МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКА ОБЛАСНА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ
УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
КІРОВОГРАДСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

Гаєвський М.В.,
Кліндухова А.П.,
Лутченко Л.І

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ТРИКУТНИКУ ТА ЧОТИРИКУТНИКУ

Методичний посібник

Кіровоград – 2010

УДК 513 (075)
ББК 22.151.0
Г 13

Гаєвський М.В., Кліндухова А.П., Лутченко Л.І. Метричні співвідношення в трикутнику та чотирикутнику**:** Методичний посібник. – Кіровоград, КОД, 2010 – 80 с.

У посібнику розглядаються теореми синусів, косинусів, Стюарта, Чеви, Менелая, Дезарга, Паппа, Паскаля та властивості медіан, висот, бісектрис трикутника, їх використання при розв'язуванні шкільних задач. Описані метричні співвідношення у трикутнику та чотирикутнику. Частина задач запропонована для самостійного розв'язування.

Видання розраховане на вчителів математики, студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, обдарованих учнів, які цікавляться математикою.

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, статистики та економіки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка **Авраменко О.В.**;

кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка **Яременко Ю.В**.

Посібник рекомендований до друку за рішенням Вченої ради фізико-математичного факультету від 7 грудня 2010 року (протокол №5).

Друкується в рамках проекту «Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини» за підтримки Управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації

ББК 22.151.0
Г 13

ВСТУП

Тема „Метричні співвідношення в трикутнику" займає важливе місце в шкільному курсі геометрії, передбачає знання і використання теореми синусів, косинусів, Стюарта, властивості медіан, висот, бісектрис тощо. Без міцних знань цього матеріалу неможливе успішне подальше вивчення математики та творчий підхід до розв'язування математичних задач.

Досвід проведення іспитів в школі, вступних іспитів до ВНЗ та математичних олімпіад показує, що багато учнів, абітурієнтів не володіють методами та прийомами розв'язування геометричних задач. Прості планіметричні задачі викликають труднощі навіть у тих, хто успішно справляється із задачами алгебри, тригонометрії. Причому це стосується не тільки завдань, для розв'язування яких необхідно проявити винахідливість, а й завдань, розв’язання яких передбачає застосування стандартних теорем і формул шкільного курсу геометрії, зокрема теорему косинусів, синусів, формул площі трикутника, паралелограма, ромба тощо.

Відомо, що трикутник є центральною фігурою в геометрії. Майже кожна геометрична задача розв'язується на основі властивостей трикутника, доведення всіх важливих теорем так чи інакше пов'язане з використанням його властивостей.

Знання властивостей трикутника та чотирикутника допомагає розв'язувати фізичні задачі, які потребують геометричну інтерпретацію, геометричні задачі на обчислення елементів, знаходження площ і побудову плоских фігур та деякі види алгебраїчних нерівностей.

У поданій роботі розглянуто матеріал, який може бути використаний як на уроках з геометрії, так і в позакласній роботі, при підготовці до математичних олімпіад, на факультативних заняттях.

1. АЛГОРИТМІЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

При розв'язуванні деяких геометричних задач в учнів можуть виникати певні проблеми, пов'язані з відсутністю чіткого плану розв'язання. Щоб виправити таку ситуацію, перш за все треба показати учню зразок. Якщо одного зразка учневі недостатньо, то зразок розв'язання вчителя можна поєднувати з алгоритмічним методом.

Для виконання вправ з необхідним поясненням вказується чіткий алгоритм дій, який дається або в готовому вигляді або складається з дітьми в класі. Учні читають його і одночасно виконують завдання.

Використання алгоритмічного методу залежить від ряду умов:

1. Поєднання алгоритмічного методу з використанням зразка розв'язання.
2. Алгоритм по можливості має бути коротким – діти його краще запам'ятають.
3. Треба акцентувати увагу учнів на необхідності запам'ятати алгоритм.
4. Пунктуальне виконання даного вчителем зразка розв'язання.
5. В алгоритм бажано включити вказівки, які спонукають учнів контролювати свої дії. Вони повинні містити перелік пояснень, які вчитель вимагає від учня.

Приклад алгоритму, який можна дати учням під час вивчення теми "Розв'язування трикутників"

Якщо в трикутнику відомі сторона і два кути, то:

1) шукаємо третій кут: віднімаємо від 180° суму градусних мір двох інших кутів;
2) за теоремою синусів шукаємо одну з двох інших сторін;
3) третю сторону знаходимо, використовуючи теорему синусів або косинусів.

Алгоритмічний метод відіграє важливу роль при вивченні математики, полегшує засвоєння учнями базового теоретичного й практичного матеріалу. Як недолік можна відзначити його недоцільність при розв'язуванні творчих задач. При використанні методу потрібно застосовувати методи контролю формальності знань учнів і відповідно до наявних результатів проводити подальшу роботу.

2. ТЕОРЕМИ СИНУСІВ, КОСИНУСІВ, СТЮАРТА, МЕНЕЛАЯ ТА ЧЕВИ

Теореми синусів, косинусів та їх наслідки мають широке застосування в геометрії, є обов'язковими для вивчення у загальноосвітній школі. Теореми Стюарта, Менелая та Чеви вивчаються в класах з поглибленим вивченням математики, їх можна також запропонувати для вивчення здібним учням на позакласних заняттях з математики.

Теорема 1 (синусів).

Теорема синусів – це теорема**,** яка показує зв'язок між сторонами трикутника та синусами його кутів.

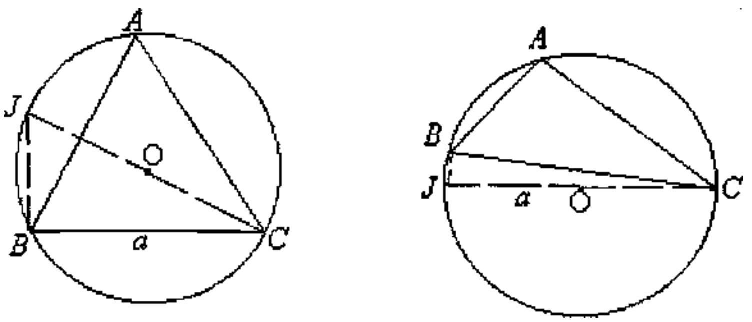


Рис. 2.1

а) б)

Розглянемо трикутник ΔABC, опишемо навколо нього коло з центром в точці O і радіусом R. Проведемо діаметр CJ і хорду BJ (рис. 2.1 а). Кут $\angle CBJ$ прямий, бо спирається на діаметр, тоді

$$\sin\angle A = \sin\angle J = \frac{BC}{CJ} = \frac{a}{2R}. \qquad (2.1)$$

Коли трикутник ΔABC – тупокутний (рис. 2.1 б), то $\angle J = 180^o - \angle A$, $\sin\angle A = \sin(180^o - \angle A)$, отже, рівність виконується.

Провівши аналогічні міркування над іншими кутами і узагальнивши результати ми отримаємо узагальнену теорему синусів:

Для будь-якого трикутника ΔABC з радіусом описаного кола R виконуються співвідношення:

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R, \qquad (2.2)$$

де a,b,c сторони трикутника, що лежать навпроти кутів з вершинами A,B,C, R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

Коротко теорема дається в такому вигляді:

Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}. \qquad (2.3)$$

Наслідки:

1. У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника.
2. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

Теорема 2. Для будь-якого трикутника $\triangle ABC$**, де** $AB=c$**,** $BC=a$**,** $AC=b$ **виконуються рівності:**

$$c=a\cos\angle B+b\cos\angle A,\ a=c\cos\angle B+b\cos\angle C,\ b=a\cos\angle C+c\cos\angle A. \quad (2.4)$$

Доведення.

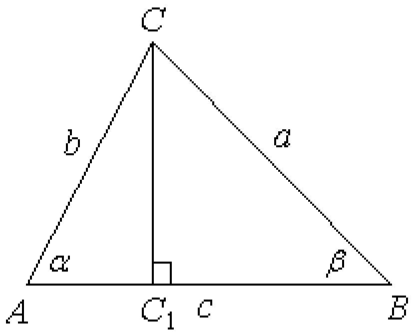


Рис. 2.2

Нехай у $\triangle ABC$ C_1 – ортогональна проекція точки C на пряму AB (рис.2). Маємо два відрізки AC_1 і BC_1, сума яких рівна AB. З прямокутних трикутників $\triangle ACC_1$ та $\triangle BCC_1$ відповідно можна записати:

$$AC_1=b\cos\angle A, \qquad (2.5)$$

$$BC_1=a\cos\angle B. \qquad (2.6)$$

Додавши рівності (2.5) та (2.6) отримаємо

$$c=a\cos\angle B+b\cos\angle A. \qquad (2.7)$$

Аналогічно можна показати, що $a=c\cos\angle B+b\cos\angle C$, $b=a\cos\angle C+c\cos\angle A$.

Теорема 3 (косинусів). Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\angle C, \qquad (2.8)$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B, \qquad (2.9)$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos\angle A. \qquad (2.10)$$

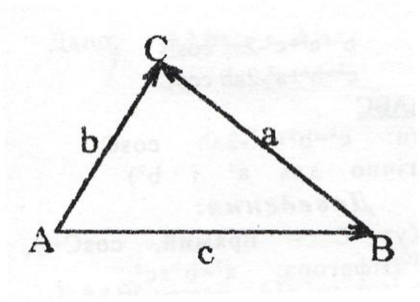


Рис. 2.3

Доведення. *І спосіб (векторний)*

Маємо векторну рівність $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ (рис.2.3), піднесемо її скалярно до квадрату. Використавши властивості скалярного добутку, отримаємо шукану рівність.

II спосіб. Теорему косинусів можна довести, використовуючи *теорему 2*.

Позначимо $AB = c, BC = a, AC = b$ і обчислимо вираз $a^2 + b^2 - c^2$:

$$a^2 + b^2 - c^2 = a\left(c\cos\angle B + b\cos\angle C\right) + b\left(a\cos\angle C + c\cos\angle A\right) - c\left(a\cos\angle B + b\cos\angle A\right).$$

Після розкриття дужок і перетворень отримаємо

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C. \qquad (2.11)$$

Аналогічно доводяться інші рівності:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B, \quad (2.12)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A. \quad (2.13)$$

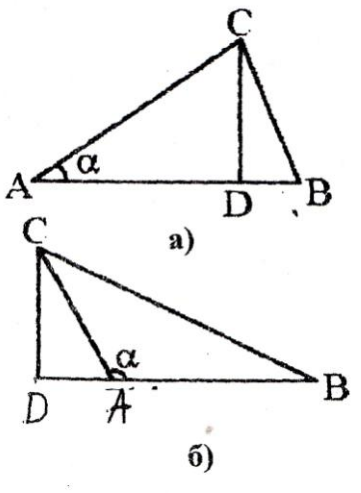


Рис.2.4

b cos∠A дорівнює за абсолютною величиною проекції *AD* сторони *AC* на сторону *AB* (див. рис.2.4 а) або її продовження (рис. 2.4 б). Знак *bcos∠A* залежить від кута *A*: якщо *∠A* – гострий, то береться «+», якщо тупий, то «–».

Наслідок. 1. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «±» подвоєний добуток однієї з них на проекцію другої. Знак «+» беремо тоді, коли протилежний кут тупий, а знак «–» , коли гострий.

Зауваження: Теорему косинусів називають іноді узагальненою теоремою Піфагора. Дійсно, якщо в ΔABC кут А – прямий, то $cos\angle A=0$, і за рівністю $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A$ маємо $a^2=b^2+c^2$ – теорема Піфагора.

Теорема 4 (Стюарта). Якщо a,b,c – сторони трикутника $\triangle ABC$ і точка D ділить сторону BC на відрізки $BD=a_1$ та $CD=a_2$ (рис. 2.5), **то**

$$AD^2=\frac{a_1b^2+a_2c^2-a_1a_2a}{a}. \qquad (2.14)$$

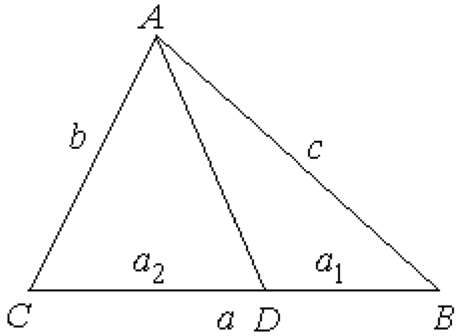


Рис. 2.5

Доведення:

Нехай $\angle ADC=\alpha$, тоді $\angle ADB=180^o-\alpha$.

За теоремою косинусів:

з $\triangle ADC$: $b^2=AD^2+a_2^2-2AD\cdot a_2\cos\alpha$;

з $\triangle ABD$: $c^2=AD^2+a_1^2+2AD\cdot a_1\cos\alpha$.

Помножимо дві останні рівності відповідно на a_1 та a_2, додамо їх, отримаємо:

$a_1b^2=a_1AD^2+a_1a_2^2-2AD\cdot a_1a_2\cos\alpha$, $a_2c^2=a_2AD^2+a_1^2a_2+2AD\cdot a_1a_2\cos\alpha$,

$a_1b^2+a_2c^2=a_1AD^2+a_1a_2^2+a_2AD^2+a_1^2a_2=a\cdot AD^2+aa_1a_2$,

Звідки $AD^2=\dfrac{a_1b^2+a_2c^2-aa_1a_2}{a}$, що й треба було довести.

Цю теорему М. Стюарт сформулював у 1746 р. Деякі дослідники вважають, вона була відкрита Архімедом близько 300р. н.е., але перше відоме доведення було дане Р. Сімпсоном у 1751р. Теорема М. Стюарта дає можливість виразити медіану і бісектрису трикутника через його сторони.

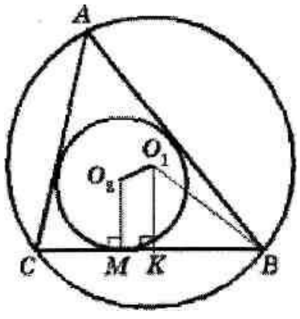


Рис. 2.6

Теорема 5. Відстань між центром *O_1* описаного кола з радіусом *R*, і центром *O_2* вписаного кола з радіусом *r* (рис. 2.6)

$$O_1O_2^2=R^2-2rR \text{ – формула Ейлера.} \qquad (2.15)$$

Перед викладом теорем Чеви та Менелая введемо поняття орієнтованих відрізків.

Нехай на прямій l задані відрізки AB і CD. Розглянемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$. Зі шкільного курсу геометрії відомо, що існує таке число k, що $\overline{AB} = k\overline{CD}$. Якщо $k > 0$, то вектори називають *однаково направленими* (рис. 2.7 а), якщо $k < 0$, то говорять , що вектори *протилежно направлені* (рис. 2.7 б).

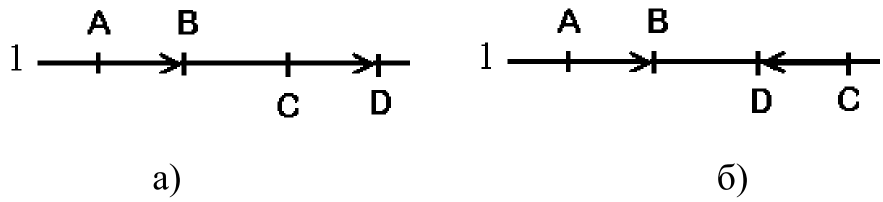


Рис. 2.7

Відрізки AB і CD будемо називати однаково направленими, якщо $k > 0$ і протилежно направленими, якщо $k < 0$. Саме число k будемо називати *відношенням* орієнтованих відрізків $\frac{AB}{CD} = k$ (при $k > 0$ це відношення є просто відношенням довжин відрізків, а при $k < 0$ – відношенням довжин, взяте зі знаком мінус).

У подальшому всі відношення виду $\frac{AB}{CD}$ будемо розуміти як відношення орієнтованих відрізків.

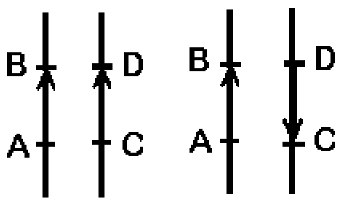


Рис. 2.8

Якщо відрізки AB і CD лежать не на одній прямій, а на паралельних прямих (рис. 2.8), то також можна говорити про однаково й протилежно орієнтовані відрізки та їхні відношення.

Наприклад, нехай A і B – точки площини, а AA_1 і BB_1 – перпендикуляри, опущені з цих точок на деяку пряму l.

Тоді, якщо точки A і B лежать по одну сторону від прямої l, то відрізки A_1A й B_1B орієнтовані однаково (рис. 2.9 а), а якщо по різні сторони – протилежно (рис. 2.9 б), при цьому в обох випадках

$$\frac{KA}{KB} = \frac{A_1A}{B_1B}. \tag{2.16}$$

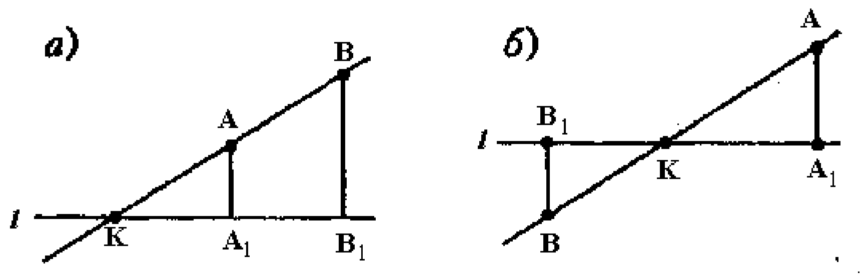


Рис.2.9

Зазначимо такі важливі властивості відношень:

$$1)\ \frac{AB}{BA} = -1 \qquad 2)\ \frac{AB}{CD} = \frac{BA}{DC}. \qquad (2.17)$$

Нехай на прямій AB задана точка C. Якщо C належить відрізку AB, то $k < 0$; якщо точка C лежить ліворуч від точки A, то $0 < k < 1$; якщо точка C лежить праворуч від точки B, то $k > 1$.

Отже, задаючи відношення орієнтованих відрізків $\frac{CA}{CB}$, ми однозначно визначаємо положення точки C на прямій AB.

Зауваження. Точки C, для якої $\frac{CA}{CB} = 1$, немає на прямій AB (можна приєднати до прямої нескінченно віддалену точку ∞ і вважати, що саме для неї $\frac{A\infty}{B\infty} = 1$). Слід зазначити, що просте відношення довжин відрізків $\frac{AC}{BC}$ неоднозначно задає точку C на прямій AB – таких точок, як правило, дві (за виключенням середини відрізка AB, для якої $AC = CB$).

Теорема Менелая дійшла до нас в арабському перекладі книги «Сферика» грецького математика та астронома Менелая Олександрійського (I-II століття нашої ери). Теорема Менелая дозволяє в деяких випадках знаходити відношення відрізків, а також доводити належність трьох точок одній прямій.

Теорема 6 (Менелая). Нехай задано трикутник ABC і три точки A_1, B_1, C_1 на прямих BC, AC і AB відповідно. Точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1. \qquad (2.18)$$

Зауваження. Іноді добуток відношень в теоремі Менелая записують так:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1. \qquad (2.19)$$

Тут всі відношення, що перемножуються – це відношення орієнтованих відрізків.

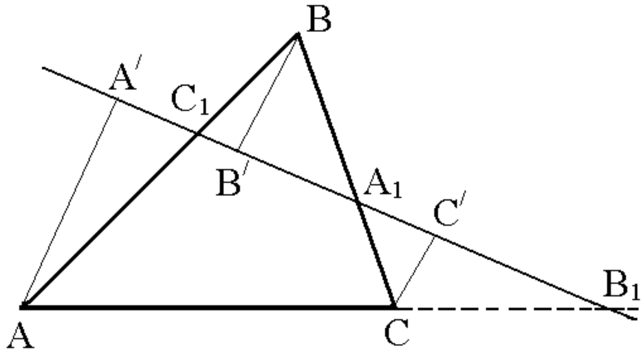


Рис. 2.10

Доведення.

Необхідність. Нехай пряма l перетинає прямі AB, AC та BC в точках C_1, B_1 і A_1 відповідно і AA', BB', CC' – перпендикуляри, які опущено з точок A, B, C на пряму l.

Враховуючи (2.16), запишемо:

$$\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{A'A}{B'B},\quad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{C'C}{A'A},\quad \frac{A_1B}{A_1C}=\frac{B'B}{C'C}.$$

Перемножуючи записані відношення, маємо

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A'A}{B'B}\cdot\frac{C'C}{A'A}\cdot\frac{B'B}{C'C}=1.$$

Достатність. Нехай виконується рівність (2.18). Проведемо пряму A_1B_1. Треба довести, що ця пряма перетинає AB в точці C_1. Насамперед доведемо, що A_1B_1 дійсно перетинає AB. Припустимо, що A_1B_1 паралельна AB. Але тоді

$$\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_1C}{A_1B}=1. \qquad (2.20)$$

З рівностей (2.18) і (2.20) випливає $\frac{C_1A}{C_1B}=1$, що неможливо.

Нехай $\tilde{C}$ – точка перетину прямих A_1B_1 та AB. За вже доведеним

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=1. \qquad (2.21)$$

Порівнюючи з умовою, одержуємо, що

$$\frac{\tilde{C}A}{\tilde{C}B}=\frac{C_1A}{C_1B}. \qquad (2.22)$$

Оскільки мова йде про відношення орієнтованих відрізків, то $\tilde{C}=C_1$, що й треба було довести.

Зауваження 1. При розв'язанні конкретних обчислювальних задач, якщо відомо, що точки C_1, B_1 і A_1 лежать на одній прямій, можна не турбуватися про запис відношень орієнтованих відрізків в формулі (2.18), а обмежитися відношеннями їх довжин.

Зауваження 2. Якщо замінити у (2.18) орієнтовані відношення відношеннями довжин, то обернена теорема перестає бути вірною, тобто точки C_1, B_1 і A_1, для яких виконується (2.18), не обов'язково лежать на одній прямій.

Наприклад, нехай точки A_1, B_1 взяті на сторонах BC, CA трикутника ABC так, що $\frac{BA_1}{A_1C}=2, \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{1}{2}$ і C_1 – середина сторони AB, тоді $\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$, але точки A_1, B_1, C_1 не лежать на одній прямій.

Теорема 7 (Чеви для трикутника). Нехай задано трикутник ABC і три прямі, що проходять через його вершини. Пряма, що проходить через вершину A, перетинає пряму BC в точці A_1. Пряма, що проходить через вершину B, перетинає пряму AC в точці B_1. Пряма, що проходить через точку C перетинає AB в точці C_1. Ці прямі проходять через одну точку або паралельні тоді і тільки тоді , коли

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=-1 \qquad (2.23)$$

Зауваження. Добуток відношень у теоремі Чеви іноді записують так:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (2.24)$$

Чевіана – це відрізок, який з'єднує вершину трикутника з деякою точкою на протилежній стороні.

Доведення.

Необхідність. Нехай через деяку точку P проходять три прямі як показано на рисунку 2.11. Застосуємо теорему Менелая до трикутника ABB_1, який перетинає пряма CC_1:

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{PB}{PB_1}\cdot\frac{CB_1}{CA}=-1.$$

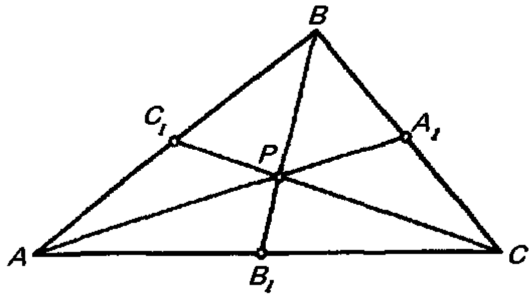


Рис. 2.11

Аналогічно, з трикутника BB_1C згідно з теоремою Менелая маємо:

$$\frac{AB_1}{AC}\cdot\frac{PB}{PB_1}\cdot\frac{A_1C}{A_1B}=-1.$$

Розділимо перше співвідношення на друге

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{AC}{CA}=1$$

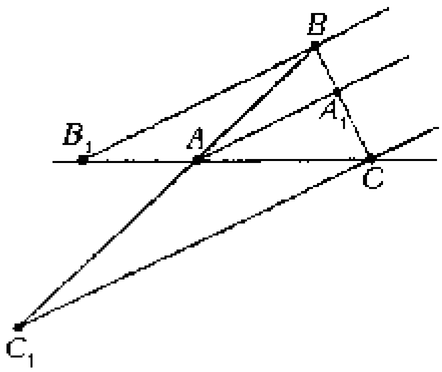
Залишилося помітити, що

$$\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{B_1C}{B_1A} \text{ і } \frac{AC}{CA}=-1, \text{ тому } \frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=-1.$$

Необхідність доведена для випадку прямих, що перетинаються.

Якщо ж прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельні, то згідно з теоремою Фалеса маємо:

$$\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{CA_1}{CB}, \quad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{BC}{BA_1}.$$



Перемножуючи рівності, одержимо $\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{BC}{CB}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=-\frac{A_1C}{A_1B}$,

тобто $\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=-1.$

Необхідність доведена в повному обсязі.

Рис. 2.12

Достатність. Нехай для точок A_1, B_1 і C_1 на прямих BC, AC і AB виконується співвідношення (2.23), а прямі CC_1 і BB_1 перетинаються в точці P. Пряма AP перетинає прямую BC в деякій точці $\tilde{A}$. За вже доведеним $\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{\tilde{A}B}{\tilde{A}C}=-1.$

Звідси й зі співвідношення (2.23) випливає $\frac{\tilde{A}B}{\tilde{A}C}=\frac{A_1B}{A_1C}$, що означає збіг точок $\tilde{A}$ і A_1.

Якщо ж прямі CC_1 і BB_1 паралельні, то з (2.23) випливає, що і пряма AA_1 буде їм паралельна. Теорема доведена.

Наслідки з теореми Чеви для трикутника.

В одній точці перетинаються:

1) медіани трикутника (центр мас – центроїд);

2) висоти трикутника (ортоцентр);

3) бісектриси трикутника (центр кола, вписаного в трикутник);

4) відрізки, що з’єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного кола (точка Жергона);

5) відрізки, що з’єднують вершини трикутника з точками дотику відповідних вневписаних кіл (точка Нагеля);

(*Вневписане коло трикутника* – це коло, що дотикається однієї сторони трикутника та продовження двох інших його сторін. Для кожного трикутника існує точно три вневписаних кола. Центром вневписаного кола, яке дотикається сторони AB , є точка перетину бісектрис зовнішніх кутів A та B, рис.2.13.)

6) відрізки, що з'єднують вершини трикутника з вершинами правильних трикутників, побудованих на його протилежних сторонах у зовнішню сторону (точка Торрічеллі).

Доведення.

1) Оскільки $\frac{AB_1}{B_1C}=1$, $\frac{CA_1}{A_1B}=1$, $\frac{BC_1}{C_1A}=1$, то $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$, отже, медіани трикутника перетинаються в одній точці.

2) Розглянемо випадок, коли трикутник ABC гострокутний.

Маємо $AC_1 = AC\cos\angle A,$ $BC_1 = BC\cos\angle B$, $BA_1 = AB\cos\angle B$, $CA_1 = AC\cos\angle C$, $CB_1 = BC\cos\angle C$, $AB_1 = AB\cos\angle A$.

Звідси випливає, що

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{AB\cos\angle A}{BC\cos\angle C}\cdot\frac{AC\cos\angle C}{AB\cos\angle B}\cdot\frac{BC\cos\angle B}{AC\cos\angle A}=1.$$

Якщо трикутник ABC тупокутний, то дві висоти цього трикутника не є чевіанами. У випадку, коли точно один з відрізків AA_1, BB_1, CC_1 є чевіаною, а інші з'єднують вершини з точками продовжень протилежних сторін, при цьому ці відрізки не паралельні, твердження теореми Чеви також виконується. Залишається повторити проведені вище обчислення для тупокутного трикутника.

3) З властивості бісектрис випливають наступні рівності:

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{BC},\qquad \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CA}{AB},\qquad \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BC}{CA}.$$

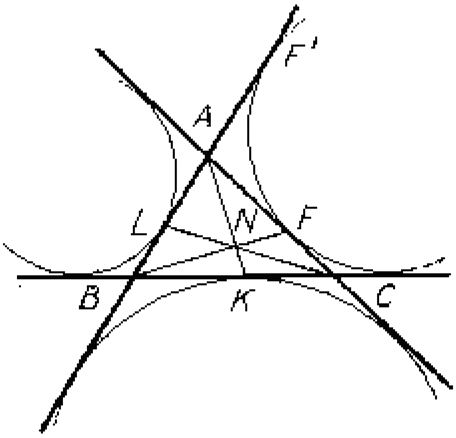
Перемножуючи відповідно ліві та праві частини цих рівностей, одержуємо умову теореми Чеви.

4) З властивостей дотичних, проведених з однієї точки до кола маємо:

$$AB_1 = AC_1, \qquad BA_1 = BC_1, \qquad CA_1 = CB_1.$$

Звідси випливає рівність з теореми Чеви: $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1.$

5) $AF = AF^{/} = BF^{/} - BA = p - c$, де p – півпериметр трикутника ABC, $CK = p - b, BL = p - a, FC = p - a,$ $KB = p - c, LA = p - b$,



Отже, $\dfrac{AF}{FC} \cdot \dfrac{CK}{KB} \cdot \dfrac{BL}{LA} = 1.$

Це означає, що прямі AK, BF, CL перетинаються в одній точці (рис. 2.13).

Рис. 2.13

6) Нехай a, b, c – сторони трикутника ABC, $A^{/}, B^{/}, C^{/}$ – вершини правильних трикутників, побудованих на сторонах BC, AC, AB відповідно, а A_1, B_1, C_1 – точки перетину відрізків $AA^{/}, BB^{/}, CC^{/}$ з відповідними сторонами або їх продовженнями. Зазначимо, що:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \pm \frac{S_{ABA^{/}}}{S_{A^{/}CA}} = \pm \frac{c}{b},$$

при цьому знак «–» береться в тому випадку, коли точка A_1 лежить зовні відрізка BC. Аналогічно записуються відношення для точок B_1 та C_1. Після перемноження рівностей маємо $\dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} \cdot \dfrac{AC_1}{C_1B} = 1$. Наслідки доведено.

Іноді теорему Чеви зручно використовувати, вводячи замість відношень відрізків відношення синусів деяких кутів.

Теорема 8 (Чеви у формі синусів). Нехай на сторонах BC, CA **і** AB **трикутника** ABC **взяті точки** A_1, B_1, C_1**. Прямі** AA_1, BB_1 **і** CC_1 **проходять через одну точку або паралельні тоді і тільки тоді, коли**

$$\frac{\sin\angle A_1AB}{\sin\angle CAA_1}\cdot\frac{\sin\angle B_1BC}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{\sin\angle C_1CA}{\sin\angle BCC_1}=1. \qquad (2.25)$$

Доведення.

Запишемо теорему Чеви у вигляді (2.24):

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Доведемо цю теорему для випадку, коли точки A_1, B_1 і C_1 лежать на сторонах трикутника. Випадки іншого розташування точок вимагають несуттєвих змін міркувань.

Нехай $\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$.

Інші позначення зрозумілі з рисунка 2.14.

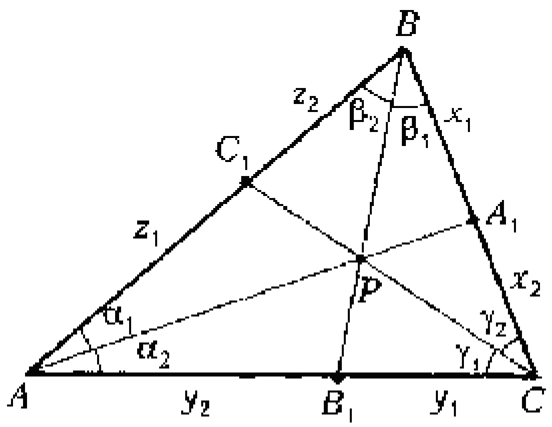


Рис.2.14

Застосовуючи теорему синусів до трикутників ABA_1 і ACA_1, маємо

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta}=\frac{x_1}{AA_1},\quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}=\frac{x_2}{AA_1},\ \text{або}\ \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{x_1\sin\beta}{x_2\sin\gamma}.$$

Аналогічно, застосовуючи теорему синусів до трикутників BAB_1 і BCB_1, маємо: $\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \dfrac{y_1 \sin\gamma}{y_2 \sin\alpha}$, а до трикутників ACC_1 і BCC_1: $\dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \dfrac{z_1 \sin\alpha}{z_2 \sin\beta}$.

Перемножуючи записані співвідношення, знаходимо

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Отже, умова теореми 8 рівносильна умові теореми 7 (Чеви).

Теорема доведена.

При доведенні теореми ми не застосовували відношень орієнтованих відрізків. У загальному випадку необхідно розглянути не тільки орієнтовані відрізки, але й орієнтовані кути, припускаючи, наприклад, що $\angle ABC = -\angle CBA$ і т.д.

З історії. Джованні Чева (1648-1734) – італійський математик. Народився в Мілані, більшу частину життя провів в Мантує. Теорема Чеви для трикутника була опублікована в роботі "De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio" (1678). У цій роботі Чева також наводить узагальнення теореми Менелая: якщо сторони просторового чотирикутника перетинаються площиною, то на них утворюються вісім відрізків таких, що добуток чотирьох з них, що не мають спільних кінців, дорівнює добутку чотирьох інших.

3.ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ МЕНЕЛАЯ ТА ЧЕВИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 У трикутнику ABC медіана BM ділить відрізок AK (точка K належить стороні BC) у відношенні 5:3 , починаючи від вершини A. У якому відношенні відрізок AK ділить медіану BM?

Розв'язання.

1-й спосіб

Нехай $BO:BM = x, BK:BC = y$

Введемо вектори $\overline{BO}, \overline{BM}, \overline{BA}, \overline{BK}, \overline{BC}$ (рис. 3.1).

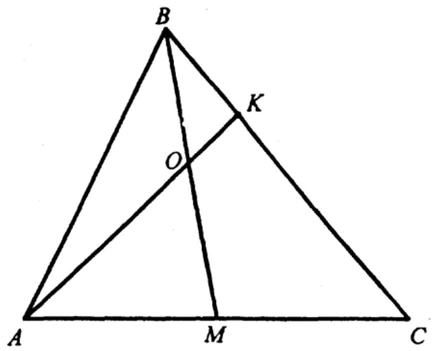


Рис.3.1

Розкладемо вектор $\overline{BO}$ за неколінеарними векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BK}$:

$$\overline{BO} = \frac{3}{8}\overline{BA} + \frac{5}{8}\overline{BK}$$

Оскільки $\overline{BK} = y \cdot \overline{BC}$, то

$$\overline{BO} = \frac{3}{8}\overline{BA} + \frac{5}{8}y \cdot \overline{BC},$$

$$\overline{BO} = x \cdot \overline{BM} = x(\frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{BC}) = \frac{x}{2}\overline{BA} + \frac{x}{2}\overline{BC}.$$

Виходячи з єдиності розкладу вектора $\overline{BO}$ за неколінеарними векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$, маємо:

$$\frac{3}{8} = \frac{x}{2}, \quad x = \frac{3}{4}, \quad \frac{BO}{BM} = \frac{3}{4}, \quad \frac{BO}{OM} = \frac{3}{1}$$

Відповідь: 3:1.

2-й спосіб

Запишемо теорему Менелая для трикутника AKC і прямої BM:

$$\frac{AO}{OK}\cdot\frac{KB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

Виходячи з умови, маємо :

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{KB}{BC}\cdot\frac{1}{1}=1,\quad \frac{KB}{BC}=\frac{3}{5},\quad \frac{KB}{KC}=\frac{3}{2}$$

Запишемо теорему Менелая для трикутника BCM і прямої AK:

$$\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MO}{OB}=1$$

Тоді

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{MO}{OB}=1$$

$$\frac{MO}{OB}=\frac{1}{3},\quad \frac{OB}{MO}=\frac{3}{1}$$

Відповідь: 3:1.

Задача 2 У трикутнику ABC відрізок AK (K належить стороні BC) ділить медіану BM у відношенні 3:4, починаючи від вершини B. У якому відношенні точка K ділить сторону BC ?

Розв’язання.

1-й спосіб

Проведемо $MF \parallel AK$ (рис. 3.2).

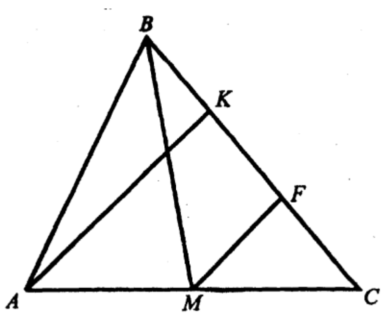


Рис.3.2

За умовою $AM=MC.$ За теоремою Фалеса $KF=FC$. Нехай $BO=3x, OM=4x$, тоді

$$\frac{BK}{KF}=\frac{BO}{OM}=\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$$

$$KF=\frac{1}{2}KC,\quad \frac{BK}{\frac{1}{2}KC}=\frac{3}{4},\quad \frac{BK}{KC}=\frac{3}{8}$$

Відповідь: 3:8.

2-й спосіб

Запишемо теорему Менелая для трикутника MBC і прямої AK:

$$\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MO}{OB}=1$$

Тоді $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=1,\quad \frac{BK}{KC}=\frac{3}{8}$.

Відповідь: 3:8 .

Задача 3 Сторони трикутника ABC поділено точками M, N і P так, що $AM:MB=BN:NC=CP:PA=1:4$.

Знайти відношення площі трикутника, обмеженого прямими AN, BP і CM, до площі трикутника ABC.

Розв'язання.

1-й спосіб

Нехай $\angle BAN=\alpha_1, \angle NAC=\alpha_2$ (рис. 3.3).

Використовуємо теорему синусів для трикутника ABN:

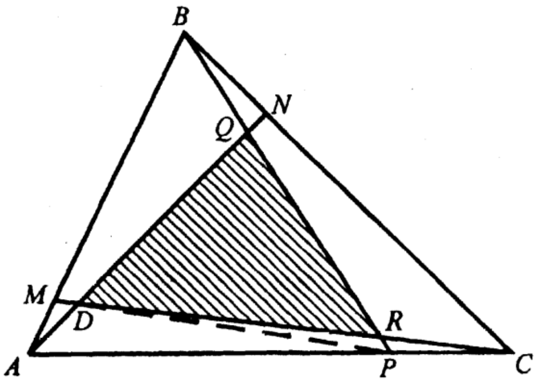


Рис.3.3

$$\frac{BN}{\sin\alpha_1}=\frac{AB}{\sin BNA} \qquad (3.1)$$

З трикутника ANC:

$$\frac{NC}{\sin\alpha_2}=\frac{AC}{\sin ANC}.$$

$\angle ANC+\angle ANB=180^0$, тому $\sin ANC=\sin BNA.$

$$\frac{NC}{\sin\alpha_2}=\frac{AC}{\sin BNA}. \tag{3.2}$$

Поділимо почленно рівність (3.1) на рівність (3.2), отримаємо:

$$\frac{BN\sin\alpha_2}{NC\sin\alpha_1}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{NC}{BN}=\frac{4AB}{AC}.$$

З ΔAMD: $$\frac{MD}{\sin\alpha_1}=\frac{AM}{\sin ADM}. \tag{3.3}$$

З ΔADC: $$\frac{DC}{\sin\alpha_2}=\frac{AC}{\sin ADM}. \tag{3.4}$$

Поділимо почленно рівність (3.3) на рівність (3.4), отримаємо:

$$\frac{MD\sin\alpha_2}{DC\sin\alpha_1}=\frac{AM}{AC},\quad \frac{MD}{DC}\cdot\frac{4AB}{AC}=\frac{AM}{AC},\quad \frac{MD}{DC}=\frac{AC\cdot AM}{AC\cdot 4AB}=\frac{AM}{4AB}.$$

Отже, $$\frac{MD}{DC}=\frac{1}{20}. \tag{3.5}$$

Нехай $\angle ABP=\beta_1, \angle PBC=\beta_2$.

З ΔMBR: $$\frac{MR}{\sin\beta_1}=\frac{MB}{\sin MRB}. \tag{3.6}$$

З ΔRBC: $$\frac{RC}{\sin\beta_2}=\frac{BC}{\sin CRB}. \tag{3.7}$$

Поділимо почленно рівність (3.6) на рівність (3.7), отримаємо:

$$\frac{MR\sin\beta_2}{RC\sin\beta_1}=\frac{MB}{BC},\quad \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}=\frac{MB}{BC}\cdot\frac{RC}{MR}.$$

З ΔABP: $$\frac{AP}{\sin\beta_1}=\frac{AB}{\sin APB} \tag{3.8}$$

З ΔPBC: $$\frac{PC}{\sin\beta_2}=\frac{BC}{\sin APB} \tag{3.9}$$

Поділимо почленно рівність (3.8) на рівність (3.9):

$$\frac{AP\sin\beta_2}{PC\sin\beta_1}=\frac{AB}{BC},\quad \frac{4}{1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}=\frac{AB}{BC},$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{4}{1}\cdot\frac{MB\cdot RC}{BC\cdot MR},\quad \frac{RC}{MR}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{BC}{MB}.$$

Оскільки $\frac{AB}{MB}=\frac{5}{4}$, то $\frac{RC}{MR}=\frac{AB}{MB}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$.

Отже, $\frac{RC}{MR}=\frac{5}{16}$. (3.10)

Використовуючи співвідношення (3.5) і (3.10), запишемо:

$MD:DR:RC=1:15:5.$

Аналогічно одержимо

$NQ:QD:DA=1:15:5,\quad PR:RQ:QB=1:15:5.$

Використовуючи властивості площ, маємо:

$$S_{ABP}=\frac{4}{5}S_{ABC},$$

$$S_{AQP}=\frac{16}{21}S_{ABP}=\frac{16}{21}\cdot\frac{4}{5}S_{ABC},$$

$$S_{DQP}=\frac{15}{20}S_{AQP}=\frac{15}{20}\cdot\frac{16}{21}\cdot\frac{4}{5}S_{ABC}=\frac{16}{35}S_{ABC},$$

$$S_{DQR}=\frac{15}{16}S_{DQP}=\frac{15}{16}\cdot\frac{16}{35}S_{ABC}=\frac{3}{7}S_{ABC}.$$

Відповідь: 3:7.

2-й спосіб

Запишемо теорему Менелая для трикутника BPC і прямої AN:

$$\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CA}{AP}\cdot\frac{PQ}{QB}=1,\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{PQ}{QB}=1,$$

$\frac{PQ}{QB}=\frac{16}{5}$. (3.11)

Запишемо теорему Менелая для трикутника ABP і прямої MC:

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BR}{RP}\cdot\frac{PC}{CA}=1,\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{BR}{RP}\cdot\frac{1}{5}=1,$$

$\frac{BR}{RP}=\frac{20}{1}$. (3.12)

Використовуючи (3.11) і (3.12) дістанемо:

$BQ:QR:RP = 5:15:1.$

Аналогічно

$AD:DQ:QN = 5:15:1, CR:DR:DM = 5:15:1.$

Далі розв'язуємо, як в 1-му способі.

Відповідь: 3:7.

Задача 4 Висота CD рівнобедреного трикутника ABC з основою AB поділена на три рівні частини. Через точку A та точки поділу проведено прямі, які ділять бічну сторону, що дорівнює 60 см, на три відрізки. Знайти ці відрізки.

Розв'язання.

$CP = PK = KD$ (рис. 3.4).

Запишемо теорему Менелая для трикутника CDB і прямої AM:

$$\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BA}{AD}\cdot\frac{DP}{PC}=1,\quad \frac{CM}{MB}\cdot 2\cdot 2=1,\quad \frac{CM}{MB}=\frac{1}{4}.$$

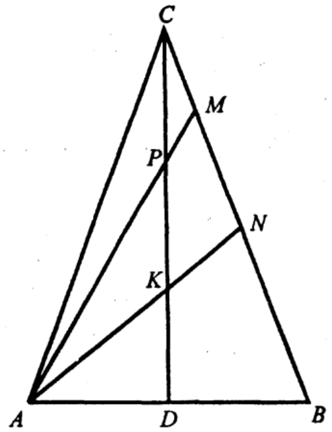


Рис.3.4

Звідси $CM = \frac{1}{5}CB = 12$ см , $MB = 48$ см.

Запишемо теорему Менелая для трикутника CDB і прямої AN:

$$\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BA}{AD}\cdot\frac{DK}{KC}=1,\quad \frac{CN}{NB}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1,\quad \frac{CN}{NB}=1.$$

Звідси $CN = NB = 30$ см, $NM = MB - NB = 48 - 30 = 18$ (см).

Відповідь: 12 см, 18 см, 30 см.

Задача 5 Через середину M сторони BC паралелограма $ABCD$, площа якого дорівнює 1, і вершину A проведено пряму, яка перетинає діагональ BD у точці Q. Знайти площу чотирикутника $QMCD$.

Розв’язання.

Запишемо теорему Менелая для трикутника BCO і прямої AM:

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CA}{AO}\cdot\frac{OQ}{QB}=1,\quad 1\cdot 2\cdot\frac{OQ}{QB}=1,\quad \frac{OQ}{QB}=\frac{1}{2}.$$

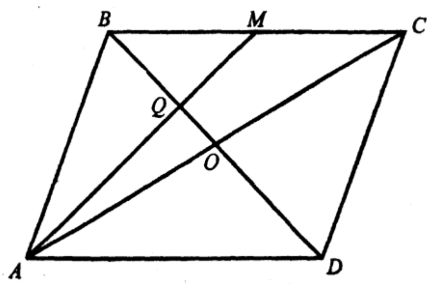


Рис.3.5

Оскільки площі трикутників з рівними висотами відносяться як основи, то

$$\frac{S_{AQO}}{S_{ABQ}}=\frac{1}{2},$$

$$S_{ABO}=\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{1}{4},$$

$$S_{AQO}=\frac{1}{3}S_{ABO}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$S_{AMC}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$S_{QMCO}=S_{AMC}-S_{AQO}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$S_{QMCD}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

Відповідь: $\frac{5}{12}$.

За допомогою теореми Чеви розв'язуються задачі про трійки прямих, що проходять через одну точку, а також доводяться теореми про перетин трійок прямих в одній точці.

Задача 6. Задано трикутник *ABC*. Як слід побудувати точку *O* всередині трикутника, щоб площі трикутників *AOC*, *BOC* та *AOB* відносилися як 7 : 11 : 13.

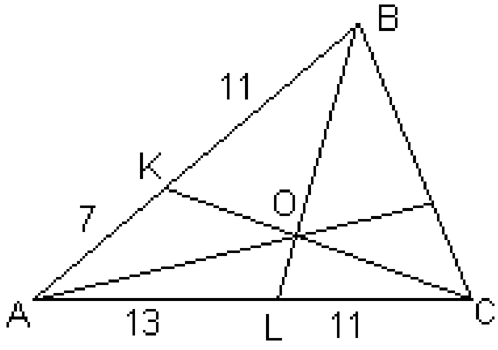


Рис.3.6

Розв'язання.

1 спосіб.

Розглянемо трикутник ABC й побудуємо точку K, яка ділить сторону AB у відношенні 7 : 11, рахуючи від вершини A, та точку L, яка ділить сторону CA у відношенні 11 : 13, рахуючи від вершини C (рис. 3.6).

Нехай O – точка перетину відрізків CK та BL. Покажемо, що O – шукана точка. Зазначимо, що у трикутників ACK та BCK спільна висота, яка опущена з вершини C, тому відношення їх площин дорівнює відношенню основ $S_{ACK} : S_{BCK} = AK : BK$.

Аналогічно, $S_{AOK} : S_{BOK} = AK : BK$.

Застосовуючи властивість пропорції ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$), одержуємо:

$S_{AOC} : S_{BOC} = AK : BK = 7 : 11$.

Аналогічно, розглядаючи дві пари трикутників з основами AL та CL, доводимо, що

$S_{BOC} : S_{AOB} = CL : AL = 11 : 13$.

Отже, $S_{AOC} : S_{BOC} : S_{AOB} = 7 : 11 : 13$, що необхідно було довести.

2 спосіб.

З теореми Чеви випливає, що пряма AO розділить сторону BC у відношенні 13 : 7, рахуючи від вершини B. Якщо застосовувати теорему Чеви в зворотну сторону, то до розв'язування задачі можна було б підійти інакше.

Нехай задано відрізок PQ, точка E, яка ділить його у відношенні p : q, де p та q – задані числа, й точка F, яка не належить прямій PQ. Аналогічно з наведеним вище, можна довести, що геометричним місцем точок M площини, для яких $S_{PFM} : S_{QFM} = p : q$ є пряма EF (за виключенням точок E та F).

Отже, для того, щоб побудувати шукану точку O можна розділити сторони AB, BC та CA трикутника ABC відповідно точками K, N та L так, щоб AK : BK = 7 : 11; BN : CN = 13 : 7; CL : AL = 11 : 13.

Тоді, згідно з теоремою Чеви $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CL}{LA}=1$. Отже, відрізки AN, BL та CK перетинаються в одній точці, яка й буде шуканою.

Задача 7. В трикутник ABC вписано півколо так, що його діаметр лежить на стороні BC, а дуга дотикається сторін AB та AC відповідно в точках C_1 та B_1. Довести, що прямі BB_1 та CC_1 перетинаються на висоті AA_1 трикутника.

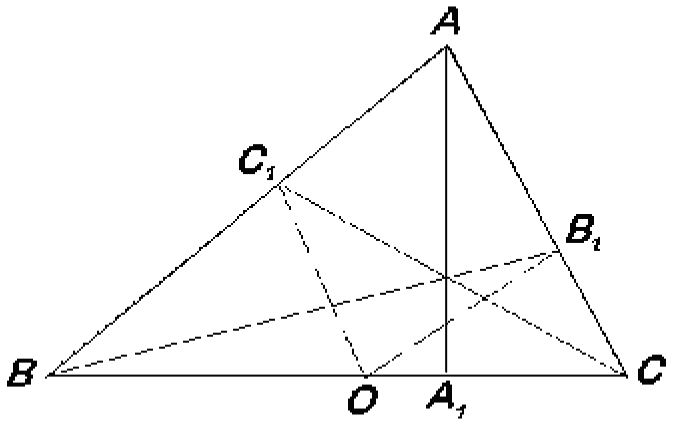


Рис.3.7

Доведення.

З умови задачі випливає, що точки A_1, B_1 та C_1 лежать на сторонах трикутника ABC. Отже, досить довести, що

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1$$

Центр O півкола з'єднаємо з точками дотику C_1 та B_1 (див. рисунок 3.7). Позначимо через r радіус півкола, з прямокутних трикутників OBC та OCB знаходимо

$$CB_1 = rctgC, \quad C_1B = rctgB.$$

З прямокутних трикутників ABA_1 та ACA_1 маємо:

$$BA_1 = AA_1ctgB, \quad A_1C = AA_1ctgC.$$

Зазначимо, що відрізки AB_1 та AC_1 дотичних до кола рівні, отже, отримаємо:

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{ctgB}{ctgC} \cdot \frac{ctgC}{ctgB} = 1.$$

Таким чином, згідно з теоремою Чеви прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці.

Задача 8. Через вершини трикутника ABC і точку P, яка лежить всередині трикутника, проведені прямі, що перетинають сторони BC, CA, AB відповідно в точках L, M, N, при цьому $\frac{BL}{LC} = x$, $\frac{CM}{MA} = y$, $\frac{AN}{NB} = z$. Довести, що $S_{LMN} = \frac{2S}{(1+x)(1+y)(1+z)}$, де S – площа трикутника ABC.

Як належить обрати точку P, щоб площа трикутника LMN була найбільшою?

Доведення.

Позначимо площі трикутників CLM, BLN, ANM через S_1, S_2, S_3 (рис. 3.8).

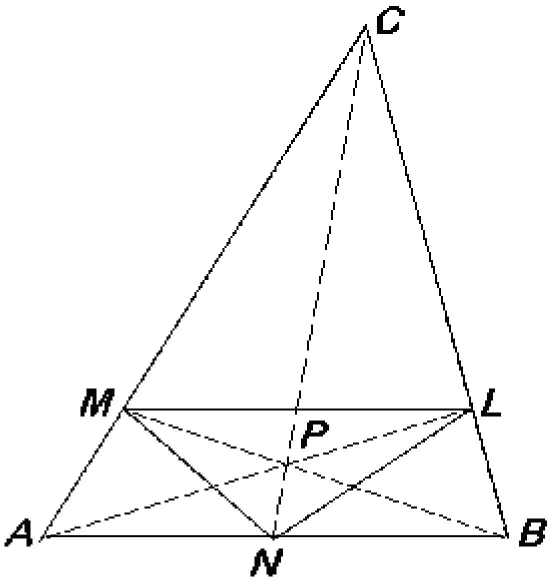


Рис.3.8

Так як площі двох трикутників, які мають спільний кут, відносяться як добуток сторін, що утворюють цей кут, то

$$\frac{S_1}{S} = \frac{y}{(1+x)(1+y)}.$$

Аналогічно $\frac{S_2}{S} = \frac{x}{(1+x)(1+z)}$,

$$\frac{S_3}{S} = \frac{z}{(1+z)(1+y)}.$$

Далі знаходимо $S_{LMN} = S - (S_1 + S_2 + S_3)$.

Підставивши в цю рівність знайдені вище значення та прийнявши до уваги, що в силу теореми Чеви $xyz = 1$, одержуємо:

$$S_{LMN} = \frac{2S}{(1+x)(1+y)(1+z)},$$ що й треба було довести.

Площа трикутника LMN буде найбільшою при мінімальному значенні $(1+x)(1+y)(1+z)$. Проведемо оцінку цього добутку.

Скористаємося нерівністю нерівність $x + \frac{1}{x} \geq 2$:

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 2 + x + y + z + xy + xz + yz = 2 + (x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y}) + (z + \frac{1}{z}) \geq 8,$$

при цьому рівність має місце тоді й тільки тоді, коли $x = y = z = 1$.

Отже, шукана точка P – точка перетину медіан трикутника ABC, для якої $S_{LMN} = \frac{1}{4}S$.

Задача 9. Знайти в трикутнику таку точку O, щоб добуток $AB^{/}BC^{/}CA^{/}$ мав найбільшу величину ($A^{/}, B^{/}, C^{/}$ – точки перетину прямих AO, BO, CO зі сторонами BC, CA, AB).

Розв’язання.

Проведемо медіани AM, BN, CP трикутника ABC, які перетинаються в точці G. Оскільки середнє геометричне двох величин не більше їх середнього арифметичного, то

$$\sqrt{AB^{/} \cdot B^{/}C} \le AN, \qquad \sqrt{CA^{/} \cdot A^{/}B} \le CM, \qquad \sqrt{BC^{/} \cdot C^{/}A} \le BP.$$

Піднесемо кожну нерівність до квадрата та перемножимо:

$$AB^{/} \cdot B^{/}C \cdot CA^{/} \cdot A^{/}B \cdot BC^{/} \cdot C^{/}A \le (AN \cdot CM \cdot BP)^2.$$

Згідно з теоремою Чеви маємо: $AB^{/} \cdot BC^{/} \cdot CA^{/} = B^{/}C \cdot A^{/}B \cdot C^{/}A$.

Отже, $(AB^{/} \cdot BC^{/} \cdot CA^{/})^2 \le (AN \cdot CM \cdot BP)^2$.

Нерівність перетворюється в рівність у випадку збігу основ прямих Чеви з серединами відповідних сторін, тому саме в цьому випадку добуток $AB^{/}BC^{/}CA^{/}$ має найбільшу величину $\frac{abc}{8}$, де a, b, c – сторони трикутника. Таким чином, шуканою точкою є точка перетину медіан трикутника.

Задача 10. Прямі AP, BP, CP перетинають сторони трикутника ABC (або їхні продовження) у точках A_1, B_1, C_1. Довести, що:

а) прямі, що проходять через середини сторін BC, CA, AB паралельно прямим AP, BP, CP, перетинаються в одній точці;

б) прямі, що з'єднують середини сторін BC, CA, AB із серединами відрізків AA_1, BB_1, CC_1, перетинаються в одній точці.

Доведення.

Нехай A_2, B_2, C_2 – середини сторін BC, CA, AB. Розглянуті прямі проходять через вершини трикутника $A_2B_2C_2$, при цьому в задачі а) вони ділять його сторони в таких же відношеннях, у яких прямі AP, BP, CP ділять сторони трикутника ABC, а в задачі б) вони ділять їх у зворотних відношеннях. Залишається скористатись теоремою Чеви.

Задачі для самостійного розв'язування

(ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМИ МЕНЕЛАЯ)

1. У трикутнику ABC на стороні AB взято точку D, а на стороні BC точки E і F так, що $AD:DB=3:2$, $BE:EC=1:3$ і $BF:FC=4:1$. У якому відношенні пряма AE ділить відрізок DF.

2. На сторонах AB і AC трикутника ABC дано відповідно точки M і N такі, що $AM:MB=CN:NA=1:2$.У якому відношенні точка S перетину відрізків BN і CM ділить кожен з цих відрізків ?

3. Ортоцентр H трикутника ABC (ортоцентр – точка перетину висот) ділить висоту навпіл. Довести , що $\cos C=\cos A\cdot\cos B$, де $\angle A, \angle B, \angle C$ – кути трикутника.

4. З вершини C прямого кута трикутника ABC проведено висоту CK, а в трикутнику ACK проведено бісектрису CE. Пряма, що проходить через точку B паралельно CE, перетинає CK у точці F. Довести, що пряма EF ділить відрізок AC навпіл.

5. Нехай AD – медіана трикутника ABC. На AD взята точка K так, що $AK:KD=3:1$. У якому співвідношенні пряма BK ділить площу трикутника ABC?

6. Три кола різних радіусів розташовані на площині так, що жодне з них не лежить повністю в колі, яке обмежено іншим колом. Кожній парі кіл поставимо у відповідність точку перетину зовнішніх подвійних дотичних. Довести, що одержані три точки лежать на одній прямій.

7. У ΔABC бісектриса AD ділить BC в відношенні 2:1. У якому відношенні медіана CE ділить бісектрису AD?

8. У правильному трикутнику ABC зі стороною a точка E – середина BC, D – середина AC, $F\in DC, BF\cap DE=M$, $S_{ABMD}=\frac{5}{8}S_{ABC}$. Знайти MF.

9. Дано паралелограм $ABCD$. Точка M ділить відрізок AD у відношенні p, а точка N ділить відрізок DC у відношенні q. Прямі BM та AN перетинаються в точці S. Обчислити відношення $AS:SN$.

10. Коло S дотикається кола S_1 та кола S_2 в точках A_1 і A_2. Довести, що пряма A_1A_2 проходить через точку перетину загальних зовнішніх або загальних внутрішніх дотичних до кіл S_1 та S_2.

11. а) Серединний перпендикуляр до бісектриси AD трикутника ABC перетинає пряму BC в точці E. Довести, що $BE:CE = c^2 : b^2$.

б) Довести, що точки перетину серединних перпендикулярів до бісектрис трикутників і продовжень відповідних сторін лежать на одній прямій.

12. На сторонах AB, BC, CD чотирикутника $ABCD$ (або на їхніх продовженнях) взяті точки K, L, M. Прямі KL і AC перетинаються в точці P, прямі LM і BD – в точці Q. Довести, що точка перетину прямих KQ і MP лежить на прямій AD.

13. Дано чотирикутник $ABCD$. Продовження його сторін AB та CD перетинаються в точці E, продовження сторін AD та BC перетинаються в точці F. Довести, що середини відрізків AC, BD, EF лежать на одній прямій.

14. Пряма Сімсона. Нехай P – точка кола, описаного навколо трикутника ABC, а точки A_1, B_1, C_1 – основи перпендикулярів, опущених з точки P на прямі BC, AC, AB. Довести, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

15. На сторонах AB та AC трикутника ABC взято точки M та N такі, що $AM/MB = CN/NA = 2$. Відрізки BN та CM перетинаються в точці K. Знайти відношення відрізків BK/KN.

16. Довести, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей та точку перетину прямих, які містять бічні сторони.

17. Через точку M перетину діагоналей чотирикутника проведена січна. Відрізок цієї січної, що замкнений між однією парою протилежних сторін чотирикутника, ділиться точкою M навпіл. Довести, що відрізок січної, який замкнений між продовженнями іншої пари протилежних сторін чотирикутника ділиться точкою M також навпіл.

(ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМИ ЧЕВИ)

18. На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взяті точки A_1, B_1, C_1 так, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Прямі A_1B_1 і A_1C_1 перетинають пряму, що проходить через вершину A паралельно стороні BC, в точках C_2 і B_2 відповідно. Довести, що $AB_2 = AC_2$.

19. а) Нехай α, β, γ – довільні кути, при цьому сума будь-яких двох з них менше 180. На сторонах трикутника ABC зовнішнім чином побудовані трикутники A_1BC, AB_1C, ABC_1, що мають при вершинах A, B, C кути α, β, γ. Довести, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

б) довести аналогічне твердження для трикутників, побудованих на сторонах трикутника ABC внутрішнім чином.

20. Прямі AP, BP, CP перетинають прямі BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Точки A_2, B_2, C_2 обрані на прямих BC, CA, AB так, що $\dfrac{BA_2}{A_2C} = \dfrac{A_1C}{BA_1}$, $\dfrac{CB_2}{B_2A} = \dfrac{B_1A}{CB_1}$, $\dfrac{AC_2}{C_2B} = \dfrac{C_1B}{AC_1}$.

Довести, що прямі AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці Q (або паралельні). Такі точки P і Q називають *ізотомічно спряженими відносно трикутника* ABC.

Доведення очевидним чином випливає з теореми Чеви.

21. На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взяті точки A_1, B_1, C_1, при цьому прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці P. Довести, що прямі AA_2, BB_2, CC_2 симетричні цим прямим відносно відповідних бісектрис, також перетинаються в одній точці Q. Такі точки P і Q називають *ізогонально спряженими відносно трикутника* ABC.

22. Протилежні сторони опуклого шестикутника попарно паралельні. Довести, що прямі, які з'єднують середини протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

23. Через точки A і D, що лежать на колі, проведено дотичні, які перетинаються в точці S. На дузі AD взяті точки B і C. Прямі AC і BD перетинаються в точці P, AB і CD – у точці Q. Довести, що пряма PQ проходить через точку S.

24. а) На сторонах BC, CA, AB рівнобедреного трикутника ABC з основою AB взяті точки A_1, B_1, C_1 так, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Довести, що

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin ABB_1}{\sin BAA_1} \cdot \frac{\sin CAA_1}{\sin CBB_1}.$$

б) Всередині рівнобедреного трикутника ABC з основою AB взяті точки M і N так, що $\angle CAM = \angle ABN$ і $\angle CBM = \angle BAN$. Довести, що точки C, M, N лежать на одній прямій.

25. У трикутнику ABC проведені бісектриси AA_1, BB_1, CC_1. Бісектриси AA_1, CC_1 перетинають відрізки C_1B_1 та B_1A_1 в точках N. Довести, що $\angle MBB_1 = \angle NBB_1$.

26. На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взяті точки A_1, B_1, C_1, при цьому AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Довести, що

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} \le \frac{1}{4}.$$

27. На сторонах трикутника ABC у зовнішню сторону побудовані квадрати. A_1, B_1, C_1 – середини протилежних сторін квадратів, побудованих на BC, CA, AB відповідно. Довести, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

28. Нехай з точки A, яка взята зовні кола, проведені дві дотичні AM і AN до кола та дві січні, а точки P та Q – точки перетину кола з першою січною, точки K та L – з другою. Тоді прямі PK, QL і MN перетинаються в одній точці. Довести.

29. Трикутник $A'B'C'$ вписано в трикутник ABC: вершини A', B', C' лежать на сторонах BC, CA, AB відповідно. Довести, що якщо прямі, які проведені через вершини трикутника $A'B'C'$ перпендикулярно до відповідних сторін трикутника ABC, перетинаються в одній точці, то прямі, які проведені через вершини трикутника ABC перпендикулярно до відповідних сторін трикутника $A'B'C'$ перетинаються теж в одній точці.

30 (теорема Ван-Обеля). На сторонах BC, CA, AB трикутника ABC взято точки A_1, B_1, C_1, так що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці. Довести, що $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{AC_1}{C_1B} + \dfrac{AB_1}{B_1C}$.

31. Задано трикутник ABC. Довести, що чевіани AA_1, BB_1, CC_1, які ділять його периметр навпіл, перетинаються в одній точці.

4. ТЕОРЕМИ ДЕЗАРГА, ПАППА, ПАСКАЛЯ

Нетривіальними прикладами використання теореми Менелая є доведення наступних теорем Дезарга, Паппа, Паскаля.

Теорема Дезарга є однією з перших важливих теорем проективної геометрії. Вона була доведена в першій половині XVII століття французьким математиком та інженером Жераром Дезаргом (1591-1661).

Теорема 9 (Дезарга). Трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ розташовані на площині так, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 мають спільну точку О. Нехай *A* – точка перетину прямих B_1C_1 та B_2C_2, *B* – точка перетину прямих A_1C_1 та A_2C_2, *C* – точка перетину прямих A_1B_1 та A_2B_2. Тоді точки A, B, C лежать на одній прямій (рис. 4.1)**.**

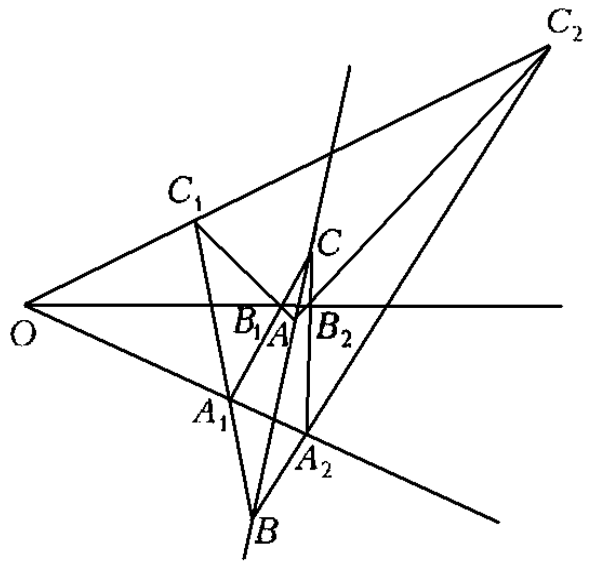


Рис. 4.1

Доведення.

З теореми Менелая для трикутника OB_1C_1 та прямої AB_2C_2 (точка A лежить на B_1C_1, B_2 – на OB_1, C_2 – на OC_1) випливає, що

$$\frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{C_2C_1}{C_2O} \cdot \frac{B_2O}{B_2B_1} = 1.$$

Аналогічно, з трикутників OC_1A_1 та OA_1B_1, які перетинаються прямими BC_2A_2 та CA_2B_2 відповідно, маємо:

$$\frac{BC_1}{BA_1}\cdot\frac{A_2A_1}{A_2O}\cdot\frac{C_2O}{C_2C_1}=1,\quad \frac{CA_1}{CB_1}\cdot\frac{B_2B_1}{B_2O}\cdot\frac{A_2O}{A_2A_1}=1.$$

Перемножуючи виписані рівності, після скорочення одержуємо:

$$\frac{AB_1}{AC_1}\cdot\frac{BC_1}{BA_1}\cdot\frac{CA_1}{CB_1}=1.$$

Але точки A, B, C лежать на сторонах або продовженнях сторін трикутника $A_1B_1C_1$ і згідно з теоремою Менелая лежать на одній прямій.

Теорема доведена.

Наступна теорема була доведена в другій половині III століття давньогрецьким математиком Паппом Олександрійським.

Теорема 10 (Паппа). На одній з прямих, що перетинаються, взяті точки A_1, B_1, C_1, на іншій – точки A_2, B_2, C_2. Прямі A_1B_2 і A_2B_1, B_1C_2 і B_2C_1, C_1A_2 і C_2A_1 перетинаються в точках C, A, B відповідно. Тоді точки A, B, C лежать на одній прямій (рис. 4.2)**.**

Доведення.

Розглянемо трикутник $A^/B^/C^/$, де $A^/$– точка перетину прямих A_1B_2 і A_2C_1, $B^/$– точка перетину прямих B_1C_2 і C_1A_2, $C^/$– точка перетину прямих A_1B_2 і B_1C_2. Точки A, B, C лежать на прямих $B^/C^/, A^/B^/, A^/C^/$ відповідно.

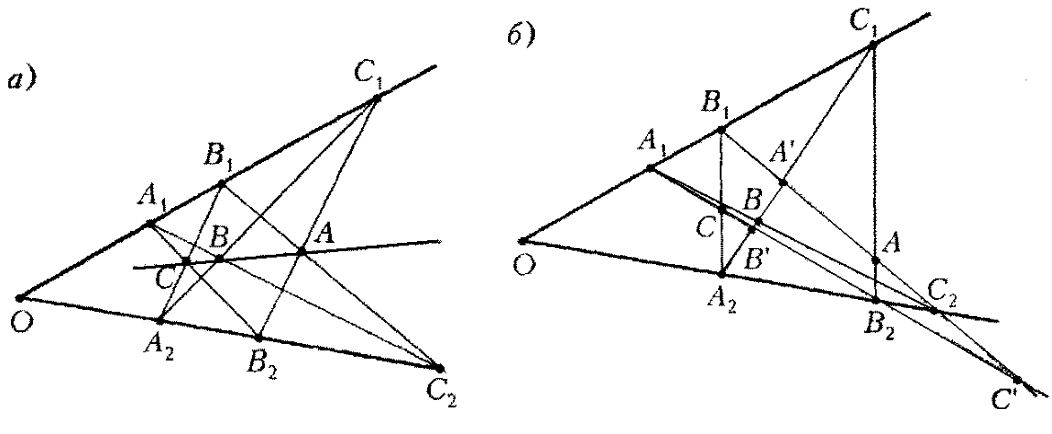


Рис. 4.2

Запишемо теорему Менелая для трикутника $A'B'C'$ та п'яти прямих $AB_2C_1, BC_2A_1, CA_2B_1, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$, які перетинають сторони (або їх продовження) цього трикутника. Маємо

$\Delta A'B'C'$ та пряма AB_2C_1: $\dfrac{AA'}{AC'}\cdot\dfrac{B_2C'}{B_2B'}\cdot\dfrac{C_1A'}{C_1B'}=1,$

$\Delta A'B'C'$ та пряма BC_2A_1: $\dfrac{BB'}{BA'}\cdot\dfrac{C_2A'}{C_2C'}\cdot\dfrac{A_1B'}{A_1C'}=1,$

$\Delta A'B'C'$ та пряма CA_2B_1: $\dfrac{B_1A'}{B_1C'}\cdot\dfrac{A_2B'}{A_2A'}\cdot\dfrac{CC'}{CB'}=1,$

$\Delta A'B'C'$ та пряма $A_1B_1C_1$: $\dfrac{B_2B'}{B_2C'}\cdot\dfrac{C_2C'}{C_2A'}\cdot\dfrac{A_2A'}{A_2B'}=1,$

$\Delta A'B'C'$ та пряма $A_2B_2C_2$: $\dfrac{A_1C'}{A_1B'}\cdot\dfrac{B_1C'}{B_1A'}\cdot\dfrac{C_1B'}{C_1A'}=1.$

Перемножуючи одержані рівності, знаходимо: $\dfrac{AA'}{AC'}\cdot\dfrac{BB'}{BA'}\cdot\dfrac{CC'}{CB'}=1,$

отже, точки C, A, B лежать на одній прямій. Теорема доведена.

Теорема 11 (Паскаля). Нехай шестикутник $ABCDEF$ **вписано в коло. Тоді точки перетину його протилежних сторін лежать на одній прямій** (рис. 4.3)**.**

Доведення.

Нехай L, M, N – точки перетину прямих AB і DE, CD і FA, BC і EF відповідно, а U, V, W – точки перетину прямих CD і EF, AB і EF, AB і CD відповідно. Необхідно довести, що L, M, N лежать на одній прямій (рис.4.3).

Застосуємо теорему Менелая до трикутника UVW та прямої LDE:

$$\frac{VL}{WL}\cdot\frac{WD}{UD}\cdot\frac{UE}{VE}=1.$$

Застосуємо теорему Менелая до трикутника UVW та прямої AMF:

$$\frac{WM}{UM} \cdot \frac{UF}{VF} \cdot \frac{VA}{WA} = 1.$$

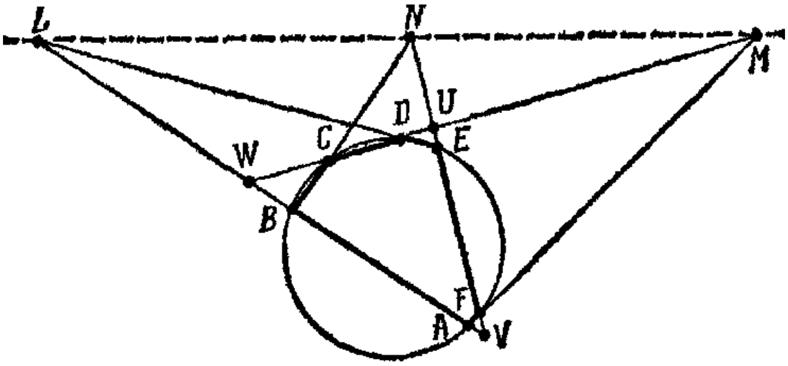


Рис. 4.3

Застосуємо теорему Менелая до трикутника UVW та прямої BCN:

$$\frac{UN}{VN} \cdot \frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} = 1.$$

Перемножуючи ці рівності, маємо

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UN}{VN} = \frac{UD}{WD} \cdot \frac{VE}{UE} \cdot \frac{VF}{UF} \cdot \frac{WA}{VA} \cdot \frac{WB}{VB} \cdot \frac{UC}{WC}$$

Використаємо властивості відрізків січних:

$UD \cdot UC = UF \cdot UE,\qquad VE \cdot VF = VA \cdot VB,\qquad WA \cdot WB = WC \cdot WD.$

Звідси маємо

$$\left|\frac{UD}{WD} \cdot \frac{VE}{UE} \cdot \frac{VF}{UF} \cdot \frac{WA}{VA} \cdot \frac{WB}{VB} \cdot \frac{UC}{WC}\right| = 1,$$

а оскільки знак кожного з шести співмножників від’ємний, то

$$\frac{UD}{WD} \cdot \frac{VE}{UE} \cdot \frac{VF}{UF} \cdot \frac{WA}{VA} \cdot \frac{WB}{VB} \cdot \frac{UC}{WC} = 1,$$

тому

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UN}{VN} = 1,$$

отже, точки L, M, N лежать на одній прямій.

Теорема доведена.

Розглянемо теорему бельгійського математика Ван-Обеля. Порівняно з теоремами Менелая та Чеви вона використовується значно рідше. Це пов'язано з тим, що вона має значно вужчий спектр застосування, але вона є надійним помічником при розв'язанні часом досить складних геометричних задач.

Теорема 12 (Ван-Обеля): Якщо відрізки AA_1, BB_1, CC_1 **проходять через точку** T**, що лежить всередині трикутника** $\triangle ABC$ (рис. 4.4)**, то**

$$\frac{AT}{TA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}. \tag{4.1}$$

Доведення:

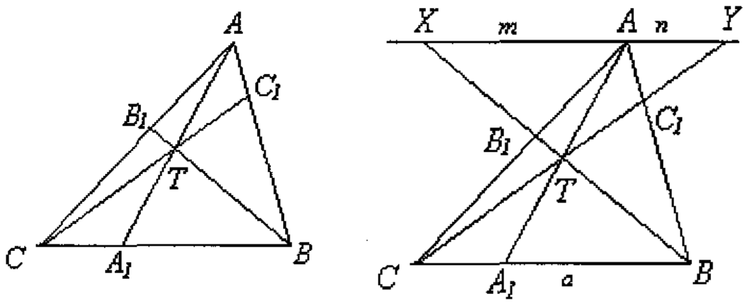


Рис. 4.4

Проведемо через вершину A паралельну до BC пряму. Нехай продовження відрізків BB_1 та CC_1 перетнуть її в точках X і Y відповідно. З подібності трикутників $\triangle B_1AX$ і $\triangle B_1CB$ випливає $\frac{m}{a} = \frac{AB_1}{B_1C}$, а з подібності трикутників $\triangle C_1AY$ і $\triangle C_1BC$: $\frac{n}{a} = \frac{AC_1}{C_1B}$.

Додавши останні дві рівності, отримаємо:

$$\frac{m+n}{a} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

З подібності трикутників $\triangle TXY$ та $\triangle TBC$ слідує

$$\frac{m+n}{a} = \frac{AT}{TA_1}.$$

Отже,

$$\frac{AT}{TA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Доведено.

Наведемо приклади задач на застосування теореми Ван-Обеля:

1. Довести, що медіани трикутника в точці перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника.

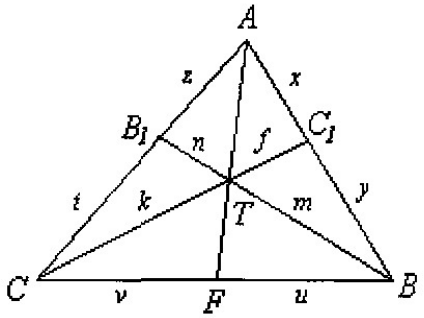


Рис. 4.5

2. У трикутнику $\triangle ABC$ проведено чевіани BB_1 та CC_1, що перетинаються в точці T (рис. 4.5).

Складено 4 відношення

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{x}{y};\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{z}{t};\frac{BT}{TB_1}=\frac{m}{n};\frac{CT}{TC_1}=\frac{k}{f}.$$

Довести, що коли відомі будь-які два з них, то можна обчислити два інші.

5. БІСЕКТРИСА ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Бісектрисою кута називається промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут пополам.

Бісектрисою трикутника, опущеною з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні трикутника.

Властивості бісектриси трикутника (частину доведень пропонуємо довести читачам самостійно):

1. Всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці (її називають інцентром), яка є центром вписаного в трикутник кола.

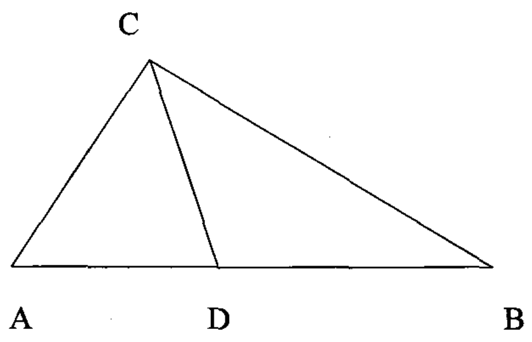


Рис. 5.1

2. Бісектриса CD внутрішнього кута $\angle C$ трикутника ABC ділить протилежну сторону трикутника на відрізки, пропорційні двом іншим AC та BC сторонам (рис. 5.1):

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC} \qquad (5.1).$$

3. Бісектриса *BD* зовнішнього кута *CBF* трикутника *ABC* перетинає продовження протилежної сторони *AC* трикутника в такій точці *D*, відстані від якої до кінців цієї сторони *DA* і *DC* відповідно пропорційні до прилеглих сторін *AB* і *BC* (рис. 5.2).

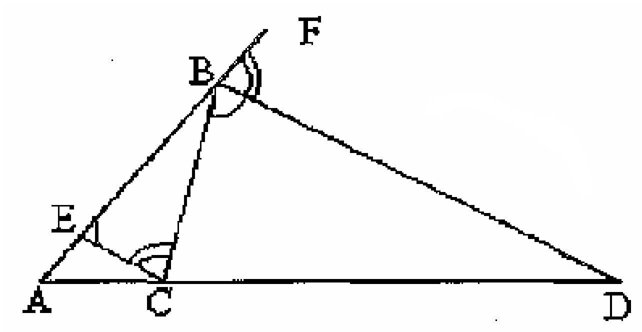


Рис. 5.2

Доведення.

Проведемо $CE \parallel BD$, отримаємо пропорцію $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BE}$.

З того, що $\angle BEC = \angle DBF$ як відповідні, а $\angle BCE = \angle DBC$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній *BC,* кути *FBD* і *CBD* рівні за умовою, то $\angle BEC = \angle BCE$. Значить, трикутник *BCE* рівнобедрений, тобто *BE*=*BC*. Підставимо у пропорцію замість *BE* рівний відрізок *BC* і отримаємо $\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC}$, що й треба було довести.

Примітка: окремий випадок являє бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника, яка паралельна основі.

4. Якщо точка *O* – точка перетину бісектрис трикутника *ABC*, то

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{AC + AB}{BC}, \qquad (5.2)$$

де AA_1 – бісектриса кута *A* (рис. 5.3).

Доведення:

Нехай у трикутнику $\triangle ABC$ AA_1 – бісектриса $\angle A$, і тому за властивістю 2

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A_1B}{A_1C} \text{ або } \frac{AB}{AC}=\frac{A_1B}{BC-A_1B}.$$

Знайдемо із останньої рівності A_1B

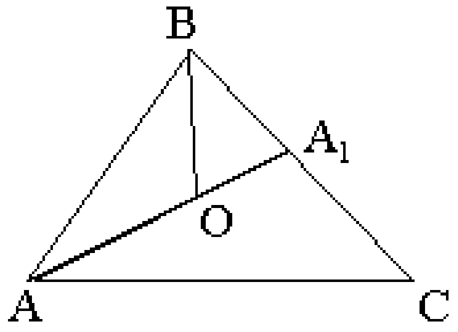


Рис. 5.3

$$AC\cdot A_1B=AB\cdot\left(BC-A_1B\right),$$

$$AC\cdot A_1B+AB\cdot A_1B=AB\cdot BC,$$

$$A_1B=\frac{AB\cdot BC}{AC+AB}.$$

Розглянемо $\triangle AA_1B$, проведемо в ньому бісектрису BO (див. власт. 1). За властивістю 2 знову маємо

$$\frac{A_1O}{AO}=\frac{A_1B}{AB}.$$

З двох останніх рівностей маємо

$$\frac{A_1O}{AO}=\frac{A_1B}{AB}=\frac{AB\cdot BC}{AB\cdot\left(AC+AB\right)}=\frac{BC}{AC+AB} \text{ або}$$

$$\frac{AO}{A_1O}=\frac{AC+AB}{BC}.$$

Доведено.

5. Якщо у трикутнику позначити сторони за a,b,c, бісектриси за l_a, l_b, l_c та півпериметр $p=\frac{a+b+c}{2}$, то бісектриси його можна обчислити за наступними формулами

$$l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\left(p-a\right)}, \quad (5.3)$$

$$l_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acp\left(p-b\right)}, \quad (5.4)$$

$$l_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abp\left(p-c\right)} \quad (5.5)$$

або

$$l_a=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left(\left(b+c\right)^2-a^2\right)}, \quad (5.6)$$

$$l_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac\left((a+c)^2 - b^2\right)}, \qquad (5.7)$$

$$l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\left((a+b)^2 - c^2\right)}. \qquad (5.8)$$

Доведення.

Знайдемо для прикладу l_a, оскільки інші бісектриси знаходяться аналогічно.

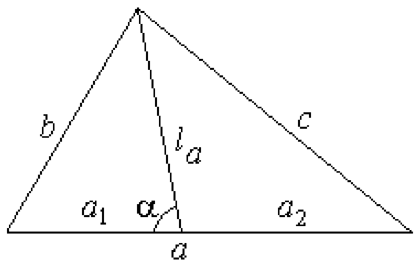


Рис. 5.4

Легко бачити $a_1 + a_2 = a$ та $\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{c}$.

Виразимо з цих умов a_1, a_2 через a, b, c, маємо систему

$$\begin{cases} a_1 = a - a_2, \\ a_1 c = a_2 b, \end{cases}$$

розв'язавши її, отримаємо

$$a_2 = \frac{ac}{b+c} \text{ та } a_1 = \frac{ab}{b+c}.$$

Розглянемо трикутники зі сторонами a_1, b, l_a та a_2, c, l_a. Застосуємо до кожного з них теорему косинусів

$$b^2 = a_1^2 + l_a^2 - 2a_1 l_a \cos\alpha \text{ та}$$

$$c^2 = a_2^2 + l_a^2 - 2a_2 l_a \cos\left(180^o - \alpha\right) = a_2^2 + l_a^2 + 2a_2 l_a \cos\alpha .$$

Помножимо першу рівність на a_2, а другу на a_1 та додамо отримані рівності. Отримаємо:

$$a_2 b^2 + a_1 c^2 = a_2 a_1^2 + a_2 l_a^2 + a_1 a_2^2 + a_1 l_a^2 = a a_1 a_2 + a l_a^2,$$

$$\frac{ac}{b+c}b^2+\frac{ab}{b+c}c^2=a\frac{ab}{b+c}\frac{ac}{b+c}+al_a^2,$$

$$l_a^2=\frac{b^2c}{b+c}+\frac{c^2b}{b+c}-\frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

$$l_a^2=\frac{b^2c+c^2b}{b+c}-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}=\frac{bc}{b+c}\left(b+c-\frac{a^2}{b+c}\right)=\frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2-a^2\right).$$

Добувши з останньої рівності корінь, отримаємо шуканий результат

$$l_a=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}.$$

Від цієї формули легко перейти до

$$l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

що й пропонуємо виконати читачеві самостійно.

Самостійно пропонуємо знайти відстань від вершини трикутника до точки перетину його бісектрис.

6. Будь-який трикутник, у якого дві бісектриси мають рівні довжини, є рівнобедреним. Ця властивість ще носить назву «теорема Штейнера-Лемуса».

6. МЕДІАНА ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Медіаною трикутника називається відрізок, що з'єднує його вершину з серединою протилежної сторони.

Властивості медіани трикутника:

1. Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка завжди знаходиться всередині трикутника і є центром його ваги (її називають центроїдом). Центроїд ділить кожну медіану у відношення 2:1 починаючи від вершини трикутника.

2. Медіани обчислюються за формулами:

$$m_a = \frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}{2}, \qquad (6.1)$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}}{2}, \qquad (6.2)$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{2}. \qquad (6.3)$$

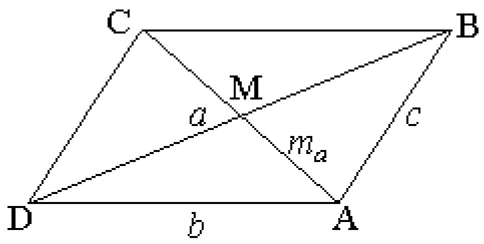


Рис.6.1

Нехай маємо паралелограм $ABCD$, в якому відомо, що $BD = a, AD = b, AB = c$, знайдемо $m_a = AM = \frac{1}{2}AC$ (рис. 6.1).

За властивістю діагоналей паралелограма маємо

$$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2,$$

$4m_a^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2 = 2\left(b^2+c^2\right)-a^2$, або

$m_a = \frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}}{2}$, що й треба було довести. Інші рівності доводяться аналогічно

3. Сума квадратів медіан рівна трьом чвертям суми квадратів сторін трикутника $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Доведення базується на підстановці замість медіан їх значень, виражених через сторони.

4. (Теорема Лейбніца): алгебраїчні суми квадратів відстаней будь-якої точки X площини від вершини трикутника ABC і від його центроїда M пов'язані співвідношенням (рис. 6.2)

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2. \qquad (6.4)$$

Доведення.

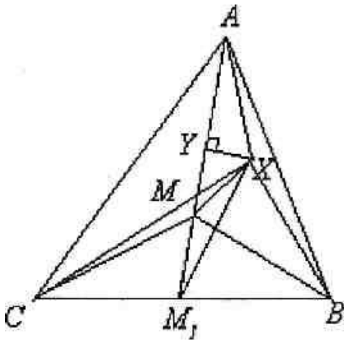


Рис. 6.2.

Позначимо через *Y* проекцію точки *X* на медіану.

Нехай для визначеності $\angle XMA$ гострий.

З трикутників XAM і XAM_1 отримаємо

$$XA^2 = XM^2 + AM^2 - 2AM \cdot MY \left(MY = MX \cdot \cos \angle XMA \right),$$

$$XM_1^2 = XM^2 + MM_1^2 + 2M_1M \cdot MY .$$

Помножимо другу рівність на 2 і додамо до першої, врахувавши, що $2MM_2 = AM$.

Отримаємо

$$XA^2 + 2XM_1^2 = 3XM^2 + AM^2 + 2MM_1^2 . \qquad (*)$$

Але ж XM_1 медіана трикутника BXC, а MM_1 – медіана трикутника BMC.

За формулами для медіан трикутника маємо

$$XM_1^2 = \frac{2\left(XB^2 + XC^2 \right) - BC^2}{4},$$

$$MM_1^2 = \frac{2\left(MB^2 + MC^2 \right) - BC^2}{4}.$$

Підставимо останні дві рівності у (*), отримаємо:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 3XM^2 + AM^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}BC^2$$

або

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = AM^2 + BM^2 + CM^2 + 3XM^2 .$$

Доведено.

7. ВИСОТА ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ. ОРТОЦЕНТР ТРИКУТНИКА

Висотою трикутника, проведеною з даної вершини, називається перпендикуляр опущений з цієї вершини на пряму, що містить протилежну сторону трикутника.

Властивості висот трикутника:

1. Перетинаються в одній точці, яку називають ортоцентром.

2. Точка перетину висот гострокутного трикутника ABC ділить його висоту BB_1 на відрізки, відношення яких, вважаючи від вершини, рівне

$$\frac{\cos\angle B}{\cos\angle A\cdot\cos\angle C}. \tag{7.1}$$

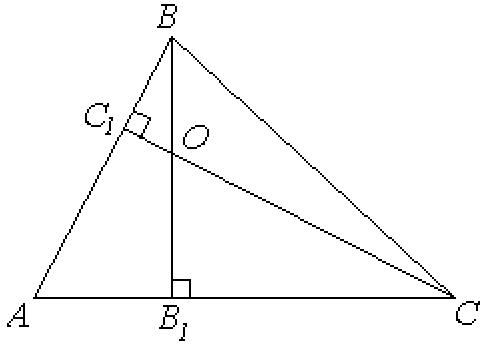


Рис. 7.1

Доведення.

Розглянемо прямокутний трикутник $\triangle BOC_1$, в ньому

$$BO=\frac{BC_1}{\cos\angle ABO}=\frac{BC_1}{\sin\angle A}.$$

У трикутнику $\triangle CBC_1$

$$BC_1=BC\cos\angle B.$$

Отже,

$$BO=\frac{BC\cos\angle B}{\sin\angle A}.$$

Згідно теореми синусів у $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin\angle A}=\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle C},$$

тоді

$$BO=\frac{BC\cos\angle B}{\sin\angle A}=\frac{AC\cos\angle B}{\sin\angle B}=\frac{AB\cos\angle B}{\sin\angle C}.$$

Знайдемо OB_1

$$OB_1=BB_1-BO=AB\sin\angle A-\frac{AB\cos\angle B}{\sin\angle C}=AB\left(\sin\angle A-\frac{\cos\angle B}{\sin\angle C}\right)=$$

$$=AB\left(\frac{\sin\angle A\sin\angle C-\cos\angle\left(180^0-\left(A+C\right)\right)}{\sin\angle C}\right)=$$

$$=AB\left(\frac{\sin\angle A\sin\angle C+\cos\left(\angle A+\angle C\right)}{\sin\angle C}\right)=AB\frac{\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}.$$

Знайдемо тепер відношення

$$\frac{BO}{B_1O}=\frac{\dfrac{AB\cos\angle B}{\sin\angle C}}{AB\dfrac{\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}}=\frac{\cos\angle B}{\cos\angle A\cos\angle C}.$$

Доведено.

Зауваження: якщо у трикутнику один з кутів прямий, то слід у відношенні взяти один з виразів по модулю.

3. Висоти трикутника h_a, h_b, h_c, опущені на сторони a,b,c обчислюються за формулами

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (7.2)$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (7.3)$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (7.4)$$

де

$$p=\frac{a+b+c}{2} \text{ – півпериметр.} \qquad (7.5)$$

Дійсно, з одного боку площа трикутника рівна

$$S=\frac{1}{2}ah_a, \qquad (7.6)$$

а з іншого – її можна обчислити за формулою Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad (7.7)$$

Прирівнявши праві частини рівностей (7.6) і (7.7) та виконавши елементарні перетворення, отримаємо формулу для висоти трикутника.

4. Висоту трикутника можна обчислити за формулою

$$h_a=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}. \qquad (7.8)$$

Запишемо допоміжне твердження: у будь-якому трикутнику квадрат сторони, що лежить проти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку якої-небудь із цих сторін на відрізок її від вершини гострого кута до висоти (рис.7.2).

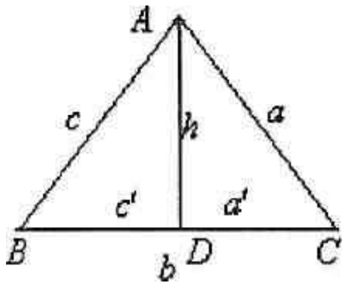


Рис. 7.2

$$b^2=a^2+c^2-2ac',$$

$$c'=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

(Коли трикутник тупокутний, то до суми квадратів сторін додається подвоєний добуток якої-небудь із цих сторін на відрізок її продовження від вершини тупого кута до висоти.)

З трикутника $\triangle ABD$ як прямокутного знаходимо висоту:

$$h_a=\sqrt{c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}.$$

Доведено.

8. ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ГЕОМЕТРІЇ З АЛГЕБРОЮ. ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ПРИ ДОВЕДЕННІ АЛГЕБРАЇЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Серед завдань підвищеної складності особливо вирізняються деякі рівняння та системи рівнянь, розв'язати які аналітично досить складно, а з використанням геометричної інтерпретації цей процес значно спрощується.

Суть даного методу полягає в тому, що за поданим рівнянням визначають геометричну фігуру, залежність між елементами якої може бути виражена даним виразом. Далі, використавши властивості одержаної фігури, обчислюють потрібні її елементи та роблять висновки.

Розпочати ознайомлення учнів з даним методом можна у 8 класі під час вивчення теми «Декартові координати на площині». Для цього бажано розв'язати послідовно такі вправи.

Приклад 1. Довести нерівність:

$$\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}+\sqrt{\left(x_3-x_2\right)^2+\left(y_3-y_2\right)^2}\geq\sqrt{\left(x_1-x_3\right)^2+\left(y_1-y_3\right)^2}. \quad (8.1)$$

Розв'язання.

Розглянемо вираз $\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$ як довжину відрізка AB, де $A\left(x_1, y_1\right)$ та $B\left(x_2, y_2\right)$. Аналогічно розглянемо вирази $\sqrt{\left(x_1-x_3\right)^2+\left(y_1-y_3\right)^2}$ та $\sqrt{\left(x_3-x_2\right)^2+\left(y_3-y_2\right)^2}$ як довжини відрізків AC і BC, де $C\left(x_3, y_3\right)$. Тоді нерівність, яку потрібно довести, запишеться у вигляді $AB+BC>AC$. Отриману нерівність доводимо, використовуючи аксіому вимірювання трикутників і нерівність трикутника.

Вивчаючи в 9-му класі метричні співвідношення в трикутнику, корисно розв’язати з учнями такі вправи:

Приклад 2. Чи має додатні корені система

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 36? \end{cases} \qquad (8.2)$$

Кожне з рівнянь є записом теореми косинусів для деякого трикутника. Перше – зі сторонами x, y та кутом між ними 120°. Друге – зі сторонами x, z та кутом між ними 120°. Третє – зі сторонами y, z та кутом між ними 120°.

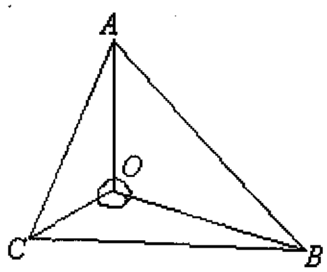


Рис. 8.1

Оскільки сума відомих кутів рівна 360°, то трикутники можна зобразити так, щоб вони мали спільну вершину і сторони (рис. 8.1). Тоді $AB = 2, AC = 3, BC = 6$, але ж такого трикутника не існує. Отже, система (8.2) не має додатних коренів.

Розглянувши подібні завдання, ми бачимо, що геометрична інтерпретація значно спрощує розв'язання досить складних вправ і дозволяє отримувати бажаний результат навіть у випадках, коли інші методи не працюють. Даний підхід можна використати при підготовці учнів до предметних олімпіад і на уроках в класах з поглибленим вивченням математики.

Для закріплення пропонуємо розв’язати наступні приклади:

1. Знайти найменше значення виразу $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$.
2. Розв’язати систему $\begin{cases} \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} = 5, \\ 2xy - 3y = 24. \end{cases}$
3. Обчислити $M = 2\sqrt{3}xy + 2xz + \sqrt{2}yz$, якщо $x, y, z > 0$ та відомо, що

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{3} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}xz = 64, \\ \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{yz}{\sqrt{3}} + \dfrac{z^2}{3} = 225, \\ x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 289. \end{cases}$$

9. МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ У ЧОТИРИКУТНИКУ

9.1.Поняття многокутника

Ламаною $A_1A_2A_3....A_n$ називається фігура, яка складається з точок A_1, $A_2,....A_n$ і відрізків A_1A_2, $A_2A_3,....,A_{n-1}An$, що їх сполучають. Точки A_1, $A_2,....A_n$ – вершини, відрізки A_1A_2, $A_2A_3,....,A_{n-1}A_n$ – ланки ламаної. Ламана називається простою, якщо вона не має самоперетинів. Ламана називається замкнутою, якщо у неї співпадають кінці. Довжина ламаної – це сума довжин її ланок. Основна властивість ламаної: довжина ламаної не менша довжини відрізка, що сполучає її кінці.

Об’єднання простої замкненої ламаної та її внутрішньої області називається многокутником. Сама ламана називається межею многокутника, а її внутрішня область – внутрішньою областю многокутника. Ланки ламаної називаються сторонами многокутника. Точки, в яких перетинаються дві суміжні ланки, називаються вершинами многокутника. Кути, утворені двома суміжними сторонами многокутника, називаються внутрішніми кутами многокутника. Кути, суміжні з внутрішніми кутами многокутника, називаються його зовнішніми кутами.

Діагоналлю многокутника називається відрізок, що з'єднує дві не сусідні вершини (вони не належать одній із сторін многокутника).

Сума довжин усіх сторін многокутника називається його периметром і позначається буквою Р або 2р, де р – півсума всіх його сторін (півпериметр).

Залежно від числа сторін многокутник називається трикутником, чотирикутником, п'ятикутником тощо.

Многокутник часто називають n-кутником, де n – число сторін (вершин, кутів).

Правильним многокутником називається опуклий многокутник, у якого всі кути рівні й усі сторони рівні. Прикладами правильних многокутників є рівносторонній трикутник, квадрат.

Запишемо формулу для обчислення кута правильного n-кутника. Сума всіх кутів такого n-кутника дорівнює (n – 2)·180°, причому всі його кути рівні, тому

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} \qquad (9.1)$$

Коло називається *описаним* навколо многокутника, якщо всі вершини многокутника лежать на цьому колі.

Теорема 13. Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло, і до того ж тільки одне.

Коло називається *вписаним* у многокутник, якщо всі сторони многокутника дотикаються до цього кола.

Теорема 14. У будь-який правильний многокутник можна вписати коло і до того ж тільки одне.

Наслідок 1. Коло вписане в правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника в їх серединах.

Наслідок 2. Центр кола, описаного навколо правильного многокутника, збігається з центром кола, вписаного в цей многокутник. Вказана точка називається центром правильного многокутника, центром мас.

Площа правильного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на апофему (апофемою називають висоту, опущену з центра многокутника на його сторону).

Також площу правильного многокутника можна обчислити за наступними формулами

$$S = \frac{1}{4} n \cdot a^2 \cdot ctg\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} n \cdot R^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n} = n \cdot r^2 \cdot tg\frac{180^\circ}{n}, \qquad (9.2)$$

де a, R, r - відповідно сторона правильного многокутника, радіус описаного та вписаного кіл.

9.2.Чотирикутники

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не повинні перетинатися. Дані точки називаються вершинами чотирикутника, а відрізки, що їх сполучають, – сторонами чотирикутника.

Вершини чотирикутника називаються сусідніми, якщо вони є кінцями однієї з його сторін. Не сусідні вершини називаються протилежними. Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються діагоналями. Сторони чотирикутника, що виходять з однієї вершини, називаються сусідніми сторонами. Сторони, які не мають спільного кінця, називаються протилежними сторонами. Периметр чотирикутника – сума довжин усіх його сторін.

Чотирикутник називається опуклим, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону. На рисунку 9.1 зліва *ABCD* – опуклий чотирикутник; *AC*, *BD* – його діагоналі. На рисунку 9.1 справа *KNPM* – неопуклий чотирикутник; *KP*, *MN* – його діагоналі.

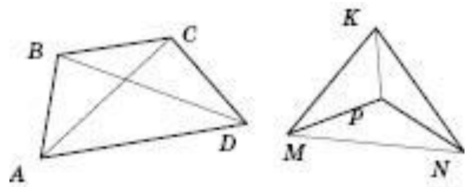


Рис. 9.1

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

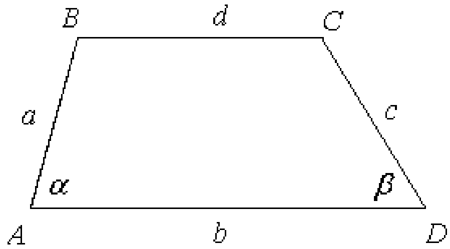


Рис. 9.2

Для чотирикутників існують аналоги теорем, розглянутих у попередніх пунктах для трикутників, зокрема теорема косинусів має вигляд:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - -2bc\cos\beta + 2ac\cos(\alpha+\beta). \quad (9.3)$$

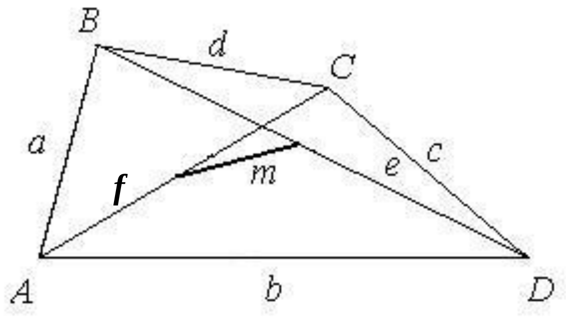


Рис. 9.3

Справедлива теорема Ейлера, що виражає відстань між серединами діагоналей чотирикутника через його діагоналі і сторони (рис. 9.3).

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2\right). \quad (9.4)$$

Площа будь-якого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними. Також площу чотирикутника можна обчислити через його сторони a, b, c, d та діагоналі m і n:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\left(2mn + a^2 + c^2 - b^2 - d^2\right)\left(2mn - a^2 - c^2 + b^2 + d^2\right)}. \quad (9.5)$$

Якщо чотирикутник вписаний в коло, то його площа рівна

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \quad (9.6)$$

де a, b, c, d – сторони чотирикутника, а

$$p = \frac{a+b+c+d}{2} \text{ – півпериметр.} \quad (9.7)$$

Теорема 15 (Птоломея). Добуток діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків протилежних сторін (рис. 9.4).**:**

$$m \cdot n = a \cdot b + c \cdot d. \quad (9.8)$$

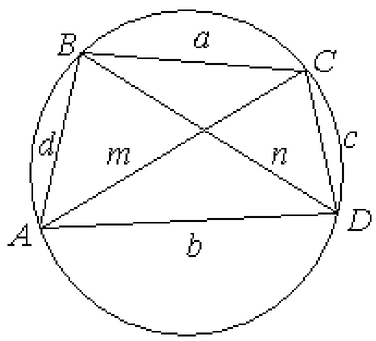


Рис. 9.4

Доведення.

Нехай чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. $AB=d$, $BC=a$, $CD=c$, $AD=b$ – сторони чотирикутника, $AC=m$, $BD=n$ – його діагоналі.

За теоремою косинусів:

з ΔABC: $m^2=d^2+a^2+2da\cdot\cos B$, тоді

$$\cos B = \frac{m^2 - a^2 - d^2}{2da}; \quad (9.9)$$

з ΔADC: $m^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos B$, звідки

$$\cos B=\frac{b^2+c^2-m^2}{2bc} \qquad (9.10)$$

Ліві частини рівностей (9.9) і (9.10) рівні, тому рівні й праві частини, маємо:

$$\frac{m^2-a^2-d^2}{2da}=\frac{b^2+c^2-m^2}{2bc} \text{ або } \frac{m^2-a^2-d^2}{da}=\frac{b^2+c^2-m^2}{bc}.$$

За властивістю пропорції $bc\cdot(m^2-a^2-d^2)=ad\cdot(b^2+c^2-m^2)$. Після нескладних перетворень, отримаємо

$$m^2(bc+da)=bc\cdot(a^2+d^2)+ad\cdot(b^2+c^2). \qquad (9.11)$$

Враховуючи, що $a^2bc+d^2bc+b^2ad+c^2ad=ab\cdot(ac+bd)+$

$+cd\cdot(bd+ac)=(ac+bd)(ab+cd)$, з (9.11) маємо:

$$m^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+da}. \qquad (9.12)$$

Аналогічно, розглядаємо трикутники ABD і CBD, записуємо теорему косинусів для n, виражаючи її через сторони вказаних трикутників та кут A.

Отримаємо:

$$\cos A=\frac{b^2+d^2-n^2}{2bd}=\frac{n^2-a^2-c^2}{2ac}.$$

Звідси $ac\cdot(b^2+d^2-n^2)=bd\cdot(n^2-a^2-c^2)$, тому

$$n^2(bd+ac)=ac\cdot(b^2+d^2)+bd\cdot(a^2+c^2)=(ab+cd)(ad+bc),$$

так як $acb^2+acd^2+bda^2+bdc^2=ab(cb+ad)+cd(ad+bc)=(ab+cd)(ad+bc)$.

Отже,

$$n^2=\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{bd+ac}. \qquad (9.13)$$

Перемножуючи рівності (9.12) і (9.13), отримаємо

$$m^2\cdot n^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{bc+da}\cdot\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{bd+ac}=(ab+cd)^2.$$

Остаточно $m\cdot n=ab+cd$, що й треба було довести.

Наслідки з теореми Птоломея (вираження діагоналей через сторони):

$$m^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc};$$
$$n^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ac+bd}; \qquad (9.14)$$
$$\frac{m}{n} = \frac{ac+bd}{ad+bc}.$$

9.3. Паралелограм

Паралелограм – це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні. На рисунку 9.5 $ABCD$ – паралелограм.

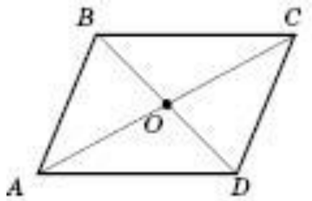


Рис. 9.5

Властивості паралелограма:

1. У паралелограма протилежні сторони попарно рівні: $AB = CD, BC = AD$ (див. рис. 9.5). У паралелограма протилежні попарно кути рівні: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.
2. Сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°. Сума усіх кутів паралелограма дорівнює 360°.
3. Діагоналі паралелограма перетинаються й у точці перетину діляться навпіл.
4. Діагональ паралелограма поділяє його на два рівні трикутники (рис. 9.6).

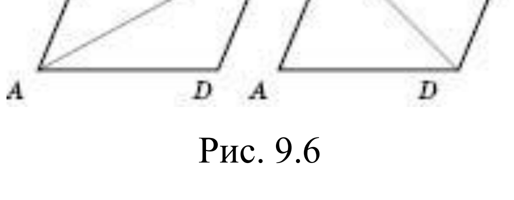


Рис. 9.6

5. Діагоналі паралелограма розбивають його на дві пари рівних трикутників (рис. 9.7).

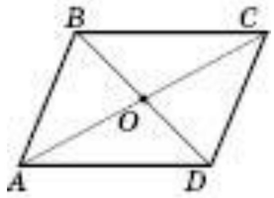


Рис. 9.7

6. Обидві діагоналі ділять паралелограм на чотири рівновеликі трикутники (однакової площі).
7. Точка перетину діагоналей є центром симетрії.
8. Сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх сторін.

Ознаки паралелограма:

1. Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються й у точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник – паралелограм.
2. Якщо в чотирикутнику дві сторони паралельні й рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.
3. Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.
4. Якщо в чотирикутнику протилежні кути попарно рівні, то цей чотирикутник – паралелограм.
5. Якщо в чотирикутнику кути, що є прилеглими до кожної із сторін, у сумі дорівнюють 180°, то цей чотирикутник – паралелограм.
6. Якщо кожна діагональ поділяє чотирикутник на два рівні трикутники, то цей чотирикутник – паралелограм.

Кут між висотами паралелограма

Висота паралелограма – це відрізок, перпендикулярний до протилежних сторін паралелограма з кінцями на цих сторонах. На рисунку 9.8 h_1 і h_2 – висоти паралелограма.

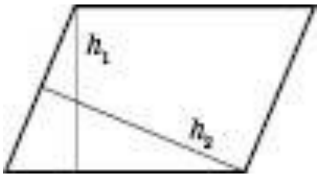


Рис. 9.8

Найчастіше висоти опускають із вершин паралелограма. Із кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти. Кут між ними дорівнюватиме куту паралелограма при сусідній вершині. На рисунку 9.9 зліва зображений кут між висотами паралелограма, опущеними з тупого кута, на рисунку 9.9 справа — між висотами, опущеними з гострого кута:

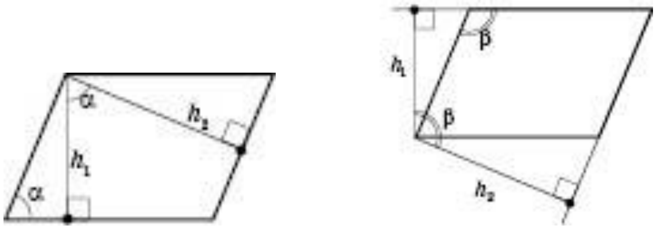


Рис. 9.9

Властивості бісектрис кутів паралелограма

1. Бісектриси сусідніх кутів паралелограма перпендикулярні (рис. 9.10).
2. Бісектриси протилежних кутів паралелограма паралельні (або збігаються, якщо паралелограм – ромб).

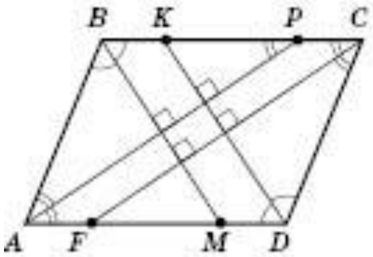


Рис. 9.10

3. Бісектриса кута паралелограма відокремлює від нього рівнобедрений трикутник.

Чотирикутник, що утворюється при перетині бісектрис кутів паралелограма, – прямокутник.

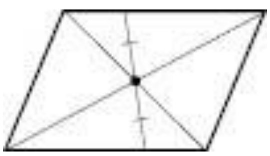


Рис. 9.11

4. Якщо через точку перетину діагоналей паралелограма проведено пряму, то відрізок цієї прямої, який розташований між паралельними сторонами, ділиться в цій точці навпіл (рис. 9.11).

9.4. Прямокутник

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі.

Властивості прямокутника

Оскільки прямокутник є паралелограмом, він має всі властивості паралелограма. Крім того, діагоналі прямокутника рівні (рис.9.12).

Рис. 9.12

Ознаки прямокутника

1. Якщо в чотирикутнику всі кути рівні, то він є прямокутником.
2. Якщо в чотирикутнику є три прямі кути, то він є прямокутником.
3. Якщо в паралелограмі є прямий кут, то паралелограм є прямокутником.
4. Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то він є прямокутником.

9.5. Ромб

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

Властивості ромба

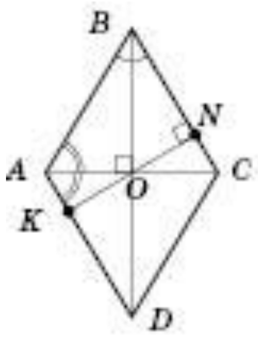


Рис. 9.13

Оскільки ромб (рис. 9.13) є паралелограмом, він має всі властивості паралелограма та ін.

1. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.
2. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.
3. Діагоналі ромба розбивають його на чотири рівні прямокутні трикутники.
4. Висоти ромба рівні (рис. 9.14). (BK=BN).

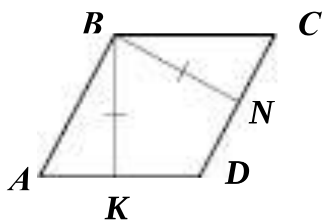


Рис. 9.14

5. Ромб має дві осі симетрії, що проходять через його діагоналі.
6. Висота ромба рівна двом радіусам вписаного кола. На рис. 9.13 висота $h=KN=2KO=2r$.

Ознаки ромба

1. Якщо в чотирикутнику всі сторони рівні, то він є ромбом.
2. Якщо в паралелограмі сусідні сторони рівні, то він є ромбом.
3. Якщо в паралелограмі діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом.
4. Якщо в паралелограмі діагональ є бісектрисою кута, то паралелограм є ромбом.

9.6. Квадрат

Квадрат — це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Властивості квадрата

Оскільки квадрат є паралелограмом, прямокутником і ромбом водночас, маємо:

1. У квадрата всі сторони рівні.
2. У квадрата всі кути рівні.
3. Діагоналі квадрата рівні, перетинаються під прямим кутом, діляться в точці перетину навпіл, є бісектрисами його кутів;
4. Діагоналі квадрата ділять його на чотири рівні рівнобедрені прямокутні трикутники (рис. 9.15).
5. Квадрат має чотири осі симетрії, які містять його діагоналі і дві середні лінії, що спо лучають середини протилежних сторін.

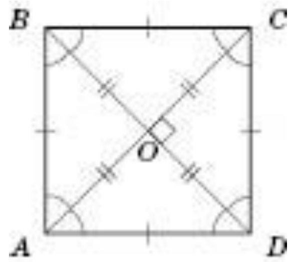


Рис. 9.15

Ознаки квадрата

1. Якщо в чотирикутника всі сторони і всі кути рівні, то він є квадратом.
2. Якщо діагоналі прямокутника перетинаються під прямим кутом, то він є квадратом.
3. Якщо діагоналі ромба рівні, то він є квадратом.

9.7. Трапеція

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві протилежні сторони паралельні. Ці сторони називаються основами трапеції, а дві інші – бічними сторонами.

Трапеція, в якої бічні сторони рівні, називається рівнобічною (див. рис. 9.16 зліва). Якщо одна з бічних сторін трапеції перпендикулярна до основ, трапеція називається прямокутною (див. рис. 9.16 справа).

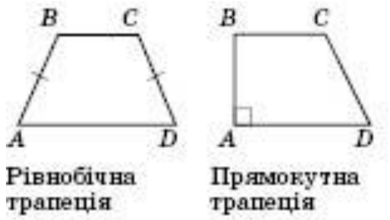


Рис. 9.16

Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, називається середньою лінією трапеції (на рис. 9.17 MN – середня лінія трапеції $ABCD$).

Зверніть увагу: середня лінія не проходить через точку перетину діагоналей трапеції.

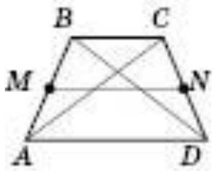


Рис. 9.17

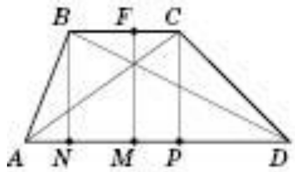


Рис. 9.18

Висотою трапеції називається відрізок прямої, перпендикулярної до основ трапеції з кінцями на основах трапеції. Найчастіше висоту проводять через вершини верхньої основи або через точку перетину діагоналей (на рис. 9.18 BN, FM, CP – висоти трапеції $ABCD$).

Властивості трапеції

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до однієї бічної сторони, дорівнює 180°.
2. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі (на рис. 9.17 $MN \parallel AD \parallel BC, MN = \dfrac{BC + AD}{2}$).
3. Усі висоти трапеції рівні між собою (на рис. 9.18 $BN=FM=CP$).

4. Бісектриса кута трапеції, якщо вона перетинає основу трапеції, відтинає від неї рівнобедрений трикутник (рис. 9.19).

Рис. 9.19

5. Якщо сума основ трапеції рівна сумі бічних сторін, то в неї можна вписати коло.

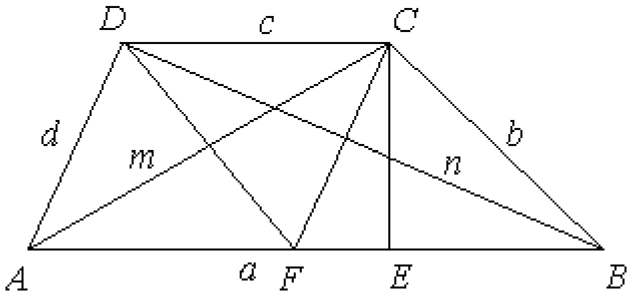


Рис. 9.20

6. У будь-якій трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ:

$$m^2+n^2=b^2+d^2+2a\cdot c \quad (9.15)$$

Доведення.

Нехай $ABCD$ – дана трапеція: $AB=a$, $CD=c$ – основи трапеції, $BC=b$, $AD=d$ – бічні сторони трапеції, $AC=m$, $BD=n$ – її діагоналі (рис. 9.20).

З ΔABC за теоремою косинусів

$$m^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos B. \quad (9.16)$$

З ΔABD за теоремою косинусів

$$n^2=a^2+d^2-2ad\cdot\cos A. \quad (9.17)$$

Додавши рівності (9.16) та (9.17) почленно, отримаємо

$$m^2+n^2=2a^2+b^2+d^2-2a(b\cdot\cos B+d\cdot\cos A). \quad (9.18)$$

Проведемо $CF\|AD$, тоді $ADCF$ – паралелограм, за його властивостями $CF=AD=d$, $AF=CD=c$, $\angle CFB=\angle DAF$.

Проведемо $CE\perp AB$, тоді отримаємо прямокутні трикутники ΔCEF і ΔCEB. З трикутника CEF: $FE=d\cos A$, з трикутника CBE: $BE=b\cdot\cos B$.

$FB=FE+BE=a-c=d\cos A+b\cdot\cos B$.

Підставляючи отриману рівність в (9.18), маємо $m^2+n^2=2a^2+b^2+d^2-2a(a-c)$ або $m^2+n^2=b^2+d^2+2a\cdot c$, що й треба було довести.

Зауваження: інколи паралелограм розглядають як окремий випадок трапеції.

7. Якщо a і b – основи трапеції і h – висота трапеції, тоді площа трапеції рівна добутку півсуми основ на висоту (або добутку середньої лінії l на висоту трапеції):

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h, \quad S = l \cdot h. \tag{9.19}$$

Властивості рівнобічної трапеції

1. У рівнобічній трапеції кути при основах рівні (рисунок 9.21 зліва).
2. У рівнобічній трапеції діагоналі рівні.
3. У рівнобічній трапеції діагоналі створюють з основою рівні кути.
4. Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло, її бічну сторону видно з центра описаного кола під прямим кутом.
5. У рівнобічній трапеції діагоналі, перетинаючись, утворюють два подібні рівнобедрені трикутники ($\Delta BOC \sim \Delta AOD$), основами яких є основи трапеції та два рівних трикутники ($\Delta AOB = \Delta COD$) (рисунок 9.21 справа).

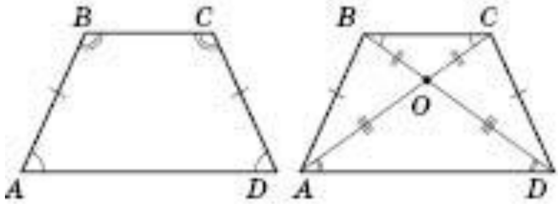


Рис. 9.21

Додаткові побудови, що використовуються для розв'язування задач на трапецію

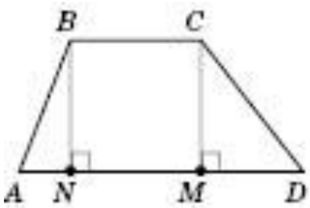


Рис. 9.22

1) На рисунку 9.22 $AN + MD = AD - BC$;

($BCMN$ – прямокутник, $MN = BC$).

Якщо $AB = CD$ (рис. 9.23), то

$$AN = KD = \frac{AD - BC}{2} \tag{9.20}$$

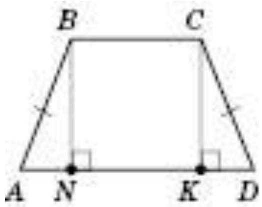
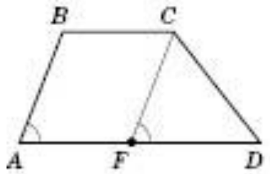
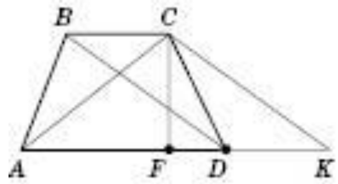


Рис. 9.23



2) На рисунку 9.24
$CF \parallel AB$; *ABCF* — паралелограм.

Рис. 9.24



3) На рисунку 9.25 $CK \parallel BD$; *BCKD* — паралелограм (*CF* – висота трапеції *ABCD*, паралелограма *BCKD* і трикутника *ACK*).

Рис. 9.25

9.8. Дельтоїд

Дельтоїд – це чотирикутник, що має дві пари сусідніх сторін однакової довжини. На відміну від паралелограма, рівними є не протилежні, а саме сусідні сторони. Дельтоїд має форму, схожу на повітряного змія (на рис. 9.26 ліворуч – опуклий дельтоїд, праворуч – неопуклий дельтоїд).

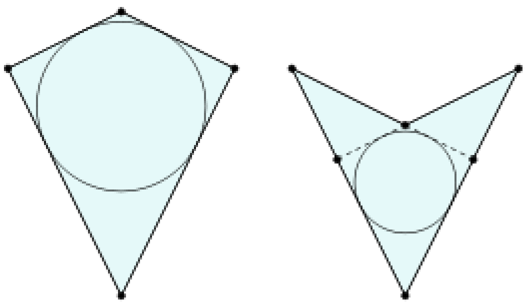


Рис. 9.26

Окремими випадками дельтоїда є рівносторонні чотирикутники – це ромби, зокрема, правильні чотирикутники або квадрати. Якщо протилежні сторони дельтоїда рівні, то такий дельтоїд є ромбом. Якщо діагоналі дельтоїда рівні і всі сторони рівні, то дельтоїд є квадратом.

Властивості дельтоїда

1. У дельтоїда внутрішні кути між сусідніми сторонами нерівної довжини рівні.
2. Діагональ дельтоїда, що з'єднує дві вершини нерівних кутів є їх бісектрисою.
3. Діагональ дельтоїда, що з'єднує дві вершини нерівних кутів лежить на осі симетрії дельтоїда.

4. Діагональ дельтоїда, що з'єднує дві вершини рівних кутів, є основою двох рівнобедрених трикутників, на які вона розділяє дельтоїд.
5. Дельтоїд є опуклим чотирикутником, що містить в собі два трикутники, які симетричні відносно однієї з діагоналей.
6. Діагональ дельтоїда, що з'єднує дві вершини рівних кутів, утворює зі рівними сторонами дельтоїда рівні кути.
7. Діагоналі дельтоїда (або їх продовження) перетинаються під прямим кутом і розділяють його на дві пари рівних прямокутних трикутників.
8. Якщо d_1 і d_2 довжина діагоналей дельтоїда, то його площу можна знайти як половину добутку діагоналей,

$$S = 0{,}5 \cdot d_1 \cdot d_2. \qquad (9.21)$$

9. Якщо a і b довжини сторін, і φ – величина кута між ними, то площу дельтоїда можна знайти, як добуток двох нерівних сторін на синус кута між ними:

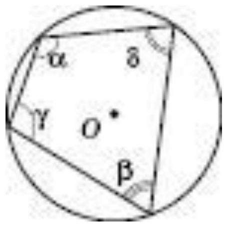
$$S = a \cdot b \cdot sin\ \varphi. \qquad (9.22)$$

10. У будь-який опуклий дельтоїд можна вписати коло, центр якого є точкою перетину бісектрис внутрішніх кутів дельтоїда. Отже, дельтоїд є описаним чотирикутником. Крім цього, якщо дельтоїд не є ромбом, то існує ще одне коло, яке дотикається до продовжень всіх чотирьох його сторін. Для неопуклого дельтоїда можна побудувати коло, що дотикається до двох більших сторін і продовжень двох менших сторін і коло, що дотикається до двох менших сторін і продовжень двох більших сторін.
11. Якщо точка перетину діагоналей дельтоїда співпадає з центром вписаного кола, тоді це ромб.
12. Якщо дельтоїд має паралельні сторони з нерівними прилеглими кутами, тоді у нього є дві осі симетрії, і центр симетрії.
13. Якщо дельтоїд має рівні внутрішні кути, тоді у нього є дві осі симетрії, і центр симетрії.

Нагадаємо, що три види чотирикутників мають симетрію: паралелограм (прямокутник, ромб, квадрат) – центральносиметричний; дельтоїд – симетричний щодо однієї діагоналі; рівнобічна трапеція – симетрична відносно середньої лінії, що з'єднує основи.

14. Якщо на сторонах рівнобічної трапеції зовні побудувати чотири правильні многокутники, тоді центри правильних многокутників є вершинами дельтоїда.
15. Будь-який дельтоїд, відмінний від ромба, – не паралелограм.
16. Будь-яка трапеція – не дельтоїд.

9.9. Вписані й описані чотирикутники



Теорема 16. Навколо чотирикутника можна описати коло тоді й тільки тоді, коли сума його протилежних кутів дорівнює 180°.

На рисунку 9.27

Рис. 9.27

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta=180^0. \qquad (9.23)$$

Із цього випливає, що коло можна описати навколо прямокутника (рисунок 9.28 зліва), зокрема квадрата (рисунок 9.28 справа). Центром описаного кола буде точка перетину діагоналей, радіус – половина діагоналі.

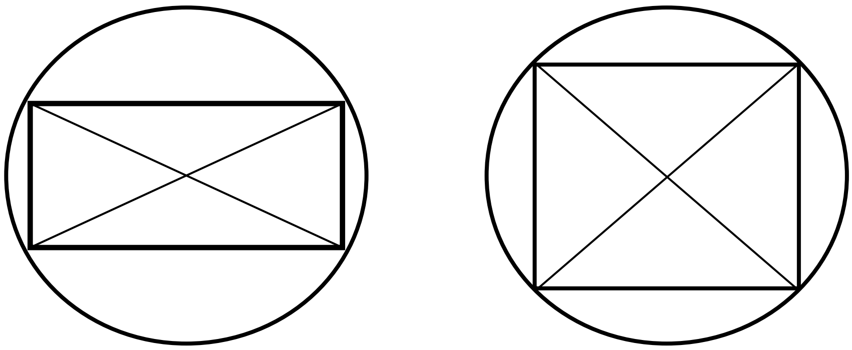
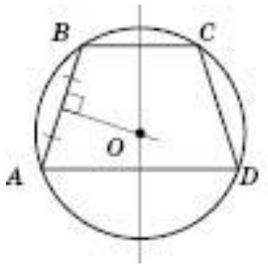


Рис. 9.28



Коло можна описати навколо трапеції тоді й тільки тоді, коли вона є рівнобічною (див. рисунок 9.29). Центром кола є точка перетину середніх перпендикулярів до сторін. Навколо паралелограма та трапеції загального виду описати коло не можна.

Рис. 9.29

(Зокрема, навколо ромба не можна описати коло.)

Теорема 17. Чотирикутник тоді й тільки тоді можна описати навколо кола, якщо суми його протилежних сторін рівні.

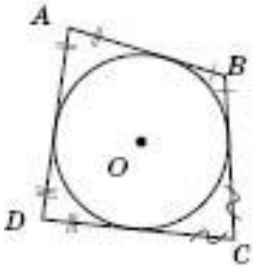


Рис. 9.30

На рисунку 9.30

$$\boldsymbol{AB + DC = AD + BC}. \qquad (9.24)$$

Отже, коло можна вписати в ромб (у т.ч. в квадрат), але не можна в прямокутник або паралелограм загального виду.

Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину діагоналей (рис. 9.31 зліва). Радіус кола дорівнює половині висоти ромба, а у квадраті – половині сторони (рис. 9.31 справа).

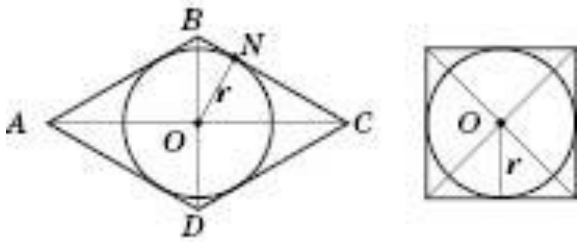


Рис. 9.31

Зверніть увагу: радіус вписаного в ромб кола (ON) – це висота прямокутного трикутника BOC, яка проведена з вершини прямого кута і має всі відповідні властивості, зокрема, є середнім геометричним між відрізками, на які вона розбиває сторону ромба, тобто

$$ON = \sqrt{BN \cdot NC}\,. \qquad (9.25)$$

Трапецію тоді й тільки тоді можна описати навколо кола, коли сума її основ дорівнює сумі бічних сторін (рис. 9.32 зліва). Центр цього кола – точка перетину бісектрис кутів трапеції. Радіус дорівнює половині висоти трапеції. У випадку рівнобічної трапеції центр вписаного кола лежить на середині висоти трапеції, яка проходить через середини основ (рис. 9.32 справа). Бічна сторона трапеції у цьому випадку дорівнює її середній лінії.

$$AB + DC = AD + BC, AB = CD = \frac{BC + AD}{2}\,. \qquad (9.26)$$

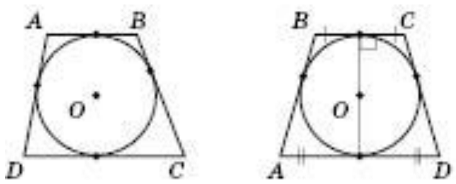


Рис. 9.32

Задачі для самостійного розв'язування

1. Перпендикуляр, проведений із вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 41 см і 57 см. Різниця сторін паралелограма дорівнює 14 см. Обчислити діагоналі паралелограма.

2. У паралелограмі бісектриса тупого кута, який дорівнює 120°, ділить протилежну сторону на відрізки 24 см і 16 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити відрізки, на які ділить бісектриса більшу діагональ паралелограма.

3. Сторони паралелограма дорівнюють 40 см і 60 см, а різниця діагоналей 8 см. Обчислити діагоналі паралелограма.

4. Діагоналі паралелограма дорівнюють 80 см і 20 см, а різниця його сторін дорівнює 48 см. Обчислити периметр паралелограма.

5. Сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 18 см, а діагоналі відносяться як 4:7. Обчислити діагоналі паралелограма.

6. У прямокутнику бісектриса прямого кута ділить сторону на відрізки 21 см і 7 см, починаючи від найближчої до цього кута вершини. Обчислити відрізки, на які ділить ця бісектриса діагональ прямокутника.

7. Точка *K* – середина сторони *AD* прямокутника *ABCD*. Знайти кут між *BK* і діагоналлю *AC*, якщо відомо, що $AD : AB = \sqrt{2}$.

8. Висота ромба ділить його сторону на відрізки *m* і *n*. Знайти діагоналі ромба.

9. Перпендикуляр, проведений із вершини паралелограма на діагональ, ділить діагональ на відрізки 6 см і 15 см. Знайти сторони і діагональ паралелограма, якщо відомо, що різниця сторін дорівнює 7 см.

10. Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, рівні відповідно *p* і *q*, кут між ними дорівнює α. Знайти більшу діагональ паралелограма.

11. Діагональ прямокутника ділить його кут у відношенні *m:n*. Знайти відношення периметра прямокутника до його діагоналі.

12. Сторони паралелограма рівні a і b ($a < b$). Менша діагональ утворює з меншою стороною тупий кут, а з більшою стороною кут α. Знайти більшу діагональ паралелограма.

13. Сторони паралелограма відносяться як $p:q$, а діагоналі – як $m:n$. Знайти кути паралелограма.

14. Довести, що

1) бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні;

2) бісектриси сусідніх кутів паралелограма взаємно перпендикулярні.

15. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються у точці O. Периметр трикутника ABD більший від периметра трикутника AOB на 12 см, а периметр прямокутника дорівнює 50,2 см. Знайти сторони прямокутника.

16. Довести, що бісектриси кутів паралелограма, перетинаючись, утворюють прямокутник, діагоналі якого дорівнюють різниці сусідніх сторін паралелограма.

17. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами тупих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 3:13 починаючи з вершин тупих кутів. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 48 см.

18. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 54 см і 96 см, починаючи від вершин тупих кутів. Обчислити периметр трапеції.

19. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на більшій її основі і ділять її на відрізки 13 см і 15 см. Обчислити периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

20. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 14 см і 30 см, а більша діагональ є бісектрисою прямого кута. Обчислити периметр трапеції.

21. Периметр трапеції дорівнює 144 см, а кути при більшій основі дорівнюють по 60°. Діагональ трапеції ділить середню лінію на відрізки, один з яких на 16 см більший від другого. Обчислити основи трапеції.

22. Діагональ рівнобічної трапеції ділить середню лінію у відношенні 5:9, а кути при меншій основі дорівнюють по 120°. Обчислити бічні сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 220 см.

23. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на більшій основі. Основи трапеції дорівнюють 28 см і 100 см. Обчислити відрізки, на які діляться діагоналі в точці їх перетину.

24. У рівнобедреній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 см і 21 см, починаючи з вершини тупого кута. Обчислити відрізки, на які ділиться висота точкою перетину діагоналей.

25. У рівнобедреній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута. Основи трапеції дорівнюють 100 см і 156 см. Обчислити відрізки висоти, проведеної з вершини тупого кута, на які ділить її ця діагональ.

26. У рівнобедреній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 см і 21 см, починаючи з вершини тупого кута. Обчислити периметр трапеції.

27. Довести, що бісектриси кутів трапеції, перетинаючись, утворюють чотирикутник, навколо якого можна описати коло.

28. Довести, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.

29. Довести, що середини сторін рівнобедреної трапеції є вершинами ромба.

30. Довільне коло, проведене через вершину кута, відсікає від його сторін відрізки m і n, а від бісектриси цього кута відрізок l. Довести, що відношення $(m+n):l$ не залежить від положення кола та його радіуса (застосування теореми Птоломея).

31. На гіпотенузі прямокутного трикутника ABC, сума катетів якого дорівнює m, поза трикутником побудовано квадрат $AEDB$. Визначити відстань від вершини C прямого кута трикутника до центра квадрата O.

32. Центр кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції; лежить на більшій основі. Відрізки, на які ділиться висота точкою перетину діагоналей, дорівнюють 37,5 см і 10,5 см, починаючи від більшої основи. Обчислити периметр трапеції.

33.Центр кола, описаного навколо рівнобедреної трапеції, лежить на більшій основі. Відрізки, на які висота трапеції, що проведена з вершини тупого кута, ділить її діагональ, дорівнюють 45 см і 35 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити периметр трапеції.

34.Чи існує чотирикутник, сторони якого дорівнюють 1 м, 3 м, 3 м і 6 м?

35.Скільки є різних чотирикутників, послідовні сторони яких дорівнюють 5 см, 6 см, 7 см, 8 см, а діагональ 12 см?

36.Скільки є різних чотирикутників, послідовні сторони яких дорівнюють 12дм, 13дм, 14 дм, 15дм, а один із кутів 60°?

37.Найменша різниця між довжинами сторін чотирикутника дорівнює m. Довести, що довжина його діагоналі більша за m.

38.Довести: коли діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то суми квадратів його протилежних сторін рівні. Чи правильне обернене твердження?

39.Сторони чотирикутника дорівнюють a, b, c, d. Довести, що $a^2 + b^2 + c^2 > d^2/3$.

40.Через точку перетину діагоналей опуклого чотирикутника, у якого дві протилежні сторони рівні, проведено прямі, паралельні цим сторонам. Доведіть, що сума відрізків цих прямих, обмежених двома іншими сторонами чотирикутника, дорівнює сумі рівних сторін.

41.З трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вирізали два трикутники BKL і LMC (див. рис. 9.33). Знайдіть суму площ трикутників ABK, KLM і MCD, які залишилися після вирізання, якщо відомо, що основа AD = 35 см, а висота трапеції дорівнює 7 см.

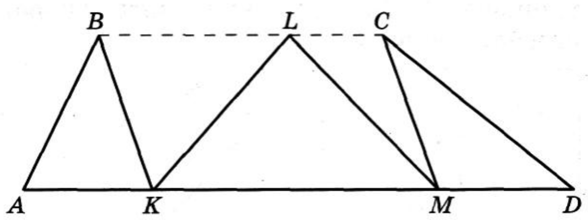


Рис.9.33

42.У правильний трикутник вписано коло, а в це коло – другий правильний трикутник, у другий правильний трикутник – друге коло і т. д. У скільки разів площа четвертого трикутника менша за площу початкового?

43.Сторони прямокутника *KPTO* дорівнюють 6 мм і 8 мм. З вершин *K* і *T* на діагональ *PO* опущено перпендикуляри *KM* і *TB*. Знайдіть довжину відрізка *MB*.

44.Трапеція з бічною стороною 16 см вписана в коло. Діагональ трапеції утворює з більшою основою кут, косинус якого дорівнює 0,6. Обчисліть радіус кола.

45.У паралелограмі *ABCD* бісектриса гострого кута *A*, який дорівнює 30°, ділить сторону *BC* на відрізки 5 см і 17 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчисліть площу паралелограма.

46.Довести, що бісектриси всіх чотирьох кутів прямокутника, перетинаючись утворюють квадрат.

47.Довести, що бісектриса кута паралелограма ділить навпіл кут між висотами, проведеними з однієї його вершини.

48.Точка *K* – середина сторони *AD* прямокутника *ABCD*. Знайти кут між *BK* і діагоналлю *AC*, якщо $AD{:}AB=\sqrt{2}$.

49.Знайти сторону і площу прямокутної трапеції, якщо центр вписаного кола віддалений від кінців її бічної сторони на відстань 3 см і 9 см.

50.Кожна з бічних сторін і менша основа трапеції рівні *a*, гострі кути рівні α. Знайти площу трапеції і радіус описаного кола.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рижик В.І. Геометрія. – Москва: Просвещение, 1991.
2. Атанасян Л.С., Бутузов С.Б. та ін. Геометрія. – К.: Освіта, 1993.
3. Бурда М.І., Савченко Л.Н. Геометрія. – К.: Освіта, 1998.
4. Ганжела Г.М., Кліндухова А.П. Методичні рекомендації для студентів фізико-математичного факультету (шкільний курс планіметрії). – Кіровоград, 2001. – 59 с.
5. Геометрія: підручник і збірник задач для 8 і 9 класів. – К.: Радянська школа, 1973. – 103 с.
6. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – 224с.
7. Довідник з елементарної математики для вступників до ВУЗів / Під ред. П.Ф. Кільчикова. – К.: Наукова думка, 1973. – 587 с.
8. Захарійченко Ю.О. Математика: Зб. тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання / Ю.О. Захарійченко, О.В. Школьний. – К.: Генеза, 2008. – 104 с.
9. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас / За ред. З.І. Слєпкань. – Харків: Гімназія, 2006.
10. Кисельов А.П. Геометрія. Планіметрія. – К.: Рад. школа, 1974.
11. Кисельов А.П. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1980.
12. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 223 с.
13. Кушнір І.А. Трикутник у задачах. – К.: Либідь, 1994. – 104 с.
14. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії. – К.: Абрис, 1994.– 464 с.
15. Минка Г. Застосування геометричної інтерпретації в алгебрі // Математика в школі. – № 1. – 1999.
16. Погорєлов О.В. Геометрія: підручник для 7-11 класів середньої школи. – К.: Освіта, 1993 р. – 346 с.
17. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. – М.: Просвещение, 1990.
18. Філіпповський Г. Полюбіть теорему Ван-Обеля // Математика в школі. – № 4. – 2004.

ЗМІСТ

ПРО ПРОЕКТ
«Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини»
2008-2010 р.р.

Метою проекту «Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини» є забезпечення системної математичної підготовки обдарованих та здібних учнів Кіровоградської області із використанням інноваційних технологій. Наукові керівники: Авраменко Ольга Валентинівна – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, статистики та економіки, Ріжняк Ренат Ярославович – кандидат педагогічних наук, професор, декан фізико-математичного факультету.

Проект відповідає національним пріоритетам України в галузі освіти.

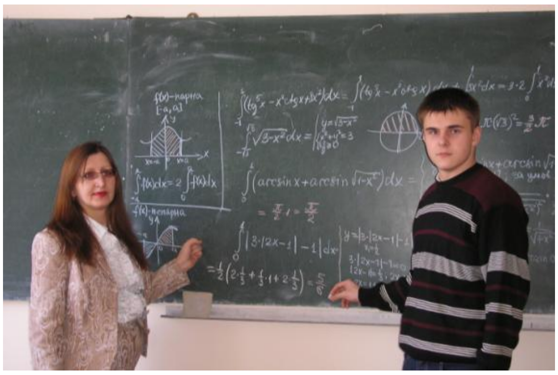
Доктор фізико-математичних наук, професор Авраменко О.В., керівник проекту

У 2008 році на базі фізико-математичного факультету КДПУ ім. Володимира Винниченка був створений обласний «Центр математичної підготовки» (ЦМП) учнів, який забезпечує навчання обдарованих школярів Кіровоградщини, підвищення кваліфікації вчителів математики, розробку інноваційних технологій дистанційного навчання учнів.

Створена фільмотека відеолекцій з вибраних питань математики, яка постійно поповнюється новими сюжетами (лекції Вороного О.М., Ізюмченко Л.В., Романова В.О., Лутченко Л.І.).

Директор Центру математичної підготовки Лутченко Л.І. з «малими академіками»

Протягом 2008-2010 років вчителі області обмінювалися досвідом з питань роботи з обдарованими дітьми на семінарах «Сучасні та інноваційні технології навчання теорії ймовірностей та математичної статистики», «Задачі з параметрами», «Задачі на побудову», «Дистанційне навчання математики обдарованих школярів Кіровоградщини», «Освітні вимірювання й інші актуальні проблеми математики та її викладання», «Наступність у навчанні математики» та на Всеукраїнській науково-практичній конференції до 80-річчя фізико-математичного факультету КДПУ ім. В.Винниченка (секції: дидактика математики, освітні вимірювання).



Доцент кафедри ПМСЕ Ізюмченко Л.В. готує Владислава Єршова до III етапу Всеукраїнського конкурсу захисту дослідницьких робіт МАН

Викладачі кафедри математики та ПМСЕ готували обдарованих учнів до різних рівнів Всеукраїнської олімпіади з математики (міський тур, обласний та Всеукраїнський), займалися з «малими академіками» Кіровоградського відділення Малої академії наук України.

Доцент кафедри математики Романов В.О. з переможцями обласної олімпіади з математики (під час підготовки до заключного етапу Всеукраїнської олімпіади)

У 2008-2010 рр. обдаровані та здібні учні навчалися у заочній фізико-математичній школі на базі КДПУ (для учнів 10-11 класів заняття й консультації проводили доценти Вдовенко В.В., Лутченко Л.І., Рєзіна О.В., Яременко Ю.В., викладачі Шевченко Н.Г., Вассалатій Ю.В.), в Зимовій школі ЦМП (учні 8-11 класів слухали лекції професорів Авраменко О.В., Кушніра В.А., Ріжняка Р.Я., Філєра З.Ю., доцентів Вороного О.М., Романова В.О., Ізюмченко Л.В., Лутченко Л.І.), брали участь у Математичних турнірах.

Професор Філєр З.Ю. доповідає на семінарі «Задачі з параметрами», 2008 р.

Робота секції «Дидактика математики» в рамках Всеукраїнської конференції, присвяченої 80-річчю фізико-математичного факультету, 2010 р. (в центрі доцент кафедри математики Вороний О.М.)

Учасники Проекту на семінарі «Наступність у навчанні математики», 2009 р.

Доцент кафедри математики Вдовенко В.В. веде заняття Заочної фізико-математичної школи

На сайтах Центру математичної підготовки учнів (www.kspu.kr.ua/intelect) та заочної фізико-математичної школи (www.kspu.kr.ua/zfms) розміщено електронні версії навчально-методичних посібників для вчителів та учнівської молоді, випущених в рамках проекту, навчальні матеріали Заочної фізико-математичної школи. Їх використання сприяє впровадженню інноваційних методів навчання математики та сучасних педагогічних технологій у школах області, підвищенню кваліфікації вчителів, формуванню інтересу до математики у школярів області.

✍ Для нотаток

Метричні співвідношення

в трикутнику та чотирикутнику

Навчально-методичний посібник

для роботи з обдарованими школярами

Гаєвський Микола Вікторович,

Кліндухова Алла Павлівна,

Лутченко Людмила Іванівна

Підписано до друку 07.12.2010. Формат 60х84$^{1}/_{16}$. Папір офсет.
Друк офсет. Ум.др.арк. 3,8. Тираж 500.