-4x^2)+(-x^3+2x^2+4x)+(-4x^2+8x+16)=0;$

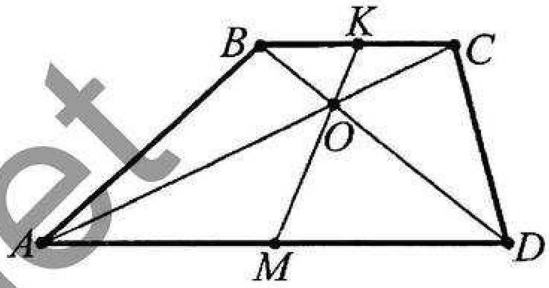
$x^2(x^2-2x-4)-x(x^2-2x-4)-4(x^2-2x-4)=0;$

$(x^2-2x-4)(x^2-x-4)=0;$

1) $x^2-2x-4=0;\ x_1=1+\sqrt{5};\ x_2=1-\sqrt{5};$

2) $x^2-x-4=0;\ x_3=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\ x_4=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}.$

Відповідь: $1+\sqrt{5};1-\sqrt{5};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}.$



4.2. Нехай $ABCD$ — задана трапеція, AC і BD — її діагоналі, що перетинаються у точці O. Виберемо точку M — середину відрізка AD, тоді $AM = MD$ і OM — медіана трикутника AOD. Нехай $AM = MD = x$, трикутники ΔAOD і ΔCOB подібні з коефіцієнтом подібності k: $\Delta AOD \overset{k}{\sim} \Delta COB$ (за двома кутами). Тоді $BC = 2xk$. Продовжимо відрізок OM до перетину з BC, K — точка перетину OM і BC. $\Delta AOM \sim \Delta COK$ (за двома кутами) з тим же коефіцієнтом подібності k. Отже, $KC = kx$. Оскільки $BK = BC - KC = 2xk - xk = xk$, то $BK = KC$, тобто K — середина BC. Отже, точка O належить прямій KM.

4.1. $\begin{cases}(m+1)x+y=3,\\ 2x-(m-2)y=6.\end{cases}$ При $m=2$ отримаємо систему $\begin{cases}3x+y=3,\\ 2x=6,\end{cases}$

яка має розв'язок ($x=3$; $y-6$).

При $m\neq 2$ система не має розв'язків, якщо $\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{1}{-(m-2)}\neq\dfrac{3}{6}$.

Звідси: $-(m+1)(m-2)=2$; $-m^2+m+2=2$; $m^2-m=0$; $m=0$ або $m=1$.

Значення $m=0$ не підходить, бо $\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{6}$.

Якщо $m=1$, то $\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{3}{6}$.

Отже, система не має розв'язків, якщо $m=1$.

4.2. Квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. Тому:

$|4\vec{a}+3\vec{b}|^2=(4\vec{a}+3\vec{b})^2$. Звідси

$$\left|4\vec{a}+3\vec{b}\right|=\sqrt{\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{16\vec{a}^2+24\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^2}=\sqrt{16|\vec{a}|^2+24|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ+9|\vec{b}|^2}=$$

$$=\sqrt{16\cdot3^2-24\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}+9\cdot2^2}=\sqrt{144-72+36}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}.$$

Відповідь: $6\sqrt{3}$.

4.1. $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ (xy+8)(x+y)=2; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=19, \\ 3(xy+8)(x+y)=6. \end{cases}$

Додамо рівняння системи:

$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2+3xy+24)=25, \\ 3(x+y)(xy+8)=6; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)((x+y)^2+24)=25, \\ (x+y)(xy+8)=2; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y)^3+24(x+y)-25=0, \\ (x+y)(xy+8)=2; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y)^3-1+24(x+y)-24=0, \\ (x+y)(xy+8)=2; \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y-1)((x+y)^2+(x+y)+1)+24(x+y-1)=0, \\ (x+y)(xy+8)=2; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+y-1)((x+y)^2+(x+y)+25)=0, \\ (x+y)(xy+8)=2. \end{cases}$

У першому рівнянні системи другий множник завжди більший за нуль, тому:

$\begin{cases} x+y-1=0, \\ (x+y)(xy+8)=2; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-x, \\ 1\cdot(x(1-x)+8)=2; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-x, \\ x^2-x-6=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1-x, \\ x_1=3; x_2=-2; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=-2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=3. \end{cases}$

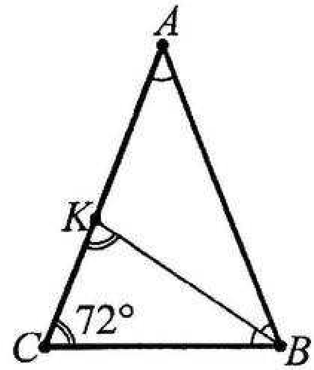
Відповідь: (3; –2), (–2; 3).

4.2. Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник ($\angle ACB = \angle ABC = 72°$), BK — бісектриса кута B, $BK = l$, $\angle CBK = \angle KBA = 36°$. $\angle A = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

У ΔBKA $\angle KBA = \angle A = 36°$, тоді $KA = KB = l$.

У ΔKBC $\angle CKB = 180° - (72° + 36°) = 72°$.

Отже, ΔKBC — рівнобедрений $CB = KB = l$ і $\Delta ABC \sim \Delta BKC$.



Нехай $AB = x$ см. $KC = CA - KA = x - l$. Тоді $\dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BC}{CK}$;

$\dfrac{x}{l} = \dfrac{l}{x-l}$; $x(x-l) = l^2$; $x^2 - xl - l^2 = 0$; $x_1 = l\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ — не підходить,

$x_2 = l\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Отже, $BC = l$, $AC = AB = l\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: l, $l\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $l\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

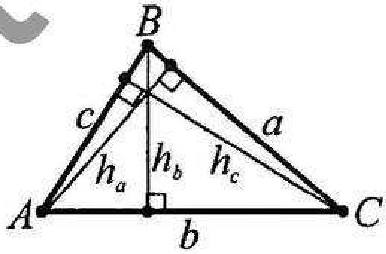
4.1. $\frac{x}{x^2+3x+2}-\frac{x}{x^2+5x+2}=\frac{1}{24}$. ОДЗ: $x^2+3x+2\neq 0, x^2+5x+2\neq 0;$ $x\neq -1,$ $x\neq -2, x\neq \frac{-5+\sqrt{17}}{2}, x\neq \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$. Нехай $x^2+4x+2=y$, тоді:

$\frac{x}{y-x}-\frac{x}{y+x}=\frac{1}{24};$ $\frac{x^2+xy+x^2-xy}{y^2-x^2}=\frac{1}{24};$ $\frac{2x^2}{y^2-x^2}=\frac{1}{24};$ $48x^2=y^2-x^2;$ $49x^2=y^2;$ $y=\pm 7x$. Повертаємось до заміни:

1) $x^2+4x+2=7x;$ $x^2-3x+2=0;$ $x_1=1, x_2=2;$

2) $x^2+4x+2=-7x;$ $x^2+11x+2=0;$ $x_3=\frac{-11-\sqrt{113}}{2}, x_4=\frac{-11+\sqrt{113}}{2}$.

Відповідь: $\frac{-11-\sqrt{113}}{2};\frac{-11+\sqrt{113}}{2};1;2$.



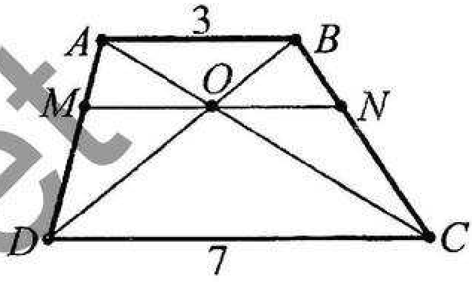
4.2. Площа трикутника: $S=\frac{1}{2}ah_a,$ $S=\frac{1}{2}bh_b,$ $S=\frac{1}{2}ch_c$. Звідки $h_a=2S:a;$ $h_b=2S:b;$ $h_c=2S:c$. Одержимо: $\left(\frac{2S:c}{2S:a}\right)^2+\left(\frac{2S:c}{2S:b}\right)^2=1;$ $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1;$

$a^2+b^2=c^2$, звідки за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник прямокутний.

4.1. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geq 0$. Перетворимо ліву частину нерівності:

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)=$$
$$=a^2b+b^2a-2abc+b^2c+bc^2-2abc+a^2c+ac^2-2abc=$$
$$=(a^2b-2abc+bc^2)+(b^2a-2abc+ac^2)+(b^2c-2abc+a^2c)=$$
$$=b(a^2-2ac+c^2)+a(b^2-2bc+c^2)+c(b^2-2ab+a^2)=$$
$$=b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(b-a)^2.$$

Оскільки a, b і c — додатні числа, то кожен з доданків отриманого виразу невід'ємний, отже, $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geq 0$, для будь-яких додатних чисел a, b і c.



4.2. Нехай $ABCD$ — задана трапеція ($AB\|DC$), AC і BD — її діагоналі, які перетинаються у точці O, $MN\|DC$, $O\in MN$, $AB=3$ см, $DC=7$ см.

$\Delta AOB\sim\Delta COD$. Маємо: $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}=\frac{AB}{DC}=\frac{3}{7}$;

$\Delta ABD\sim\Delta MOD$. $\frac{AB}{MO}=\frac{BD}{OD}$; $\frac{3}{MO}=\frac{DO+OB}{OD}$; $\frac{3}{MO}=1+\frac{OB}{OD}$; $\frac{3}{MO}=1+\frac{3}{7}$;

$\frac{3}{MO}=\frac{10}{7}$; $MO=\frac{21}{10}$ (см).

Аналогічно: $\frac{3}{NO}=\frac{10}{7}$; $NO=\frac{21}{10}$ (см). Отже, $MN=\frac{21}{10}+\frac{21}{10}=4,2$ (см).

Відповідь: 4,2 см.

ВАРІАНТ №45

Частина 4

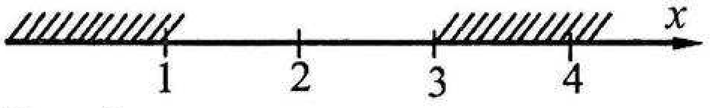
4.1. $|x-2|+|x-3|\geq|x-4|$.

1) При $x<2$: $-(x-2)-(x-3)\geq-(x-4); x\leq 1$;

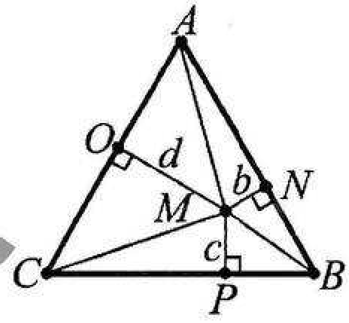
2) при $2\leq x<3: (x-2)-(x-3)\geq-(x-4); x\geq 3$, тобто $x\in\varnothing$;

3) при $3\leq x<4: (x-2)+(x-3)\geq-(x-4); x\geq 3$, тобто $x\in[3;4)$;

4) при $x\geq 4: (x-2)+(x-3)\geq(x-4); x\geq 1$, тобто $x\in[4;+\infty)$.



Відповідь: $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, M — точка всередині трикутника, $MN=b$, $MP=c$, $MO=d$. Нехай $AC=AB=BC=a$, а висоти трикутника — h.

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AMB}+S_{\Delta BMC}+S_{\Delta CMA}$; $\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}ad$,

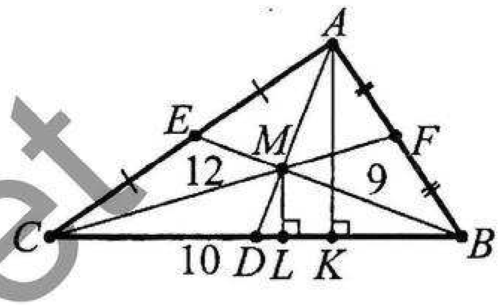
звідки $h=b+c+d$.

4.1. $\dfrac{\sqrt{m-2\sqrt{m-2}-1}}{\sqrt{m-2}-1}+1=\dfrac{\sqrt{m-2-2\sqrt{m-2}+1}}{\sqrt{m-2}-1}+1=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{m-2}\right)^2-2\sqrt{m-2}+1}}{\sqrt{m-2}-1}+1=$

$=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{m-2}-1\right)^2}}{\sqrt{m-2}-1}+1=\dfrac{\left|\sqrt{m-2}-1\right|}{\sqrt{m-2}-1}+1.$ Якщо $m=2{,}98$, то $\dfrac{\left|\sqrt{m-2}-1\right|}{\sqrt{m-2}-1}+1=$

$=\dfrac{\left|\sqrt{2{,}98-2}-1\right|}{\sqrt{2{,}98-2}-1}+1=\dfrac{\left|\sqrt{0{,}98}-1\right|}{\sqrt{0{,}98}-1}+1=\dfrac{1-\sqrt{0{,}98}}{\sqrt{0{,}98}-1}+1=-1+1=0.$

Відповідь: 0.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, $BC=10$ см, CF і BE — медіани, $CF=12$ см, $BE=9$ см. M — точка перетину медіан, тому $BM=\dfrac{2}{3}BE=\dfrac{2}{3}\cdot 9=$ $=6$ (см); $CM=\dfrac{2}{3}CF=\dfrac{2}{3}\cdot 12=8$ (см). Тоді трикутник CMB прямокутний, бо $6^2+8^2=10^2$ і $S_{\Delta CMB}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ (см^2).

$\dfrac{AD}{MD}=\dfrac{3}{1}$. Тоді для висот AK і ML з подібних трикутників AKD і MLD одержимо: $\dfrac{AK}{ML}=\dfrac{3}{1}$ і $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CMB}}=\dfrac{3}{1}$, бо трикутники мають однакові основи і їхні площі відносяться як висоти. Отже, $S_{\Delta ABC}=3S_{\Delta CMB}=3\cdot 24=72$ (см^2).
Відповідь: 72 см^2.

4.1. $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|(x^2+x-12)\le 0$. ОДЗ: $x\ne 2$.

1. При $x=4$ нерівність виконується.

2. При $x\ne 4$ вираз $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$ набуває лише додатних значень, тому знайдемо розв'язки нерівності: $x^2+x-12\le 0$; $(x+4)(x-3)\le 0$. Урахувавши ОДЗ, отримаємо: $x\in[-4;2)\cup(2;3]\cup\{4\}$.

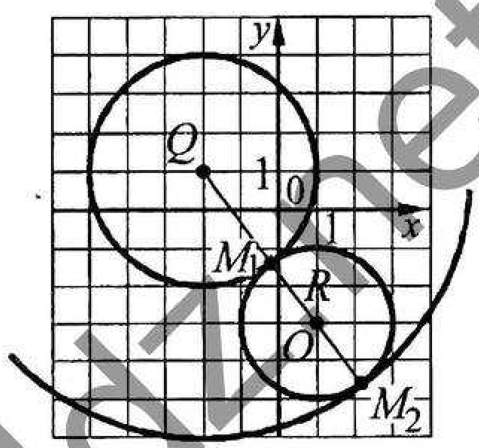
Відповідь: $x\in[-4;2)\cup(2;3]\cup\{4\}$.

4.2. $S_\Delta=\frac{1}{2}h_a a$, звідки $h_a=\frac{2S}{a}$. Аналогічно $h_b=\frac{2S}{b}$; $h_c=\frac{2S}{c}$.

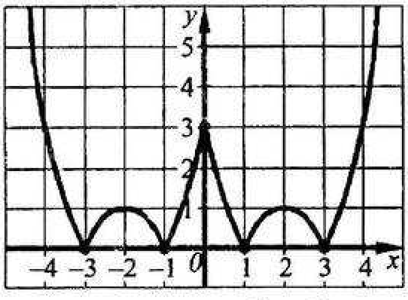
$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}$. З іншого боку, $S=pr$, де $p=\frac{a+b+c}{2}$. Тому $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{1}{r}$.

4.1. При $n = 1$ значення виразу $4^n + 15n - 1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$ кратне 9. Нехай при $n = k$ значення виразу $4^k + 15k - 1$ кратне 9.
Доведемо, що значення виразу кратне 9 при $n = k + 1$.
$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = 4 \cdot 4^k + 60k - 4 - 45k + 18 =$
$= 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k - 2)$ — ділиться на 9. Отже, значення виразу $4^n + 15n - 1$ кратне 9 для будь-якого натурального n.

4.2. Нехай задано коло $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ з центром у точці $O(1; -3)$ радіуса $R = 2$. Шукане коло має центр у точці $Q(-2;1)$, а радіус $QM_1 = QO - M_1O$ або $QM_2 = QO + M_2O$. $QO = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.
$QM_1 = 5 - 2 = 3$ (см); $QM_2 = 5 + 2 = 7$ (см). Отже, рівняння шуканих кіл: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$; $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 49$.

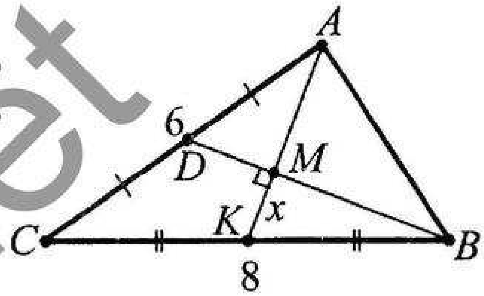


Відповідь: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$; $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 49$.



4.1. Побудуємо графік функції $y=\left|x^2-4|x|+3\right|$. Оскільки $y(-x)=y(x)$, то побудуємо спочатку графік для $x\geq 0$: $y=\left|x^2-4x+3\right|$. $y=x^2-4x+3$ — парабола з вітками вгору, яка проходить через точки (0; 3), (1; 0), (3; 0) з вершиною в точці (2; –1). Відобразивши симетрично осі абсцис від'ємні значення параболи, отримаємо графік функції $y=\left|x^2-4x+3\right|$ для $x\geq 0$. Відобразивши симетрично отриманий графік відносно до осі ординат отримаємо загальний графік функції $y=\left|x^2-4|x|+3\right|$. Пряма $y=a$ має з побудованим графіком рівно шість точок перетину лише при $a=1$.

Відповідь: 1.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, M — точка перетину медіан BD і AK, $\angle AMB = 90°$. $BK = 8 : 2 = 4$ (см). $AD = 6 : 2 = 3$ (см). Нехай $MK = x$ см. Тоді одержимо:

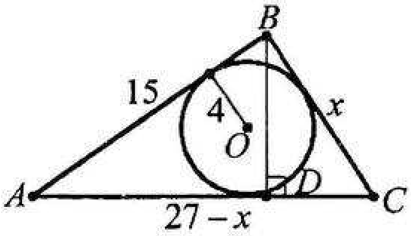
$AM = 2x$; $BM=\sqrt{16-x^2}$; $DM=\sqrt{9-4x^2}$;

$$2DM = BM;\ 2\sqrt{9-4x^2}=\sqrt{16-x^2};\ 36-16x^2=16-x^2;\ 15x^2=20;\ x^2=\frac{4}{3}.$$

$$AB^2=AM^2+BM^2=4x^2+16-x^2=16+3\cdot\frac{4}{3}=20.\ AB=2\sqrt{5}\ (\text{см}).$$

Відповідь: $2\sqrt{5}$ см.

4.1. $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}=\frac{n(n^2+3n+2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Оскільки n — натуральне число, то в чисельнику одержаного виразу міститься добуток трьох послідовних чисел. Отже, одне з них кратне 3, а інше — кратне 2, тобто значення чисельника кратне 6.



4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому $AB = 15$ см, $AC + BC = 27$ (см). Нехай $BC = x$ см, Тоді $AC = (27 - x)$ см. За теоремою косинусів $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C$; $\cos C = \frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC \cdot AC}$.

$p_{\Delta ABC} = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{15+27}{2} = 21$ (см); $S = pr$, $S = 21 \cdot 4 = 84$ (см^2). За формулою Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-15)(21-x)(21-(27-x))}=$ $=\sqrt{21\cdot 6\,(21-x)(x-6)}=\sqrt{126(27x-x^2-126)}$. $\sqrt{126(27x-x^2-126)}=84$; $27x - x^2 - 126 = 56$; $x^2 - 27x + 182 = 0$; $x_1 = 13$ см, $x_2 = 14$ (см), якщо ж $BC = 13$ см, то $AC = 27 - 13 = 14$ (см). Якщо $BC = 14$ см, то $AC = 13$ см. В обох випадках $\cos C = \frac{13^2+14^2-15^2}{2\cdot 13\cdot 14}=\frac{169+196-225}{364}=\frac{140}{364}=\frac{5}{13}$.

Відповідь: $\frac{5}{13}$.

ЗМІСТ

Частини 1–3

Частина 4

ПОШУК ВАРІАНТІВ

Варіант	Пошук за відповіддю до 1.1	Пошук за завданням 3.1
1	А) 5; Б) 6; В) 4;	Різниця половини одного числа ...
2	А) $м^3$	Перша бригада може виконати ...
3	А) 5; Б) 6; В) 7;	У кінотеатрі було 390 місць, ...
4	А) 5009 м;	Знайдіть три послідовних ...
5	А) 71 км/год;	За 4 футбольних і 3 волейбольних ...
6	А) $24a$;	Потяг мав проїхати 300 км.
7	А) 31 см;	Один з робітників виконує ...
8	А) –8;	Рибалка відправився на човні з ...
9	А) $\frac{5}{3}$;	Потроєна сума цифр двоцифрового ...
10	А) 9 см;	Один оператор комп'ютерного набору повинен набрати рукопис, що складається ...
11	А) $30x$;	Із двох міст, відстань між якими 24 км, ...
12	А) 1 : 5 000 000	Для наповнення басейну через ...
13	А) $0,7x = 5,4$;	У двох ящиках знаходяться ...
14	А) $\frac{17}{16}, \frac{7}{6}$;	Знайдіть п'ять послідовних ...
15	А) 3,5 і 15,5;	Із пункту A в пункт B, відстань ...
16	А) 1990;	Два трактористи зорали поле ...
17	А) 30,1;	Деяке двоцифрове натуральне число ...
18	А) 29;	Один оператор комп'ютерного набору набирав певний рукопис протягом ....
19	А) $\frac{7}{5} = 1\frac{5}{2}$;	Дві бригади мали разом виготовити ...
20	А) 1 год 5 хв;	Добуток цифр двоцифрового ...
21	А) 0;	Катер проплив 40 км за течією річки ...
22	А) 8 кг 200 г;	З міста в село, відстань між якими ...
23	А) 3;	Автомобіль мав проїхати 1200 км ...
24	А) $2\frac{2}{9}$;	Знаменник звичайного нескоротного ...
25	А) $3\frac{7}{10}$;	Скільки грамів 3-відсоткового і ...

Варіант	Пошук за відповіддю до 1.1	Пошук за завданням 3.1
26	А) 3590;	З міста *А* в місто *В* виїхав велосипедист.
27	А) 27 хв;	Два автомобілі одночасно виїхали ...
28	А) 18;	Дано двоцифрове натуральне число, ...
29	А) $\frac{1}{2}$;	Знайдіть чотири послідовних ...
30	А) 50 ц;	Дві бригади, працюючи разом, зорали ...
31	А) 300;	Відстань між двома пристанями ...
32	А) 37 см;	Чисельник звичайного нескоротного ...
33	А) 5915;	Власна швидкість човна дорівнює ...
34	А) 118°;	Катер проплив 22 км за течією ...
35	А) 28;	Дві бригади повинні виготовити ...
36	А) 525;	Сплав містив 20 г золота. Після того ...
37	А) 24 хв > $\frac{3}{10}$ год;	Човен за 5 год руху за течією і 2 год ...
38	А) 32;	До овочевої ятки апельсинів завезли ...
39	А) 5; Б) 7; В) 10;	З двох пунктів, відстань між якими ...
40	А) 515;	Потяг, що був затриманий на 1 год, ...
41	А) 3031 < 3021;	Човен, власна швидкість якого ...
42	А) 6 год 26 хв;	Через одну трубу басейн ...
43	А) 73 500;	Два робітники запланували разом ...
44	А) $5\frac{12}{16}$;	Для перевезення 60 т вантажу ...
45	А) 12,5;	Слюсар може виконати замовлення ...
46	А) 8 941 536;	Щоб ліквідувати запізнення на 24 хв, ...
47	А) 155 кг;	Турист проплив проти течії 18 км ...
48	А) $3 \cdot x = 0$;	У сплав міді з цинком, що містить ...
49	А) $\frac{1}{17}$ год;	О дев'ятій ранку від пристані ...
50	А) 22,52;	Два робітники, працюючи разом, ...

М. В. Березняк

МАТЕМАТИКА

Державна підсумкова атестація

9 клас

Вказівки та розв'язки

Обкладинка *Оксани Корнеєвої*

Формат 60×84/16. 9,33 ум. др. арк., 7,78 обл.-вид. арк.
Тираж 5000. Замовлення №13-90.

Видавець і виготовлювач Редакція газети «Підручники і посібники».
46020, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352)43-15-15; 43-10-21.
E-mail: pp@pp.utel.net.ua www.pp.utel.net.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 765 від 11.01.2002 р.
Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.
Тел.: (0352)42-43-76; 097-50-35-376; 094-97-40-376