

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

22 січня - 23 січня 2022 року, м. Львів

7 клас

1. На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M , відмінну від точки C . Довести, що периметр трикутника $\triangle ABM$ більший за периметр трикутника $\triangle ABC$, тобто, $P_{\triangle ABM} > P_{\triangle ABC}$.
2. Знайти всі такі трійки цілих чисел (a, b, n) , для яких виконується рівність $|2023n + a| = |2022n + b|$, якщо a і b такі числа, що $2023 \cdot a = 2022 \cdot b$. Відповідь обґрунтувати.
3. В поїзд "Інтерсіті", який який рухається за маршрутом Київ-Львів-Ворохта, у Києві в кожний вагон сіла однакова кількість пасажирів. При цьому кількість пасажирів в одному вагоні є більшою від кількості вагонів на 9. На зупинці Львів в 2-ий вагон зайшло 10 пасажирів, а з кожного з інших вагонів вийшло по 10 пасажирів, після чого кількість пасажирів у другому вагоні стала дорівнювати кількості всіх пасажирів у всіх решта вагонах. Скільки пасажирів було в кожному вагоні? Відповідь обґрунтувати.
4. Чи існує на площині многокутник, всередині якого є точка, з якої жодну сторону цього многокутника не видно повністю? Відповідь обґрунтувати.
5. Квадрат 10×10 розрізали без залишку на прямокутники, площі яких різні та виражаються натуральними числами. Яку найбільшу кількість прямокутників можна при цьому отримати? Відповідь обґрунтувати.

© 2022, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

22 січня – 23 січня 2022 року, м. Львів

8 клас

1. Розглянемо послідовність натуральних чисел $x, 2021, y, \dots$, у якій кожен наступний член після першого є на одиницю менший за добуток двох сусідніх членів. Для скількох різних значень x у послідовності буде число 2022? Відповідь обґрунтувати.
2. Знайти всі такі цілі чотирицифрові натуральні числа, що мають лише три різні прості дільники, сума яких дорівнює 342. Зауважимо, що таким є число $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, $2 + 3 + 337 = 342$. Відповідь обґрунтувати.
3. У прямокутнику $ABCD$, точки F і G лежать на AB так, що $AF = FG = GB$ і точка E – середина відрізка DC . Також AC перетинає EF в точці H і EG в точці J . Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 70. Знайдіть площу трикутника ENJ .
4. В поїзд “Інтерсіті”, який має не більше 14-ти вагонів і рухається за маршрутом Київ-Львів-Ворохта, у Києві в кожний вагон сіла однакова кількість пасажирів. При цьому кількість пасажирів в одному вагоні є більшою від кількості вагонів на 15. На зупинці Львів в 7-ий вагон зайшло k пасажирів, а з кожного з інших вагонів вийшло по k пасажирів, після чого кількість пасажирів у сьомому вагоні стала дорівнювати кількості всіх пасажирів у всіх решта вагонах. Скільки пасажирів було в кожному вагоні і скільки було вагонів? Відповідь обґрунтувати.
5. Нехай x і y – додатні дійсні числа і $a = 1 + \frac{x}{y}$, $b = 1 + \frac{y}{x}$, $a^2 + b^2 = 15$. Обчисліть $a^3 + b^3$.

© 2022, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

22 січня – 23 січня 2022 року, м. Львів

9 клас

1. Нехай x і y – додатні дійсні числа і $a = 1 + \frac{x}{y}$, $b = 1 + \frac{y}{x}$,
 $a^2 + b^2 = 2022 \cdot 2020$. Обчисліть $a^3 + b^3$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{z} = 4, \\ \sqrt{x}\sqrt{y} - \sqrt{w} = 2. \end{cases}$$

3. Яке з чисел є більшим

$$x = 2022! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot 2022 \text{ чи } y = (1010 \cdot 1012)^{1011} ?$$

Відповідь обґрунтувати.

4. Знайти всі такі цілі чотирицифрові натуральні числа, що мають лише три різні прості дільники, сума яких дорівнює 342. Зауважимо, що таким є число $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, $2 + 3 + 337 = 342$. Відповідь обґрунтувати.

5. Всередині круга радіуса $R = 1$ розміщено 7 точок, відмінних від центра круга O . Довести, що знайдеться пара точок, відстань між якими менша, ніж 1. Відповідь обґрунтувати.

© 2022, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

22 січня – 23 січня 2022 року, м. Львів

10 клас

1. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{2022 \cdot 2023 - \sqrt{2022 \cdot 2023 - \sqrt{2022 \cdot 2023 - \dots - \sqrt{2022 \cdot 2023 - x}}}} = x,$$

ліва частина якого містить 2021 корінь $\sqrt{\dots}$. Відповідь обґрунтувати.

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - \sqrt{2022 \cdot y} = 2022, \\ y - \sqrt{2022 \cdot z} = 2022, \\ z - \sqrt{2022 \cdot x} = 2022. \end{cases}$$

Відповідь обґрунтувати.

3. На площині задано 2022 многокутники, будь-які два з яких мають принаймні одну спільну точку. Довести, що існує пряма, яка має спільні точки зі всіма многокутниками.

4. Нехай $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, де a_0, \dots, a_n — невід'ємні цілі числа. Відомо, що $Q(1) = 4$ і $Q(5) = 152$. Знайдіть $Q(7)$.

Відповідь обґрунтувати.

5. Довжини сторін трикутника ABC є натуральними числами і

$$\cos A = \frac{11}{16}, \quad \cos B = \frac{7}{8}, \quad \cos C = -\frac{1}{4}.$$

Який найменший периметр може мати такий трикутник? Відповідь обґрунтувати.

© 2022, Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

22 січня – 23 січня 2022 року, м. Львів

11 клас

1. Нехай a, b – дійсні числа такі, що

$$\sqrt{\lg a} + \sqrt{\lg b} + \lg \sqrt{a} + \lg \sqrt{b} = 100$$

і всі доданки у лівій частині рівності є цілими числами. Знайти $a \cdot b$?
Відповідь обґрунтувати.

2. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 13, 14 і 15. а сума плоских кутів при кожній вершині основи дорівнює π . Знайти площу повної поверхні піраміди. Відповідь обґрунтувати.

3. За теоремою Лагранжа про кінцеві прирости, для кожної функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ з неперервним графіком її похідної $f'(x)$ існує точка $c \in (a, b)$ така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Чи для кожної такої функції $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ і для кожної точки $c \in (0, 1)$, існують точки $a, b \in (0, 1)$ $a < c < b$, такі, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$? Відповідь обґрунтувати.

4. Знайти всі значення x , для яких виконується рівність

$$\sin^2 x + \cos 4x + \frac{1}{2(1 - \cos 2x)} = 0.$$

Відповідь обґрунтувати.

5. Знайти всі значення b , для яких система

$$\begin{cases} yz(z + a + 1) = b^2 - 2003b + 2022, \\ 2(1 + |y|)^b + (a^2 + 8a + 17)^z = 3. \end{cases}$$

для будь-яких a має принаймні один розв'язок (y_0, z_0) . Відповідь обґрунтувати.

6. Нехай $A = \sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \dots + 2021 \sin 2021x + 2022 \sin 2022x$.

Довести, що: а) при $x = \frac{\pi}{4}$: $|A| \leq 1013$;

б) для всіх $x \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$: $|A| \leq \frac{1011}{|\sin(x/2)|} + \frac{1}{4 \sin^2(x/2)}$

Відповідь обґрунтувати.