

# ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

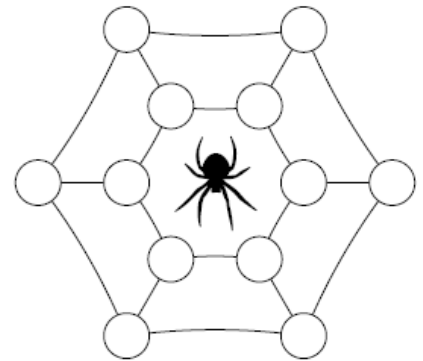
## II етап

9 листопада 2019 р.

### 6 клас

1. Сума 2019 натуральних чисел рівна 2020. Якою стане сума, якщо найбільший доданок збільшити в десять разів? Відповідь обґрунтуйте.
2. Робінзон Крузо кожного другого дня поповнює запаси води з джерела, кожний третій день збирає фрукти і кожний п'ятий день ходить на полювання. Сьогодні 13 вересня. У Робінзона важкий день: він повинен зробити всі три справи. Коли у Робінзона буде наступний важкий день?
3. Кульбабка зранку розпускається. Два дні цвіте жовтим, на третій день зранку стає білою, а ввечері облітає. Вчора вдень на галявині було 20 жовтих і 14 білих кульбабок, а сьогодні 15 жовтих і 11 білих.
  - а) Скільки жовтих кульбабок було на галявині позавчора?
  - б) Скільки білих кульбабок буде на галявині завтра?

4. Павук сплів павутиння, і в кожний з його 12 вузликів потрапили по одній мушці або одному комару. При цьому, кожна комаха виявилась сполученою відрізком павутиння рівно з двома комарами.



- а) Намалюйте приклад, як це могло б бути (записавши всередині вузликів літери М і К).
  - б) Скільки мушок і скільки комарів попалися в павутиння? Відповідь обґрунтуйте.
5. Василь та Петро живуть у горах і люблять ходити один до одного у гості. При цьому у гору вони піднімаються із швидкістю 3 км/год, а з гори спускаються із швидкістю 6 км/год (горизонтальних ділянок дороги немає). Василь порахував, що до Петра він йде 2 години 30 хвилин, а назад 3 години 30 хвилин. Яка відстань між будинками Василя і Петра?

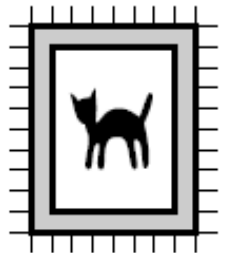
# ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

## II етап

9 листопада 2019 р.

### 7 клас

1. Ньют хоче перевезти дев'ять фантастичних звірів вагою 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 і 10 кг в трьох валізах по три звіра у кожній. Кожна валіза повинна важити менше 20 кг. Якщо вага якогось звіра буде ділитися на вагу іншого звіра з тієї ж валізи, то вони поб'ються. Як Ньюту розподілити звірів по валізах, щоб ніхто не побився?
2. Знайти останні дві цифри числа  $21^{2019} - 11^{2020}$ .
3. Чотири сьомих класи поїхали на екскурсію. Коли 7А і 7Б пішли в музей, а 7В і 7Г – обідати в кафе, Марія Петрівна порахувала, що у музеї на 15 семикласників більше, ніж у кафе. А коли ввечері 7А і 7В пішли у парк, а 7Б і 7Г – у театр, Марія Петрівна нарахувала у парку на 8 семикласників менше, ніж у театрі. Чи вміє Марія Петрівна рахувати?
4. Знайти всі двоцифрові числа, які збільшуються у 8,5 разів, якщо між їх цифрами вписати 0.
5. Назар намалював на листку в клітинку прямокутник (по клітинкам) і намалював в ньому картинку. Після цього він намалював навколо картини рамку шириною в одну клітинку (див. рис.). Виявилось, що площа картини рівна площі рамки. Які розміри могла мати Назарова картинка? (Перелічіть всі можливі варіанти, та доведіть, що інших немає.)



# ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

## II етап

9 листопада 2019 р.

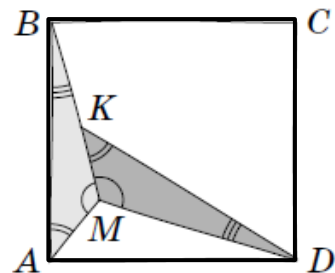
### 8 клас

1. Після повернення цирку з гастролей, знайомі вирішили порозпитувати Лева Львовича про «пасажирів» його автофургона: «Тигри були?» – «Так, їх було у сім разів більше, ніж не тигрів». «А мавпи були?» – «Так, їх було у сім разів менше, ніж не мавп». «А леви були?» Дайте відповідь за Лева Львовича.

2. Спростіть вираз:

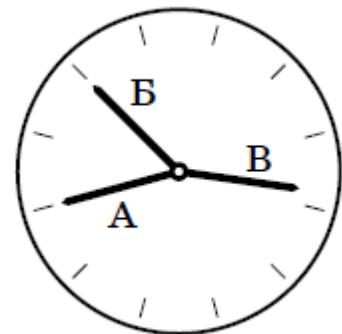
$$\frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)}$$

3. Два рівних трикутники містяться всередині квадрата, як показано на рисунку. Знайти їх кути.



4. Частина графіка лінійної функції, що розташована у другій координатній чверті, разом з осями координат утворюють трикутник. У скільки разів зміниться його площа, якщо кутівий коефіцієнт функції збільшити у два рази, а вільний член в два рази зменшити?

5. Для проходження квест-кімнати дітям потрібно було визначити годину, яку показував «зачарований» годинник (див. рисунок). Він відрізняється від звичайного годинника тим, що на циферблаті відсутні цифри, і взагалі не зрозуміло, де у годинника верх; та ще й годинна, хвилинна та секундні стрілки мають однакову довжину. Яку годину показував годинник?



Стрілки А і Б на рисунку дивляться рівно на позначки, а стрілка В трошки не дійшла до позначки.

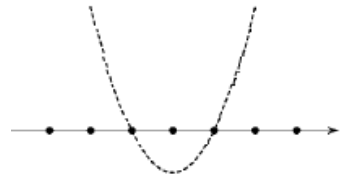
# ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

## II етап

9 листопада 2019 р.

### 9 клас

1. На рисунку зображено графік зведеного квадратного тричлена (вісь ординат стерлась, відстань між сусідніми відміченими точками рівна 1) Чому рівний дискримінант цього тричлена? Відповідь обґрунтуйте.



2. Доведіть, що при всіх додатних  $x$  та  $y$  виконується нерівність

$$x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}.$$

3. В трапеції  $ABCD$  основа  $AD$  в чотири рази більша, ніж  $BC$ . Пряма, що проходить через середину діагоналі  $BD$  і паралельна  $AB$ , перетинає відрізок  $CD$  в точці  $K$ . Знайдіть відношення  $DK:KC$ .
4. Квадрат  $8 \times 8$  розрізали на квадрати  $2 \times 2$  і прямокутники  $1 \times 4$ . При цьому загальна довжина розрізів виявилась рівною 54. Скільки фігурок кожного виду отримали?
5. Гарі і Герміона розклали на столі 13 різних гральних карт. Кожна карта лежить в одному з двох положень: сорочкою вверху або сорочкою вниз. Гравці повинні по черзі перевертати по одній карті. Програє той гравець, після ходу якого повториться якась з попередніх комбінацій (включаючи початкову). Перший хід зробила Герміона. Хто зможе виграти незалежно від того, як буде грати суперник? Відповідь поясніть.

# ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

## II етап

9 листопада 2019 р.

### 10 клас

1. Графік квадратичної функції  $y = ax^2 + c$  перетинає осі координат у вершинах правильного трикутника. Знайти  $ac$ .
2. Чи існує таке натуральне число  $n$ , більше за 1, щоб значення виразу  $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$  було натуральним числом?
3. З вершини тупого кута  $A$  трикутника  $ABC$  опущена висота  $AD$ . Коло з центром у точці  $D$  і радіусом  $DA$ , перетинає сторони  $AB$  і  $AC$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Знайдіть  $AC$ , якщо  $AB = c$ ,  $AM = m$ ,  $AN = n$ .
4. У просторі (але не в одній площині) розташовані шість різних точок:  $A, B, C, D, E, F$ . Відомо, що відрізки  $AB$  і  $DE$ ,  $BC$  і  $EF$ ,  $CD$  і  $FA$  попарно паралельні. Доведіть, що ці ж відрізки попарно рівні.
5. 100 ввімкнутих і 100 вимкнених ліхтариків випадковим чином розкладені у дві коробки. У кожного ліхтарика є кнопка, яка виключає ліхтарик, який світиться і включає ліхтарик, який не світиться. Ваші очі зав'язані, і Ви не можете бачити, чи світиться ліхтарик. Але Ви можете перекладати ліхтарики з коробки в коробку і натискати на їх кнопки. Придумайте спосіб, як досягнути того, щоб ліхтариків, які світяться в обох коробках було порівну. Відповідь обґрунтуйте.

# ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

## II етап

9 листопада 2019 р.

### 11 клас

1. Знайти  $\log_{175} 60$ , якщо  $\log_5 7 = a$  і  $\log_{12} 84 = b$ .

2. Визначити знак числа  $(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1)$ .

3. При яких значеннях  $x$  і  $y$  справджується рівність

$$x^2 + (1 - y)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}?$$

4. Чи існує тетраедр  $ABCD$ , у якому  $AB = AC = AD = BC$ , а суми плоских кутів при кожній вершині  $B$  і  $C$  рівні по  $150^\circ$ ?

5. 100 ввімкнутих і 100 вимкнених ліхтариків випадковим чином розкладені у дві коробки. У кожного ліхтарика є кнопка, яка виключає ліхтарик, який світиться і включає ліхтарик, який не світиться. Ваші очі зав'язані, і Ви не можете бачити, чи світиться ліхтарик. Але Ви можете перекладати ліхтарики з коробки в коробку і натискати на їх кнопки. Придумайте спосіб, як досягнути того, щоб ліхтариків, які світяться в обох коробках було порівну. Відповідь обґрунтуйте.