***Тестові завдання ІІІ етапу Всеукраїнської***

***олімпіади з математики у місті Києві***

***(2021–2022 навчальний рік)***

***ІІ тур***

*«Старайся легко приймати те, що неминуче».*

*Платон*

7 клас

**1**. Трійка простих чисел $p, q, r$ задовольняє рівності: $p\left(p+1\right)+q\left(q+1\right)=r(r+1)$. Яке найбільше значення може приймати сума $p+q+r$?

***Відповідь:***$7$.

**2**. По колу розташовані білі, сірі та чорні числа. Кожне біле число дорівнює півсумі двох сусідніх з ним чисел, кожне сіре число дорівнює сумі двох сусідніх з ним чисел, а кожне чорне — подвоєній сумі двох сусідніх з ним чисел. Відомо, що сума всіх сірих чисел $G$ та сума всіх чорних чисел $B$ не дорівнюють нулю. Зайдіть відношення $\left|10∙G:B\right|$.

***Відповідь:***$15$.

**3**. Знайдіть найменше натуральне число $n>1$, для якого справджується умова $n^{3}-1 \vdots 2022n-1$.

***Відповідь:***$4088484$.

8 клас

**1**. Знайдіть усі пари натуральних чисел $x, y$, для яких числа $x^{2}+8y$ та $y^{2}+8x$ є точними квадратами. У відповідь суму $x+y$ для тієї пари, для якої ця сума є максимальною.

***Відповідь:***$32$.

**2**. По колу розташовані білі, сірі та чорні числа. Кожне біле число дорівнює півсумі двох сусідніх з ним чисел, кожне сіре число дорівнює сумі двох сусідніх з ним чисел, а кожне чорне — подвоєній сумі двох сусідніх з ним чисел. Відомо, що сума всіх сірих чисел $G$ та сума всіх чорних чисел $B$ не дорівнюють нулю. Зайдіть відношення $\left|10∙G:B\right|$.

***Відповідь:***$15$.

**3**. Пара натуральних чисел $n, k$ задовольняє рівності $(n+1)^{n}=2n^{k}+3n+1$. Яке найбільше значення може приймати сума $n+k$?

***Відповідь:***$6$.

9 клас

**1**. Знайдіть усі пари натуральних чисел $x, y$, для яких числа $x^{2}+8y$ та $y^{2}+8x$ є точними квадратами. У відповідь суму $x+y$ для тієї пари, для якої ця сума є максимальною.

***Відповідь:***$32$.

**2**. Прості числа $p$ та $q$ задовольняють умову: $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$

для деякого натурального числа $n$. Знайдіть найбільше можливе значення різниці $q-p$.

***Відповідь:***$5$.

**3**. Знайдіть найбільше двоцифрове число $n$, для яких існують такі цілі невід’ємні числа $a\_{1}$, ..., $a\_{n}$, для яких

$$\frac{1}{2^{a\_{1}}}+\frac{1}{2^{a\_{2}}}+…+\frac{1}{2^{a\_{n}}}=\frac{1}{3^{a\_{1}}}+\frac{2}{3^{a\_{2}}}+…+\frac{n}{2^{a\_{n}}}=1.$$

***Відповідь:***$98$.

10 клас

**1**. Яке найбільше ціле значення може приймати така функція $f:R\rightarrow R$, що для довільних дійсних чисел $x, y$ задовольняє рівності:

$$f\left(\left[x\right]y\right)=f\left(x\right)\left[f\left(y\right)\right].$$

***Відповідь:***$1$.

**2**. Прості числа $p$ та $q$ задовольняють умову: $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$ для деякого натурального числа $n$. Знайдіть найбільше можливе значення різниці $q-p$.

***Відповідь:***$5$.

**3**. На шахівниці $100×100$ розташовані $2500$ королів, жодні два з яких не атакують один одного. При цьому кожний рядок та кожний стовпчик містить по $25$ королів. Знайдіть кількість таких розташувань, якщо два розташування, що утворюються одне з одного поворотом або симетрією, вважаються різними?

***Відповідь:***$2$.

11 клас

**1**. Яке найбільше ціле значення може приймати така функція $f:R\rightarrow R$, що для довільних дійсних чисел $x, y$ задовольняє рівності:

$$f\left(\left[x\right]y\right)=f\left(x\right)\left[f\left(y\right)\right].$$

***Відповідь:***$1$.

**2**. Знайдіть найменше непарне натуральне число $b$, для якого існує таке натуральне число $c$, що число $\frac{c^{n}+1}{2^{n}∙2021+b}$ є цілим для усіх натуральних чисел $n$.

***Відповідь:***$27$.

**3**. На шахівниці $100×100$ розташовані $2500$ королів, жодні два з яких не атакують один одного. При цьому кожний рядок та кожний стовпчик містить по $25$ королів. Знайдіть кількість таких розташувань, якщо два розташування, що утворюються одне з одного поворотом або симетрією, вважаються різними?

***Відповідь:***$2$.

8. (160) Скільки існує пар цілих невід’ємних чисел $m, n$, для яких справджується рівність: $m^{2}+2∙3^{n}=m\left(2^{n+1}-1\right)$.

***Відповідь:***$4$.