ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ І НАУКИ
ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ ПЕДАГОГІЧНИХ
ПРАЦІВНИКІВ ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ

Шляхи підвищення якості
природничо-математичної освіти

Р.Л.Барвінок,
О.М.Козлова

Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом

Черкаси
2013

АВТОРИ:

Барвінок Р.Л., учитель математики Черкаського фізико-математичного ліцею Черкаської міської ради, вища кваліфікаційна категорія, учитель-методист;

Козлова О.М., методист математики ЧОІПОПП

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Коломієць О.М., доцент Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького;

Ходоровська С.І., учитель математики Кам'янської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 1 Кам'янської районної ради.

Основна мета посібника – ознайомити учнів 8-9 класів з найбільш поширеними методами розв'язування олімпіадних задач з вибраних тем: «Основи теорії подільності», «Діофантові рівняння», «Доведення нерівностей», «Методи обчислення сум». У посібнику також представлено добірку усіх задач, що пропонувалися на районних (міських) олімпіадах з математики з 1998 по 2012 рік.

Даний матеріал призначений для використання на уроках, факультативах, гуртках, курсах за вибором.

Рекомендовано до друку вченою радою ЧОІПОПП.

Протокол № 1 від 05.03.2013 р.

Зміст

Передмова

«Що означає оволодіти математикою? – писав відомий педагог математик Д. Пойа. – Це насамперед навчитися розв’язувати задачі, причому не тільки стандартні, але й такі, що потребують певної належності мислення, здорового глузду, оригінальності, винахідливості».

У пропонованому посібнику подаються задачі, переважно творчого характеру, які допоможуть підготувати учнів 8-9 класів, які цікавляться математикою, до шкільних, районних(міських) та обласних олімпіад. Посібник містить на п’ять розділів: основи теорії подільності; діофантові рівняння; доведення нерівностей; методи обчислення сум та умови усіх завдань II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики у Черкаській області за період з 1998 по 2012 рік.

Серед різноманітних типів олімпіадних задач практично в кожній олімпіаді є задачі з даних тем. Тому кожний вчитель математики і учень, який готується до олімпіади, мають бути ознайомлені з типами задач, що пропонуються в посібнику.

Виклад теоретичного матеріалу чотирьох запропонованих тем завершується прикладами розв’язування задач з цієї теми, а також вміщено багато задач для самостійного розв’язання. В посібнику подано умови завдань районних (міських) математичних олімпіад для того, щоб учні і вчителі, по-перше, мали ці завдання, а також бачили ступінь їх складності, щоб допомогти учням успішно підготуватися до нових змагань.

Ефективність математичних задач значною мірою залежить від творчої активності учнів у процесі їх розв’язування. Саме тому задачі в запропонованому посібнику дібрано так, щоб створити проблемну ситуацію, збудити творчу думку учнів, змусити її працювати, розвиватися, удосконалюватися.

Посібник покликаний допомогти вчителю в організації позаурочної роботи з учнями, які бажають досконало, поглиблено і всебічно вивчити шкільну математику, розширити їх математичний світогляд, підготуватись до участі у математичних олімпіадах та інших математичних змаганнях. Він буде корисний учням, які захоплюються математикою.

ТЕМА 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ

В процесі проведення позакласної роботи з математики учнів необхідно ознайомити з основними методами розв'язування олімпіадних задач. Велике місце серед них займають задачі на подільність. Практично в кожній олімпіаді є задачі цього типу.

Взагалі, в олімпіадних задачах, задачі, пов'язані з цілими числами займають чи не найпершу позицію. Задачі на цілі числа надзвичайно різноманітні. Розглянемо основні типи задач на подільність та методи їх розв'язування.

Теоретичний і практичний матеріал, необхідний для розв'язування завдань на подільність

Означення. *Ціле число а ділиться на ціле число в* $(в \neq 0)$, *якщо існує таке ціле с, що а=вс.*

Означення. *Натуральне число* p *називається* ***простим****, якщо в нього тільки два натуральних дільники – 1 і саме число* p. *Прості числа - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, … Загальний вираз простих чисел, більших за 3, є* $6n \pm 1$, *де* $n \in N$.

Означення. Натуральне число називається складеним, якщо воно має більше двох натуральних дільників.

Означення. *Найбільшим спільним дільником НСД двох або декількох натуральних чисел називається найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних чисел.*

Означення. *Найменшим спільним кратним НСК двох або декількох натуральних чисел називається найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел.*

Означення. ***Взаємно прості числа*** *— натуральні або цілі числа, які не мають спільних дільників більших за 1, або, інакше кажучи, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює 1. Таким чином, 2 і 3 — взаємно прості, а 2 і 4 — ні (діляться на 2). Будь-яке натуральне число взаємно просте з 1. Якщо p — просте, а n — довільне ціле число, то вони взаємно прості тоді і тільки тоді, коли n не ділиться на p.*

Ознаки подільності

1. *Якщо остання цифра числа ділиться на 2 (парна), то число ділиться на 2.*
2. *Якщо остання цифра числа 0 або 5, то число ділиться на 5.*
3. *Якщо число закінчується на к нулів, то воно ділиться на* $10^к$.
4. *Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 4 то і число а ділиться на 4.*
5. *Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 8 то і число а ділиться на 8.*
6. *Якщо сума цифр числа а ділиться на 3, то число а ділиться на 3.*
7. *Якщо сума цифр числа а ділиться на 9, то число а ділиться на 9.*
8. *Якщо різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях числа а (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11, то число а ділиться на 11.*
9. *Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 25 то і число а ділиться на 25.*

10. Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 125 то і число а ділиться на 125.

11. Щоб дізнатися, чи ділиться число а на 7, 11, 13 треба розбити його справа наліво на трицифрові грані, знайти суму Р граней, що стоять на парних місцях, і суму А граней, що стоять на непарних місцях, і якщо (Р-А) ділиться на 7, 11, 13, то і число а ділиться на 7, 11 13.

Властивості подільності цілих чисел

1. *Якщо* $a \vdots в$ *і к – будь яке число, то* $ка \vdots в$.

2. *Якщо* $a \vdots в$ *і* $в \vdots с$*, то* $a \vdots с$.

3. *Якщо* $a \vdots к$ *і* $в \vdots р$*, то* $ав \vdots кр$.

4. *Якщо* $a \vdots к$ *і* $в \vdots к$*, то* $(a \pm в) \vdots к$.

5. *Якщо* $a \vdots к$*,* $в \vdots к$ *і с та р – будь-які числа, то* $(ac \pm вр) \vdots к$.

6. *Якщо* $a \vdots к$ *і* $a \vdots р$*, причому* ***к і р – взаємно прості****, то* $a \vdots кр$.

Властивості простих дільників натуральних чисел

1. Будь-яке натуральне число (більше за одиницю) або ділиться на дане просте число р, або є взаємно простим з ним.

2. Якщо добуток кількох співмножників ділиться на просте число р, то принаймні один із співмножників ділиться на р.

3. Найменший простий дільник складеного числа а не перевищує $\sqrt{a}$.

Приклад 1. Найменший простий дільник числа 143 дорівнює 11, причому $11 < \sqrt{143} \approx 11{,}96$.

Наслідок. *Якщо задане число* q *не ділиться на жодне з простих чисел 2, 3, 5,…,* p*, де* $p \le \sqrt{q}$ *, то це число* q *- просте.*

Приклад. Нехай $q = 113$, тоді $\sqrt{113} \approx 10$. Усі прості числа $p \le \sqrt{113}$ - це 2, 3, 5, 7. Оскільки 113 не ділиться на жодне з цих простих чисел, то воно саме є простим.

Потрібно запам'ятати

1. *З k послідовних чисел* $m+1$*,* $m+2$*,…,* $m+k$ *одне і тільки одне ділиться на* k.
2. *Добуток* $(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+k) \vdots k!$.
3. *Загальний вираз простих чисел, більших за 3, є* $6n \pm 1$.
4. *Остача при діленні квадрата натурального числа на 3 дорівнює 0 або 1.*
5. *Остача при діленні квадрата натурального числа на 4 дорівнює 0 або 1.*
6. *Остача при діленні квадрата непарного натурального числа на 8 дорівнює 1.*
7. *Остача при діленні куба натурального числа на 9 дорівнює 0, 1 та 8.*
8. *Остача при діленні* n^4 *на 5, де* $n \in Z$ *дорівнює 0 або 1.*
9. *Якщо квадрат цілого числа ділиться на просте число* p*, то ділиться і на* p^2.

10. Якщо, n - просте і $n > 3$, то $\left(n^2 - 1\right) \vdots 24$.

Приклад 2. Доведіть, що значення виразу $10^{2013} + 8$ ділиться націло на 9.

Розв'язання. Запис значення виразу 10^{2013} складається з цифри 1 і дві тисячі тринадцяти цифр 0, а запис значення виразу $10^{2013} + 8$ - з цифри 1, цифри 8 і дві тисячі дванадцяти цифр 0. За ознакою подільності на 9, початкове число націло ділиться на 9.

Приклад 3. Довести, що $2^{2011} + 3^{2011}$ ділиться на 5.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Використаємо наслідок з теореми Безу, що $в^{2n-1} + a^{2n-1}$ ділиться без остачі на в+а. Отже, вираз $2^{2011} + 3^{2011}$ ділиться без остачі на 2+3=5.

2 спосіб. Використаємо формулу

$a^n + b^n = (a + в)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$, де n – непарне натуральне число. Маємо: $2^{2011} + 3^{2011} = (2+3)\left(2^{2010} - 2^{2009} \cdot 3 + 2^{2008} \cdot 3^2 - ... - 2 \cdot 3^{2009} + 3^{2010}\right) = 5A$, де A – числове значення другого множника. Отже, вираз $2^{2011} + 3^{2011}$ ділиться без остачі на 5.

3 спосіб. Легко дослідити, що останні цифри виразу 2^n повторюються і будуть 2, 4, 8, 6, отже $2^{2011} = 2^{4n+3}$ закінчується цифрою 8. Останні цифри виразу 3^n повторюються і будуть 3, 9, 7, 1, отже $3^{2011} = 3^{4n+3}$ закінчується цифрою 7. Отже, вираз $2^{2011} + 3^{2011}$ закінчується цифрою 5. За ознакою подільності на 5, початковий вираз націло ділиться на 5.

Приклад 4. Відомо, що $(16a + 17в)(17a + 16в) \vdots 11$ при деяких цілих а і в. Довести, що даний добуток націло ділиться на 121.

Розв'язання. Так як даний добуток ділиться на просте число 11, то один із множників націло ділиться на 11. Розглянемо суму двох виразів $(16a + 17в) + (17a + 16в) = 33a + 33в = 33(a + в)$, яка націло ділиться на 11. Якщо сума ділиться на 11 і один з доданків ділиться на 11, то і другий доданок ділиться на 11. Отже, вираз $(16a + 17в)(17a + 16в) \vdots 121$.

Приклад 5. Відомо, що $(3x + 7y) \vdots 19$ при умові, що $x, y \in Z$. Довести, що $(43x + 75y) \vdots 19$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення $43x + 75y = 8(3x + 7y) + 19x + 19y$. Вираз $8(3x + 7y) \vdots 19$ з умови, $19x$ і $19y$ кратне 19, отже і $(43x + 75y) \vdots 19$.

Приклад 6. Довести, що вираз $3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100}$ ділиться націло на 120.

Розв'язання. $3^1 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{100} = \left(3^1 + 3^2\right) + \left(3^3 + 3^4\right) + ... + \left(3^{97} + 3^{98}\right) + \left(3^{99} + 3^{100}\right) =$

$$= 3(1+3) + 3^3(1+3) + ... + 3^{97}(1+3) + 3^{99}(1+3) = 4\left(3 + 3^3 + 3^5 + ... + 3^{97} + 3^{99}\right) =$$

$$= 4\left(3\left(1+3^2\right) + 3^5\left(1+3^2\right) + ... + 3^{93}\left(1+3^2\right) + 3^{97}(1+3^2)\right) =$$

$$= 4 \cdot 10 \cdot \left(3 + 3^5 + ... + 3^{93} + 3^{97}\right) = 120 \cdot \left(1 + 3^4 + ... + 3^{92} + 3^{96}\right).$$

Отже, початковий вираз націло ділиться на 120.

Приклад 7. Знайдіть усі такі p, щоб числа p, $p + 10$ та $p + 14$ були простими.

Розв'язання. Щоб числа були простими, то p не ділиться на 3. Якщо $p = 3n + 1$, то $p + 14$ ділиться на 3, якщо $p = 3n + 2$, то $p + 10$ ділиться на 3. Тому єдине значення, що задовольняє умову задачі – це $p = 3$.

Приклад 8. Чи існують чотири послідовних натуральних числа, кожне з яких можна подати у вигляді суми двох квадратів.

Розв’язання. Розглянемо остачі при діленні на 4. Квадрат натурального числа може давати остачу 0 або 1. Сума квадратів – 0, 1, 2. Серед чотирьох послідовних натуральних чисел знайдеться таке, що має остачу 3. Воно у суму двох квадратів не розкладається. Значить таких чисел не існує.

Приклад 9. Шестидесятизначне число записане за допомогою 30 нулів і 30 одиниць. Чи можна це число представити у вигляді квадрата натурального числа.

Розв’язання. За ознаками подільності дане число ділиться на 3, але не ділиться на $9 = 3^2$. Ми знаємо, що якщо квадрат цілого числа ділиться на p, то ділиться і на p^2. Тому наше число не можна представити у вигляді квадрата натурального числа.

Приклад 10. p - просте число більше 3. Відомо, що при деякому n p^n має 20 цифр. Довести, що серед них є хоча б три однакових.

Розв’язання. Припустимо, що серед 20 цифр числа p^n не має однакових, тоді p^n складається із цифр 0,0,1,1,2,2,…,9,9. Сума цих цифр дорівнює 90, а значить p^n кратне 3 – просте число, тому і p кратне 3. Отримали протиріччя, бо за умовою задачі p - просте число і більше 3.

Завдання для самостійного розв’язання

1. Доведіть, що сума двох послідовних натуральних чисел не ділиться на 2.
2. Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.
3. Доведіть, що сума будь-яких п’яти послідовних цілих чисел ділиться на 5.
4. Доведіть, що сума чотирьох послідовних парних чисел не ділиться на 8.
5. Якою цифрою закінчується число: $24^{23} + 3^{23} + 10^{23}$, 2^{4n+1}, 3^{4n+1}, 4^{2n+1}.
6. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних степенів числа 3 кратна 120.
7. Скільки серед перших десяти тисяч чисел таких, які закінчуються одиницею і можуть бути подані у вигляді $8^n + 5^n$.
8. Доведіть, що число $3^{2012} + 104$ ділиться на 5.
9. Доведіть, що число $2007^{2012} + 99$ ділиться на 10.
10. Доведіть, що число $1024^{1024} - 1$ ділиться на 5.
11. Доведіть, що число $2009^4 - 2009^3$ ділиться на 2008.
12. Чи ділиться сума натуральних чисел від 1 до 1000 на 143.
13. Що більше: 9^{60} чи 80^{30}; 45^4 чи 4^{12}; 3^{303} чи 2^{454}; 48^{25} чи 344^{17}.
14. Доведіть, що сума $2 + 2^3 + 2^5 + ... + 2^{97} + 2^{99}$ ділиться на 5.
15. Доведіть, що сума $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{51} + 2^{52}$ ділиться на 30.
16. Якою цифрою закінчується число $2007 + 2007^2 + 2007^3 + ... + 2007^{100}$.
17. Обчисліть $2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010} - ... - 2^2 - 2 - 1$.

18. Відомо, що натуральні числа m і n такі, що значення виразу $10m+n$ ділиться націло на 11. Доведіть, що значення виразу $(10m+n)(10n+m)$ ділиться націло на 121.

19. Відомо, що $(2x+3y)\vdots 17$, якщо $x, y \in Z$. Доведіть, що $(9x+5y)\vdots 17$.

20. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення кожного з виразів n-2, n+24, n+26 є простим числом.

21. Цілі числа x і y такі, що $(6x+11y)\vdots 31$. Доведіть, що $(x+7y)\vdots 31$.

22. Числа x і y такі, що $(3x+10y)\vdots 13$. Доведіть, що $(3x+10y)(3y+10x)\vdots 169$.

Перестановки цифр у числах

Приклад 11. У тризначному числі закреслили останню цифру нуль, і воно зменшилось на 405. Яке число отримали?

Розв'язання. Нехай $\overline{ав0}$ дане тризначне число, тоді $\overline{ав}$ двозначне число, що утворилось при закресленні нуля. За умовою задачі отримуємо рівняння:

$$\overline{ав0} = \overline{ав} + 405,$$
$$100а + 10в = 10а + в + 405,$$
$$90а + 9в = 405,$$
$$9(10а + в) = 405,$$
$$9 \cdot \overline{ав} = 405,$$
$$\overline{ав} = 45.$$

Відповідь:45.

Приклад 12. Цифра десятків двозначного числа втричі більше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде меншим від даного на 54. Знайдіть дане число?

Розв'язання. Нехай $\overline{ав}$ дане двозначне число. За умовою а=3в.

Складаємо рівняння $\overline{ав} = \overline{ва} + 54,$

$$10а + в = 10в + а + 54,$$
$$9а - 9в = 54,$$

Підставимо в останню рівність, що $а = 3в,$ маємо:

$$27в - 9в = 54,$$
$$18в = 54,$$
$$в = 3,$$

тоді а=9 і шукане число 93.

Відповідь: 93.

Приклад 13. У шестицифровому числі перша цифра збігається з четвертою, друга - з п'ятою, третя – з шостою. Доведіть, що це число ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Нехай $\overline{авсавс}$ - шукане шестицифрове число. Виконаємо перетворення

$$\overline{авсавс} = 100000а + 10000в + 1000с + 100а + 10в + с =$$
$$= 100100а + 10010в + 1001с = 1001(100а + 10в + с) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{авс}.$$

Отже, шестицифрове число ділиться на 7, 11, 13.

2 спосіб. Нехай $\overline{авсавс}$ - шукане шестицифрове число. Застосуємо ознаку подільності на 7, 11, 13. Розбиваємо число справа наліво на трицифрові грані, знаходимо суму Р граней, що стоять на парних місцях – це $\overline{авс}$, і суму А граней, що стоять на непарних місцях – це $\overline{авс}$, тоді $P - A = \overline{авс} - \overline{авс} = 0$ ділиться на 7, 11, 13, то і число $\overline{авсавс}$ ділиться на 7, 11 13.

Приклад 14. Чи може різниця двох трьохзначних чисел, із яких друге записане тими ж цифрами, що й перше, але в оберненому порядку бути квадратом натурального числа.

Розв'язання. За умовою задачі $\overline{авс} - \overline{сва} = x^2$, де $a, c, x \in N$, $b \in Z$ і $0 < a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 < c \le 9$.

Маємо $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = x^2$, $99a - 99c = x^2$, $9 \cdot 11 \cdot (a - c) = x^2$, значить $x^2 \vdots 11$, але x^2 не кратне 121, бо $a - c < a < 11$. Отже, різниця двох трьохзначних чисел, із яких друге записане тими ж цифрами, що й перше, але в оберненому порядку не може бути квадратом натурального числа.

Приклад 15. Скільки послідовних натуральних чисел, починаючи з 1 потрібно додати, щоб отримати трьохзначне число, записане однаковими цифрами.

Розв'язання. За умовою задачі складаємо рівність $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaa}$, де $0 < a \le 9$. Тоді $\frac{n(n+1)}{2} = 111a$, $n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$. Так як 3 і 37 прості числа, то n або $n+1$ кратне 3 або 37. Якщо n кратне 37, то $n + 1 = 38$, а тоді $n(n+1)$ не кратне 3, тому такий варіант не підходить. Якщо $n+1$ кратне 37, $n = 36$. Маємо $36 \cdot 37 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$, $a = 6$. Отже послідовних чисел потрібно взяти 36.

Приклад 16. Знайдіть двоцифрове число, квадрат якого записаний цифрами 0, 2, 3, 5.

Розв'язання. Нехай х шукане двозначне число. Квадрат числа х не може закінчуватися на 2 або 3, тому остання цифра 0 або 5. Значить $x^2 \vdots 5$, тоді і $x^2 \vdots 25$. За ознакою подільності на 25 дві останні цифри числа x^2 будуть 25 або 50. Але 50 не може бути, бо тоді $x^2 \vdots 10$, а значить і $x^2 \vdots 100$ і тоді останні дві цифри числа x^2 будуть 00, а це суперечить умові задачі. Отже, цифри числа x^2 можуть бути записані тільки як 3025, шукане число тоді 55.

Приклад 17. Знайдіть трицифрові числа сума яких з числом записаним тими ж цифрами, але в оберненому порядку кратна 68.

Розв'язання. Припустимо, що $\overline{авс}$ - шукане число.

Розглянемо $\overline{авс} + \overline{сва} = 100а + 10в + с + 100с + 10в + а = 101(а + с) + 20в$, вираз $101(а + с) + 20в$ кратний $68 = 17 \cdot 4$. Так, як $20в \vdots 4$, а 101 не кратне 4, то $(а + с) \vdots 4$. Виділимо вираз, який ділиться на 17. $101(а + с) + 20в = 102(а + с) + 17в + 3в - а - с \equiv 3в - а - с(\mathrm{mod}17)$, тобто $(3в - с - а) \vdots 17$. Так, як а, в, с - цифри, то $0 \le 3в \le 27$, $0 < а \le 9$, $0 < с \le 9$, а значить $-18 \le 3в - а - с \le 27$, $0 < а + с \le 18$. Переберемо всі можливі значення.

1) Якщо $3в - а - с = 3в - (а + с) = 17$, то можливі наступні випадки:

а) $а + с = 4$, тоді $3в - 4 = 17$, $3в = 21$, $в = 7$. Отже, одержуємо такі числа 272, 371, 173.

б) $a+c=8$, тоді $3в-8=17$, $3в=25$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

в) $a+c=12$, тоді $3в-12=17$, $3в=29$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

г) $a+c=16$, тоді $3в-16=17$, $3в=33$, в=11, але $0 \le в \le 9$. Отже, такий варіант не дає шуканого результату.

2) Якщо $3в-a-c=3в-(a+c)=0$, то можливі наступні випадки:

а) $a+c=4$, тоді $3в-4=0$, $3в=4$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

б) $a+c=8$, тоді $3в-8=0$, $3в=8$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

в) $a+c=12$, тоді $3в-12=0$, $в=4$. Отже, одержуємо такі числа 349, 943, 448, 844, 547, 745, 646.

г) $a+c=16$, тоді $3в-16=0$, $3в=16$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

3) Якщо $3в-a-c=3в-(a+c)=-17$, то можливі наступні випадки:

а) $a+c=4$, тоді $3в-4=-17$, $3в=-13$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

б) $a+c=8$, тоді $3в-8=-17$, $3в=-9$, в=-3, але $0 \le в \le 9$. Отже, такий варіант не дає шуканого результату.

в) $a+c=12$, тоді $3в-12=-17$, $3в=-5$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

г) $a+c=16$, тоді $3в-16=-17$, $3в=-1$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв'язків.

Відповідь: 272, 371, 173, 349, 943, 448, 844, 547, 745, 646.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що сума чисел $\overline{ав}$ і $\overline{ва}$ кратна 11.

2. Доведіть, що сума чисел $\overline{авс}$, $\overline{вса}$, $\overline{сав}$ кратна 111.

3. Доведіть, що різниця чисел $\overline{авс}$, $\overline{сва}$ кратна 99.

4. Якщо до двозначного числа дописати праворуч нуль, то воно збільшиться на 207. Знайдіть дане число.

5. У трицифровому числі закреслили останню цифру нуль, і воно зменшилося на 405. Яке число отримали.

6. Сума двох чисел дорівнює 353. Одне з чисел закінчується 1. Якщо цю цифру закреслити то отримаємо друге число. Знайдіть ці числа?

7. Цифра десятків двозначного числа втричі більше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде меншим від даного на 54. Знайдіть дане число.

8. Цифра десятків двозначного числа вдвічі менше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде більшим від даного на 27. Знайдіть дане число.

9. Сума двох цифр а і в ділиться на 7. Доведіть, що $\overline{ава}$ ділиться на 7.

10. До деякого двоцифрового числа ліворуч і праворуч дописали цифру 1. У результаті отримали число, яке в 21 раз більше за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.

11. Цифру 9, із якої починається трицифрове число, написали в кінці числа. Нове число на 216 менше, ніж початкове. Яке було початкове число.

12. Перша цифра шестизначного числа 1. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то число збільшиться в 3 рази. Знайти початкове число.

13. Учень задумав два двозначних числа, які починаються цифрою 6. Якщо переставити в кожному числі цифри місцями, то значення добутків цих чисел будуть рівними. Які числа задумав учень.

14. Учень задумав двозначне число, відняв від нього двозначне число записане цифрами в оберненому порядку і отримав квадрат парного числа. Учень порахував, що різниця ділиться на 36. Знайти всі можливі числа, які відповідають умові задачі.

15. Знайти двозначне число, подвоєна сума цифр якого дорівнює їх добутку.

Ділення з остачею. Метод остач

До цього типу задач будемо відносити ті, в яких ділене є многочленом від цілої або натуральної змінної. При застосуванні методу остач поліном краще розкласти на множники.

Теорема. *Для будь-якого цілого числа a і натурального числа* n *існує єдина пара цілих чисел q і r таких, що* $a = nq + r$, *де* $0 \le r < n$. *Таким чином, остача може набирати значень* $0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1$, *всього* n *випадків. Метод остач полягає у розгляданні кожного випадку окремо. При цьому для цілих змінних будуть відповідно представлення* $x = nk$, $x = nk + 1, \ldots,$ $x = nk + (n-1)$. *Розглядання окремо цих випадків часто дає можливість просто розв'язати задачу.*

Теорема. *Якщо а при діленні на* n *має остачу* r_1, *а в – остачу* r_2, *то число а+в при діленні на* n *дає таку саму остачу, як і число* $r_1 + r_2$, *число а-в при діленні на* n *дає таку саму остачу, як і число* $r_1 - r_2$, *ав – таку саму, як* $r_1 r_2$.

Наслідок. *Якщо а при діленні на* n *дає остачу* r, *то* a^m, $m \in N$ *дає при діленні на* n *таку саму остачу, як і число* r^m.

Приклад 18. Запишіть загальну формулу числа, яке при діленні на 6 і 8 дає в остачі 5.

Розв'язання. Нехай є число n. З умови задачі $n = 6m + 5$, $n = 8p + 5$, тоді $n - 5 = 6m$ і $n - 5 = 8p$ - означає, що вираз $n - 5$ ділиться націло на 6 і 8, а значить на 24. Отже, $n = 24c + 5$, де $c \in N$.

Приклад 19. В шафі стоять книги. Якщо їх взяти по 4, по 5 або по 6, то кожного разу залишиться одна книга, а якщо взяти по 7 книг, то зайвих книг не залишиться. Яка кількість книг в шафі, якщо їх не більше 400.

Розв'язання. Нехай в шафі стоїть х книг. З умови задачі робимо висновок, що $x - 1$ кратне 4, 5, 6, а x кратне 7 при умові, що $0 < x \le 400$. Тоді $x - 1 = 60n$, $n \in Z$ і $x = 60n + 1$ кратне 7, де $0 < x \le 400$. Перебираючи значення $n = 0,1,2,3,4,5,6$, знаходимо, що $n = 5$. Шукане число книг 301.

Приклад 20. Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, при діленні на 3 – 2, на 4 – 3, на 5 – 4, на 6 – 5, на 7 – 6, на 8 – 7, на 9 – 8, на 10 – 9.

Розв'язання. Нехай х шукане число. З умови задачі:

1) $x = 2n_1 + 1$, $x + 1 = 2n_1 + 2$, отже $(x+1)\vdots 2$; 2) $x = 3n_2 + 2$, $x + 1 = 3n_2 + 3$, отже $(x+1)\vdots 3$;

3) $x = 4n_3 + 3$, $x + 1 = 4n_3 + 4$, отже $(x+1)\vdots 4$; 4) $x = 5n_4 + 4$, $x + 1 = 5n_4 + 5$, отже $(x+1)\vdots 5$;

5) $x = 6n_5 + 5$, $x + 1 = 6n_5 + 6$, отже $(x+1)\vdots 6$; 6) $x = 7n_6 + 6$, $x + 1 = 7n_6 + 7$, отже $(x+1)\vdots 7$;

7) $x = 8n_7 + 7$, $x + 1 = 8n_7 + 8$, отже $(x+1)\vdots 8$; 8) $x = 9n_8 + 8$, $x + 1 = 9n_8 + 9$, отже $(x+1)\vdots 9$;

9) $x = 10n_9 + 9$, $x + 1 = 10n_9 + 10$, отже $(x+1)\vdots 10$. Таким чином, $x+1$ кратне числам 2,3,4,5,6,7,8,9,10, отже $x + 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$, а $x = 2519$.

Приклад 21. Доведіть, що при діленні простого числа на 30 в остачі отримаємо просте число або 1.

Розв'язання. Нехай х – просте число, де $x = 30n + r$ і $0 \le r < 30$. Всі складені числа до 30 мають в якості найменшого натурального дільника одне з чисел 2; 3; 5. Тому якщо, r складене, то х ділиться на одне з чисел 2; 3; 5, будучи більше, чим це число. Отримали протиріччя, що х – просте число.

Приклад 22. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні *n* вираз $\left(n^3 + 2n\right)\vdots 3$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Використаємо метод остач. Винесемо спільний множник за дужки $n^3 + 2n = n\left(n^2 + 2\right)$. Розглянемо три випадки:

1) Нехай число *n* кратне 3, тоді зрозуміло, що вираз $n\left(n^2 + 2\right)\vdots 3$.

2) Нехай число *n* при діленні на 3 дає в остачі 1, тобто $n = 3m + 1$, де $m \in N$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= n\left(n^2 + 2\right) = (3m+1)\left((3m+1)^2 + 2\right) = \\ &= (3m+1)\left(9m^2 + 6m + 3\right) = 3(3m+1)\left(3m^2 + 2m + 1\right), \end{aligned}$$

останній вираз націло ділиться на 3.

3) Нехай число *n* при діленні на 3 дає в остачі 2, тобто $n = 3m + 2$, де $m \in N$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= n\left(n^2 + 2\right) = (3m+2)\left((3m+2)^2 + 2\right) = \\ &= (3m+2)\left(9m^2 + 12m + 6\right) = 3(3m+2)\left(3m^2 + 4m + 2\right), \end{aligned}$$

останній вираз націло ділиться на 3.

Розглянувши всі випадки робимо висновок, що вираз $\left(n^3 + 2n\right)\vdots 3$.

2 спосіб. Виконаємо деякі перетворення

$n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n\left(n^2 - 1\right) + 3n = n(n-1)(n+1) + 3n$. Вираз $n(n-1)(n+1)$ - це добуток трьох послідовних натуральних чисел, одне з яких кратне 3, а вираз *3n* – кратний 3, тоді і їхня сума націло ділиться на 3. Отже, вираз $\left(n^3 + 2n\right)\vdots 3$.

Приклад 23. Довести, що для $n \in N$ вираз $n^3 - 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 6.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Розкладемо вираз на множники:

$$n^3-3n^2+2n=n\left(n^2-3n+2\right)=n\left(n^2-2n-n+2\right)=$$
$$=n\left(n(n-2)-(n-2)\right)=(n-2)(n-1)n.$$

Ми отримали добуток трьох послідовних натуральних чисел, який кратний 6.

2 спосіб. Застосуємо метод остач. Так, як $6=2\cdot 3$ і $НСД(2;3)=1$, то окремо будемо доводити подільність на 2 і 3. Позначимо $B=n^3-3n^2+2n=n\left(n^2-3n+2\right)=(n-2)(n-1)n.$

1) Для того, щоб вираз ділився на 2 розглядаємо два випадки.

а) Якщо $n=2m$, де $m\in Z$, то $B=(2m-2)(2m-1)2m$ і він кратний 2, бо один із множників 2.

б) Якщо $n=2m+1$, де $m\in Z$, то $B=(2m+1-2)(2m+1-1)(2m+1)=(2m-1)2m(2m+1)$ і він кратний 2, бо один із множників 2.

2) Для того, щоб вираз ділився на 3 розглядаємо три випадки.

а) Якщо $n=3m$, де $m\in Z$, то $B=(3m-2)(3m-1)3m$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

б) Якщо $n=3m+1$, де $m\in Z$, то $B=(3m+1-2)(3m+1-1)(3m+1)=(3m-1)3m(3m+1)$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

в) Якщо $n=3m+2$, де $m\in Z$, то $B=(3m+2-2)(3m+2-1)(3m+2)=3m(3m+1)(3m+2)$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

Так, як вираз n^3-3n^2+2n ділиться націло на 2 і 3, то він ділиться і на 6.

3 спосіб. Застосуємо властивості конгруенції.

1) Доведемо, що вираз $B=n^3-3n^2+2n$ ділиться на 2, для цього розглянемо два випадки.

а) Якщо $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, то $B\equiv 0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, тобто $B\,\vdots\,2$.

б) Якщо $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, то $B\equiv 1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, тобто $B\,\vdots\,2$.

1) Доведемо, що вираз $B=n^3-3n^2+2n$ ділиться на 3, для цього розглянемо три випадки.

а) Якщо $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, то $B\equiv 0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, тобто $B\,\vdots\,3$.

б) Якщо $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, то $B\equiv 1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, тобто $B\,\vdots\,3$.

в) Якщо $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, то $B\equiv 2^3-3\cdot 2^2+2\cdot 2\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, тобто $B\,\vdots\,3$.

Так, як вираз n^3-3n^2+2n ділиться націло на 2 і 3, то він ділиться і на 6.

Приклад 24. ***(ключова задача).*** Якщо p - просте число і $p>3$, то $\left(p^2-1\right)\vdots\,24$.

Розв'язання. Розглянемо чотири послідовних числа $p-1$, p, $p+1$, $p+2$. Серед них два парні, хоча б одне кратне 3 і 4. Так, як p - просте число і $p>3$, а $p+2$ - непарне, то $p-1$ і $p+1$ два послідовних парних числа одне з яких ділиться на 2 інше на 4, а значить $\left(p^2-1\right)\vdots\,8$. Зрозуміло, що одне з чисел $p-1$ або $p+1$ кратне 3. Отже, $\left(p^2-1\right)\vdots\,24$.

Приклад 25. Якщо p і q - різні прості числа, які більші 3, то $\left(p^2-q^2\right)\vdots 24$.

Розв'язання. Вираз $p^2-q^2=\left(p^2-1\right)-\left(q^2-1\right)$, а далі розв'язується, як попередня задача.

Приклад 26. Доведіть, що серед будь-яких 2012 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 2011.

Розв'язання. При діленні на 2011 можливі 2011 різних остач – 0, 1, 2,…, 2010. А ми маємо 2012 чисел серед яких хоча б у двох остачі будуть рівними, тому їх різниця ділиться на 2011.

Приклад 27. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожен. Таку операцію розрізування повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 2011 кусків?

Розв'язання. Розрізання одного аркуша паперу на 5 частин збільшує кількість кусків на 4. Нехай розрізань було n, тоді після n розрізань буде $4n+5$, де $n\in N$. Припустимо, що $4n+5=2011$, тоді $4n=2006$. Так, як 2006 не ділиться націло на 4, то 2011 кусків отримати не можна.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Остача при діленні натурального числа m на 6 дорівнює 5, а остача при діленні натурального числа n на 4 дорівнює 2. Доведіть, що значення виразу $2m+3n$ ділиться націло на 4 і не ділиться націло на 12.

2. Остача при діленні натурального числа m на 3 дорівнює 1, а остача при діленні натурального числа n на 9 дорівнює 7. Доведіть, що значення виразу $4m+2n$ ділиться націло на 3.

3. Запишіть загальну формулу числа, яке при діленні на 4 і 3 дають в остачі 1.

4. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз n^5-5n^3+4n кратний 120.

5. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз:

1) n^2+3n кратний 2; 2) n^3+5n кратний 3;

3) n^3+11n кратний 6; 4) n^3+3n^2+2n кратний 6.

6. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз n^9-n^5 кратний 30.

7. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $n^4-2n^3+11n^2-10n$ кратний 24.

8. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз $2n^6-n^4-n^2$ кратний 6.

9. Доведіть, що серед будь-яких 6 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 5.

10. Доведіть, що серед будь-яких 12 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 11.

11. Доведіть, що серед будь-яких 101 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 100.

12. Було 4 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 4 кусків кожен. Таку операцію розрізування
повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 2000 кусків?

13. Маємо листок паперу. Розрізаємо його на 4 частини, а потім деякі з них ще на 4 частини. Таку операцію розрізування повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 50 частин?

Алгоритм Евкліда

Для знаходження НСД пари натуральних чисел (а;в) робимо так:

1. *ділимо а на в і отримуємо остачу* r *;*
2. *ділимо в на* r *і отримуємо остачу* r_1 *;*
3. *ділимо* r *на* r_1 *і отримуємо остачу* r_2 *і так робимо до тих пір, поки деяке число* r_n *не поділиться на* r_{n+1}. *Число* r_{n+1} *- називають НСД(а;в).*

Тобто: $НСД(a;в) = НСД(в;r) = НСД(r;r_1) = ... = НСД(r_n;r_{n+1}) = r_{n+1}$.

Теорема. *Якщо* $a > b$ *, то* $НСД(a;в) = НСД(a-в;в)$.

Зв'язок між НСД і НСК двох чисел а і в

$НСД(a;в) \cdot НСК(a;в) = aв$ *- добуток НСД і НСК двох натуральних чисел дорівнює добутку цих чисел.*

З даної рівності можна знайти НСК двох чисел а і в.

Приклад 28. Скоротіть дріб $\frac{2147}{1577}$.

Розв’язання. Знайдемо НСД чисел 2147 і 1577 застосувавши алгоритм Евкліда.

$2147 = 1577 \cdot 1 + 570$, $1577 = 570 \cdot 2 + 437$, $570 = 437 \cdot 1 + 133$,

$437 = 133 \cdot 3 + 38$, $133 = 38 \cdot 3 + 19$, $38 = 19 \cdot 2$.

Отже, $НСД(2147;1577) = 19$, тому $\frac{2147}{1577} = \frac{19 \cdot 113}{19 \cdot 87} = \frac{113}{87}$.

Приклад 29. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні *n* дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ буде нескоротним.

Розв’язання. Застосуємо відому теорему, якщо $a > b$, то $НСД(a;в) = НСД(a-в;в)$. Маємо:

$$НСД(30n+2;12n+1) = НСД(18n+1;12n+1) = НСД(12n+1;6n) =$$
$$= НСД(6n+1;6n) = НСД(6n;1) = 1,$$

а значить дріб нескоротний, бо найбільший спільний дільник чисельника і знаменника дорівнює 1, тобто числа $12n+1$ і $30n+2$ взаємно прості. *Дане завдання можна зробити за допомогою алгоритму Евкліда.*

Теорема. *Найбільший спільний дільник чисел* a *і* $в$ *можна виразити через числа а і в у вигляді* $ax+by$ *, де* $x;y \in Z$ *.*

Приклад 30. Запишемо НСД чисел $a = 2147$ і $в = 1577$ у вигляді $ax+by$ *, де* $x;y \in Z$ *.*

Розв’язання. Використавши алгоритм Евкліда отримаємо рівності:

1) $2147 = 1577 \cdot 1 + 570$, тоді $570 = 2147 - 1577 \cdot 1$;

2) $1577 = 570 \cdot 2 + 437$, тоді $437 = 1577 - 570 \cdot 2$;

3) $570 = 437 \cdot 1 + 133$, тоді $133 = 570 - 437 \cdot 1$;

4) $437 = 133 \cdot 3 + 38$, тоді $38 = 437 - 133 \cdot 3$;

5) $133 = 38 \cdot 3 + 19$, тоді $19 = 133 - 38 \cdot 3$.

6) $38 = 19 \cdot 2$.

Отже, $НСД(2147;1577) = 19 = 133 - 3 \cdot 38 = 133 - 3 \cdot (437 - 133 \cdot 3) = 133 - 3 \cdot 437 + 9 \cdot 133 =$
$= 10 \cdot 133 - 3 \cdot 437 = 10 \cdot (570 - 1 \cdot 437) - 3 \cdot 437 =$

$$= 10 \cdot 570 - 10 \cdot 437 - 3 \cdot 437 = 10 \cdot 570 - 13 \cdot 437 = 10 \cdot 570 - 13 \cdot (1577 - 2 \cdot 570) =$$

$$= 10 \cdot 570 - 13 \cdot 1577 + 26 \cdot 570 = 36 \cdot 570 - 13 \cdot 1577 = 36 \cdot (2147 - 1 \cdot 1577) - 13 \cdot 1577 =$$

$$= 36 \cdot 2147 - 36 \cdot 1577 - 13 \cdot 1577 = 36 \cdot 2147 - 49 \cdot 1577.$$

Таким чином, $НСД(a;в) = НСД(2147;1577) = 19 = ax + by = 2147 \cdot 36 - 1577 \cdot 49$, де $x = 36$, а $y = -49$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скоротіть дроби: $\frac{525}{231}, \frac{253}{299}, \frac{2491}{2773}, \frac{899}{1073}, \frac{4757}{5561}$.

2. Знайдіть: $НСД(6n+3,3n)$, $НСД(n+1,n)$, $НСД(8n+4,4n)$, $НСД(2n+13,n+7)$, $НСД(8n+7,2n+1)$.

3. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n дроби будуть нескоротними:

$$\frac{4n+3}{20n+23}, \qquad \frac{3n+1}{15n+14}, \qquad \frac{16n+1}{40n+2}.$$

4. Записати НСД чисел a і $в$ у вигляді $ax + by$, *де* $x; y \in Z$*:*

1) $a = 546$ і $в = 231$; 2) $a = 299$ і $в = 253$;

3) $a = 899$ і $в = 1073$; 4) $a = 2773$ і $в = 2491$.

Основна теорема теорії подільності

Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна розкласти в добуток простих чисел, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку співмножників $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n$, *де* $p_1, p_2, p_3, .., p_n$ *- прості числа. Запис* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$ *-* ***канонічний розклад числа а****, де* $p_1, p_2, p_3, .., p_n$ *- прості числа, а* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_n$ *- натуральні числа.*

Обчислення кількості усіх дільників числа а

Якщо $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$ *- канонічний розклад числа а, де* $p_1, p_2, p_3, .., p_n$ *- прості числа, а* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_n$ *- натуральні числа, то натуральними дільниками числа а* *будуть лише числа* $в = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot ... \cdot p_n^{\beta_n}$, *де* $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, $0 \le \beta_3 \le \alpha_3, ...,$ $0 \le \beta_n \le \alpha_n$. ***Кількість усіх дільників числа а дорівнює*** $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdot ... \cdot(\alpha_n+1)$.

Приклад 31. Скільки натуральних дільників має число 120.

Розв'язання. Канонічний розклад числа $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, де $0 \le \beta_1 \le 3$, $0 \le \beta_2 \le 1$, $0 \le \beta_3 \le 1$. Кількість дільників числа 120 дорівнює кількості наборів, які можна скласти з чисел β_1, β_2, β_3. Число β_1 можна вибрати 3+1=4 способами, число β_2 - 1+1=2 способами, число β_3 - 1+1=2 способами. Отже, за узагальненим правилом добутку зазначений набір можна вибрати $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способами. Тому дане число має 16 дільників.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скільки різних натуральних дільників мають числа: 240, 360, 1080, 1024, $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^3$, $3^5 \cdot 5^8 \cdot 7^2$.

Конгруенції та їхні властивості. Теорема Ейлера і мала теорема Ферма

Теорема. *Якщо цілі числа а і в при діленні на натуральне число т дають однакові остачі, то* $(a-в)\vdots m$.

Теорема. *Якщо цілі числа а і в такі, що* $(a-в)\vdots m$, *де т – натуральне число, то числа а і в дають однакові остачі при діленні на т.*

Означення. *Цілі числа а і в називаються конгруентними за модулем т* $(m \in N)$, *якщо остачі при діленні їх на число т рівні. Пишуть* $a \equiv в$ *(mod m) – читають а конгруентне в за модулем т. Приклад:* $7 \equiv 10$ *(mod 3),* $11 \equiv -1$ *(mod 3),* $12 \equiv 0$ *(mod 6).*

Теорема. *Для того щоб цілі числа а і в були конгруентними за модулем т, де* $m \in N$, *необхідно й достатньо, щоб різниця а-в ділилася націло на т.*

Властивості конгруенцій (a, в, c, d – цілі числа, m і n – натуральні)

1. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m),* $в \equiv c$ *(mod m), то* $a \equiv c$ *(mod m).*
2. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $a + c \equiv в + c$ *(mod m).*
3. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $ac \equiv вc$ *(mod m).*
4. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m) і* $c \equiv d$ *(mod m), то* $a \pm c \equiv b \pm d$ *(mod m).*
5. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m) і* $c \equiv d$ *(mod m), то* $ac \equiv bd$ *(mod m).*
6. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $a^n \equiv b^n$ *(mod m).*

Приклад 32. Довести, що число $3^{105} + 4^{105}$ кратне 13.

Розв'язання. Застосуємо властивості конгруенцій. Число $105 = 3 \cdot 35$, тому $3^3 = 27 \equiv 1(\mathrm{mod}13)$, $(3^3)^{35} = 3^{105} \equiv 1^{35} = 1(\mathrm{mod}13)$; $4^3 = 64 \equiv -1(\mathrm{mod}13)$, $(4^3)^{35} = 4^{105} \equiv (-1)^{35} = -1(\mathrm{mod}13)$. Додаючи конгруенції, маємо: $3^{105} + 4^{105} \equiv 1 - 1 = 0(\mathrm{mod}13)$. Отже, число $3^{105} + 4^{105}$ кратне 13. *Дане завдання можна було б розв'язати іншими способами, за теоремою Безу, за формулою чи дослідити останню цифру степенів.*

Приклад 33. ***(ключова задача)*** Знайти остачу при діленні числа n^4 на 5, де $n \in Z$.

Розв’язання. При діленні n на 5 можливі наступні випадки: $n \equiv 0 (\bmod 5)$, $n \equiv 1 (\bmod 5)$, $n \equiv 2 (\bmod 5)$, $n \equiv 3 (\bmod 5)$, $n \equiv 4 (\bmod 5)$. Використаємо властивість конгруенції піднісши кожну конгруенцію до четвертого степеня. Маємо: $n^4 \equiv 0^4 \equiv 0 (\bmod 5)$, $n^4 \equiv 1^4 \equiv 1 (\bmod 5)$, $n^4 \equiv 16 (\bmod 5) \equiv 1 (\bmod 5)$, $n^4 \equiv 81 (\bmod 5) \equiv 1 (\bmod 5)$, $n^4 \equiv 256 (\bmod 5) \equiv 1 (\bmod 5)$. Отже, при діленні n^4 на 5 можливі остачі 0 або 1.

Приклад 34. Знайти остачу від ділення числа 5^{99} на 3.

Розв’язання. Зрозуміло, що $5^{99} = \left(5^3\right)^{33} = 125^{33}$. Використовуючи властивості конгруенцій, маємо: $125 \equiv -1 (\bmod 3)$, тоді $125^{33} \equiv (-1)^{33} \equiv -1 \equiv 2 (\bmod 3)$.

Приклад 35. Доведіть, що при будь-якому $n \in N$ значення виразу $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратне 7. Розв’язання. Використаємо властивості степеня: $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n} = 2^3 \cdot 2^{4n} + 13 \cdot 9^n = 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$. Застосуємо властивості конгруенцій, маємо: $16 \equiv 2 (\bmod 7)$, $9 \equiv 2 (\bmod 7)$, тоді $16^n \equiv 2^n (\bmod 7)$ і $9^n \equiv 2^n (\bmod 7)$, $8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 8 \cdot 2^n + 13 \cdot 2^n \equiv 21 \cdot 2^n \equiv 0 (\bmod 7)$. Отже, значення виразу $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Приклад 36. Якою цифрою закінчується число $9999^{999^{999}}$.

Розв’язання. Остання цифра числа утворює число, що є остачею при діленні числа $9999^{999^{999}}$ на 10. Використаємо властивості конгруенцій $9 \equiv -1 (\bmod 10)$, $9^2 = 81 \equiv 1 (\bmod 10)$, отже $9^{2n} \equiv 81^n \equiv 1^n \equiv 1 (\bmod 10)$, $9^{2n+1} \equiv 9^{2n} \cdot 9 \equiv 1 \cdot 9 \equiv 9 (\bmod 10)$. Так, як показник степеня 999^{999} - це непарне число, то число остання цифра числа $9999^{999^{999}}$ буде 9.

Приклад 37. Якщо a і $в$ цілі числа, а $n \in N$, то $(7a+3)^{2n+1} + (7b+25)^{2n+1} \vdots 7$.

Розв’язання. Використаємо властивості конгруенцій $7a + 3 \equiv 3 (\bmod 7)$, то $(7a+3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} (\bmod 7)$, відповідно $25 \equiv -3 (\bmod 7)$, $7b + 25 \equiv -3 (\bmod 7)$, то $(7b+3)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1} (\bmod 7)$. Отже, $(7a+3)^{2n+1} + (7b+25)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} - 3^{2n+1} \equiv 0 (\bmod 7)$. Значить $(7a+3)^{2n+1} + (7b+25)^{2n+1} \vdots 7$.

Приклад 38. Довести, що якщо а і в взаємно-прості з 3, то $a^2 + в^2$ не ділиться на 3.

Розв’язання. $НСД(a;3) = 1$, $НСД(в;3) = 1$, значить $a \equiv \pm 1 (\bmod 3)$, $a \equiv \pm 1 (\bmod 3)$. Тоді $a^2 + в^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 (\bmod 3)$, а значить $a^2 + в^2$ не ділиться на 3.

Приклад 39. Довести, що $(a^2 + в^2) \vdots 7$, тоді і тільки тоді, коли $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$.

Розв’язання. 1) Якщо $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$, то $(a^2 + в^2) \vdots 7$.

2) Нехай $(a^2 + в^2) \vdots 7$ і $a = 7n + r_1$, $b = 7n + r_2$, де $0 \le r_{1,2} < 7$. Тоді $r_{1,2}$ може набирати наступних значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. перебираючи всі можливі випадки, бачимо, що $(a^2 + в^2) \vdots 7$ при $r_1 = r_2 = 0$, тобто коли $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$.

Теорема Ейлера. *Якщо $a \in Z$ і $n \in N$, $n > 1$ взаємно прості ($НСД(a;n) = 1$), то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$, де $\varphi(n)$ - функція Ейлера (означає кількість натуральних чисел, які не більші за n і взаємно-прості з ним).*

Приклад. $\varphi(10)=4$*, бо є числа 1, 3, 7, 9, що не перевищують 10 і взаємно-прості з 10.*

Обчислити значення функції Ейлера можна, взявши канонічний розклад даного числа: $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$ ***, то*** $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$.

За допомогою даної теореми можна легко обчислювати модуль великих степенів.

Приклад 40. Обчислити $7^{222}(\mathrm{mod}\,10)$.

Розв'язання. Маємо, що $НСД(7;10)=1$*, тобто 7 і 10 взаємно-прості числа і* $\varphi(10)=4$*, бо є числа 1, 3, 7, 9, що не перевищують 10 і взаємно-прості з 10. За теоремою Ейлера* $7^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,10)$ *і* $222=4\cdot 55+2$. *Тому використовуючи властивості конгруенцій маємо:* $(7^4)^{55}\equiv 1^{55}(\mathrm{mod}\,10)$, $7^{220}\cdot 7^2\equiv 1\cdot 7^2\equiv 49\equiv 9(\mathrm{mod}\,10)$. *Отже, остача при діленні числа* 7^{222} на 10 дорівнює 9.

Частковим випадком теореми Ейлера при простому n *є мала теорема Ферма.*

Мала Теорема Ферма. *Нехай* n *- просте число, a – ціле число, що не ділиться на* n. *Тоді* $a^{n-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$.

Еквівалентне означення. *Нехай* n *- просте число, a – ціле число, що не ділиться на* n. *Тоді* $a^n-a\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)$.

Приклад 41. Знайти остачу від ділення числа 3^{102} на 101.

Розв'язання. Так, як число 101 – просте, то за малою теоремою Ферма $3^{101-1}=3^{100}\equiv 1(\mathrm{mod}\,101)$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $3^{100}\cdot 3^2=3^{102}\equiv 1\cdot 3^2\equiv 9(\mathrm{mod}\,101)$. Отже, остача від ділення числа 3^{102} на 101 дорівнює 9.

Приклад 42. Доведіть, що коли натуральне число n не ділиться націло на 17, то або $(n^8-1)\vdots 17$, або $(n^8+1)\vdots 17$.

Розв'язання. Так, як число 17 – просте, то за малою теоремою Ферма $n^{17-1}=n^{16}\equiv 1(\mathrm{mod}\,17)$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $n^{16}-1\equiv 1-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,17)$, тобто $(n^{16}-1)\vdots 17$, $(n^8-1)(n^8+1)\vdots 17$. Отже, або $(n^8-1)\vdots 17$, або $(n^8+1)\vdots 17$.

Приклад 43. Знайти остачу від ділення числа $(86^{143}-31^{547})^{62}$ на 21.

Розв'язання. Застосуємо властивості конгруенцій.

1) Число $86\equiv 2(\mathrm{mod}\,21)$, тому $86^{143}\equiv 2^{143}(\mathrm{mod}\,21)$. Обчислимо $2^{143}(\mathrm{mod}\,21)$: $НСД(2;21)=1$, *тобто 2 і* $21=3\cdot 7$ *взаємно-прості числа і* $\varphi(21)=21\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=12$. *За теоремою Ейлера* $2^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,21)$. *Використовуючи властивості конгруенцій маємо:* $(2^{12})^{12}=2^{144}\equiv 1^{12}=1(\mathrm{mod}\,21)$, $2^{144}\equiv 1+21=22(\mathrm{mod}\,21)$, *тоді* $2^{143}\equiv 11(\mathrm{mod}\,21)$. *Отже, остача при діленні числа* 86^{143} на 21 дорівнює 11.

2) Число $31 \equiv 10(\mod 21)$, тому $31^{547} \equiv 10^{547}(\mod 21)$. Обчислимо $10^{547}(\mod 21)$: *НСД*$(10;21)=1$, *тобто 10 і* $21 = 3 \cdot 7$ *взаємно-прості числа і* $\varphi(21) = 21\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 21 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = 12$. *За теоремою Ейлера* $10^{12} \equiv 1(\mod 21)$, *а* $547 = 12 \cdot 45 + 7$. *Використовуючи властивості конгруенцій маємо:* $(10^{12})^{45} = 10^{540} \equiv 1^{45} = 1(\mod 21)$, $10^{540} \cdot 10^{7} \equiv 1 \cdot 10^{7} = 10^{7}(\mod 21)$, *тоді* $10^{2} = 100 \equiv -5(\mod 21)$, $(10^{2})^{3} = 10^{6} \equiv (-5)^{3} = -125 = 1(\mod 21)$, $10^{7} \equiv 10(\mod 21)$. *Отже,* $31^{547} \equiv 10(\mod 21)$ *остача при діленні числа* 31^{547} на 21 дорівнює 10.

3) Таким чином, $86^{143} - 31^{547} \equiv 11 - 10 = 1$, *отже* $\left(86^{143} - 31^{547}\right)^{62} \equiv 1^{62} = 1(\mod 21)$. Остача від ділення числа $\left(86^{143} - 31^{547}\right)^{62}$ на 21 дорівнює 1.

Приклад 44. Довести, що $\left(3299^{5} + 6\right)^{18} - 1$ націло ділиться на 112.

Розв'язання. Оскільки дільник 112 є число складене і досить велике, то доцільно його розкласти на взаємно-прості множники, тобто $112 = 2^{4} \cdot 7$. Число 16 і 7 взаємно-прості, тому доведемо окремо, що число ділиться на 16 і 7.

1) Доведемо, що $\left(3299^{5} + 6\right)^{18} - 1$ націло ділиться на 16. Число $3299 = 16 \cdot 206 + 3$, тобто $3299 \equiv 3(\mod 16)$, $3299^{5} \equiv 3^{5} = 243 \equiv 3(\mod 16)$, $3299^{5} + 6 \equiv 9(\mod 16)$, $(3299^{5} + 6)^{18} \equiv 9^{18}(\mod 16)$. Легко помітити, що $9^{2} \equiv 1(\mod 16)$, тому $(3299^{5} + 6)^{18} \equiv 9^{18} \equiv 1(\mod 16)$, отже $(3299^{5} + 6)^{18} - 1 \equiv 1 - 1 = 0(\mod 16)$. Число $\left(3299^{5} + 6\right)^{18} - 1$ ділиться націло на 16.

2) Доведемо, що $\left(3299^{5} + 6\right)^{18} - 1$ націло ділиться на 7. Число $3299 = 7 \cdot 471 + 2$, тобто $3299 \equiv 2(\mod 7)$, $3299^{5} \equiv 2^{5} = 32 \equiv 4(\mod 7)$, $3299^{5} + 6 \equiv 10 \equiv 3(\mod 7)$, $(3299^{5} + 6)^{18} \equiv 3^{18}(\mod 7)$. Оскільки числа 3 і 7 взаємно прості і 7 –просте число, то, за малою теоремою Ферма, $3^{7-1} = 3^{6} \equiv 1(\mod 7)$. Отже, $(3299^{5} + 6)^{18} \equiv 3^{18} \equiv 1(\mod 7)$ і $(3299^{5} + 6)^{18} - 1 \equiv 1 - 1 = 0(\mod 7)$. Число $\left(3299^{5} + 6\right)^{18} - 1$ ділиться націло на 7. Висновок: число $\left(3299^{5} + 6\right)^{18} - 1$ націло ділиться на 112.

Приклад 45. Знайти дві останні цифри числа 3^{100}.

Розв'язання. Дві останні цифри числа утворюють число, що є остачею при діленні числа 3^{100} на 100. Застосуємо властивості числових конгруенцій. Числа 3 і 100 взаємно прості, бо *НСД*$(3;100)=1$. Застосуємо теорему Ейлера , де $100 = 5^{2} \cdot 2^{2}$, $\varphi(100) = 100 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40$, тому $3^{40} \equiv 1(\mod 100)$. Знаходимо $(3^{40})^{2} = 3^{80} \equiv 1(\mod 100)$. Треба знайти остачу від ділення 3^{20} на 100. $3^{5} = 243 \equiv 43(\mod 100)$, тоді $(3^{5})^{2} = 3^{10} \equiv 43^{2} = 1849 \equiv 49(\mod 100)$, $(3^{10})^{2} = 3^{20} \equiv 49^{2} = 2401 \equiv 1(\mod 100)$. Тому $3^{100} = 3^{80} \cdot 3^{20} \equiv 1(\mod 100)$. Таким чином, останні дві цифри нашого числа 01.

Приклад 46. Знайти дві останні цифри числа $7^{9^{9^{9}}}$.

Розв'язання. Дві останні цифри числа утворюють число, що є остачею при діленні числа $7^{9^{9^9}}$ на 100. Але показник степеня сам є степенем і його треба розглянути окремо. Оскільки $9 \equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, то $9^9 \equiv 1^9 = 1(\mathrm{mod}\,8)$, $9^{9^9} \equiv 1^9 = 1(\mathrm{mod}\,8)$, тобто число 9^{9^9} можна представити у вигляді $9^{9^9} = 8m+1$, де $m \in N$. Отже, $7^{9^{9^9}} = 7^{8m+1}$, $m \in N$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $7^4 = 2401 \equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$, $(7^4)^{2m} = 7^{8m} \equiv 1^{2m} = 1(\mathrm{mod}\,100)$, $7^{8m} \cdot 7 = 7^{8m+1} \equiv 1 \cdot 7 = 7(\mathrm{mod}\,100)$. Таким чином, останні дві цифри нашого числа 07.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти остачу від ділення числа a на число $в$, якщо:

а) $a = 7^{36}$, $в = 4$; б) $a = 7^{29}$, $в = 5$; в) $a = 3^{101}$, $в = 7$; а) $a = 3^{70} + 2^{52}$, $в = 4$.

2. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, значення виразу:

а) $11^n + 14 \cdot 6^n$ кратне 5; б) $21^n + 2^{2n+4}$ кратне 17; в) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ кратне 23;

г) $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ кратне 19; д) $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ кратне 37;

е) $17 \cdot 21^{2n+1} + 9 \cdot 43^{2n+1}$ кратне 8.

3. Знайти остачу від ділення числа a на число $в$, якщо:

а) $a = 5^{52}$, $в = 53$; б) $a = 2^{47}$, $в = 41$.

4. Знайти остачу від ділення 383^{175} на 45.
5. Знайти остачу від ділення $(12371^{56} + 145)^{28}$ на 111.
6. Довести, що $222^{333} + 333^{222}$ ділиться націло на 13.
7. Знайти дві останні цифри числа 2^{100}.
8. Знайти три останні цифри числа 243^{402}.
9. Довести, що $15^{60} + 20^{30}$ кратне 13.
10. Довести, що $2222^{5555} - 5555^{2222}$ кратний 7.
11. Знайти останню цифру числа 777^{777}.
12. Доведіть, що число $7^{2012^{2014}} - 3^{2000^{2011}}$ ділиться на 10.

Спосіб знаходження остач при діленні на натуральне число к

1. Переконуємося, що заданий числовий вираз містить лише суми, добутки і степені цілих чисел.

2. Для кожного доданка, співмножника чи основи степеня знаходимо його остачу r *при діленні на к (якщо остача більша за* $\frac{к}{2}$, *то іноді зручно замість остачі* r *взяти від'ємне число* $r - к$, *яке дає ту ж саму остачу* r *при діленні на к).*

3. Підставляємо одержані числа в заданий вираз (замість відповідних доданків, співмножників чи основ степенів) і одержуємо число, яке дає ту ж саму остачу при діленні на к, що й заданий вираз.

Приклад 47. Знайти остачу при діленні числа $9^{1999}+1997\cdot1998\cdot1999$ на 8.

Розв'язання. 9 при діленні на 8 дає остачі 1, 1997 при діленні на 8 дає в остачі 5, 1998 при діленні на 8 дає в остачі 6, 1999 при діленні на 8 дає в остачі 7. Тоді початкове число при діленні на 8 дає таку ж остачу, як і число $1^{1999}+5\cdot6\cdot7=211$, тобто 3.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти остачу при діленні числа $1997^{1998}+1999^{2000}$ на 37.
2. Знайти остачу при діленні числа $531^{1002}+742^{2002}$ на 19.
3. Знайти остачу при діленні числа $18^{2012}+480\cdot481\cdot482$ на 17.
4. Знайти остачу при діленні числа $1952^{2n}+1953^{2n}$ на 31.
5. Знайти остачу при діленні числа $12^{2014}+2577\cdot2578$ на 11.
6. Знайти остачу при діленні числа $2005^{2n+1}\cdot2007^{2n}$ на 1003.
7. Знайти остачу при діленні числа $23^{2012}+1434\cdot1435\cdot1436$ на 22.
8. Знайти остачу при діленні числа $2222^{5555}+5555^{2222}$ на 7.

Теорема Безу. Ділення многочлена «куточком»

Теорема Безу. *Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен x-a дорівнює значенню цього многочленна при x=a, тобто $r=P(a)$.*

Наслідок: *Якщо x=a – корінь многочлена $P(x)$ (тобто $P(a)=0$), то цей многочлен ділиться без остачі на x-a.*

Приклад 48. Знайти остачу від ділення многочлена P(x)=x^3 –3x+4 на двочлен x-2.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** За теоремою Безу: R=P(2)=8-6+4=6

2 спосіб.

Виконаємо поділ кутом, маємо:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3-3x+4 & x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} & x^2+2x+1 \\ -\,2x^2-3x & \\ \underline{2x^2-4x} & \\ -\,x+4 & \\ \underline{x-2} & \\ 6 & \end{array}$$

Отже, остача R=6.

Приклад 49. Знайти всі цілі значення x, при яких дріб $\dfrac{x^3+1}{x-1}$ буде цілим числом.

Розв'язання. Виконаємо поділ кутом, маємо:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+1 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & x^2+x+1 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
-\;x^2+1 \\
x^2-x \\
\hline
-\;x+1 \\
x-1 \\
\hline
2
\end{array}
$$

Тоді $\dfrac{x^3+1}{x-1}=x^2+x+1+\dfrac{2}{x-1}$. Щоб при цілих значеннях х вираз $\dfrac{x^3+1}{x-1}$ приймав цілі значення, потрібно, щоб дріб $\dfrac{2}{x-1}$ приймав цілі значення. Підбором це можливо при х=-1; 0; 2; 3.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що многочлен А(х) ділиться націло на многочлен В(х):

а) $A(x)=x^5-3x^4+2x^3+4x-4$, $B(x)=x-1$ б) $A(x)=x^2-7x+6$, $B(x)=x-6$.

2. Знайдіть остачу при діленні многочлена А(х) на двочлен В(х):

а) $A(x)=2x^4+3x^4-x^3-2x^2+5x+1$, $B(x)=x+3$;

б) $A(x)=5x^3+2x^2-4x-2$, $B(x)=x+2$;

в) $A(x)=2012x^{2012}+2011x^{2011}, B(x)=x+1$; г) $A(x)=x^{2013}-x^{1000}+2012$, $B(x)=x-1$.

3. а) Знайдіть всі натуральні а, при яких дріб $\dfrac{a^3+2a+3}{a-1}$ буде натуральним числом.

б) Знайдіть всі натуральні а, при яких дріб $\dfrac{a^2+1}{a+1}$ буде натуральним числом.

4. а) Знайдіть всі цілі а, при яких дріб $\dfrac{a^3+1}{a-1}$ буде цілим числом.

б) Знайдіть всі цілі а, при яких дріб $\dfrac{a^3-2a+3}{a-2}$ буде цілим числом.

Наслідки з теореми Безу

1. *Вираз x^n-a^n ділиться без остачі на х-а.*
2. *Вираз $x^{2n}-a^{2n}$ ділиться без остачі на х+а.*
3. *Вираз $x^{2n-1}+a^{2n-1}$ ділиться без остачі на х+а.*
4. *Вираз $x^{2n-1}-a^{2n-1}$ не ділиться без остачі на х+а.*
5. *Вираз $x^{2n}+a^{2n}$ не ділиться без остачі на х+а.*

Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n \pm b^n$

1. $a^n - b^n = (a - в)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, *де n – будь-яке натуральне число.*

2. $a^n + b^n = (a + в)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$, *де n – непарне натуральне число.*

Приклад 50. Доведіть, що $10000^{1006} - 87^{2012}$ ділиться націло на 13.

Розв'язання. ***1 спосіб.***

Виконаємо перетворення $10000^{1006} - 87^{2012} = 100^{2012} - 87^{2012}$. За наслідком з теореми Безу $x^n - a^n$ ділиться без остачі на х-а, тобто початкове число ділиться на 100-87=13.

2 спосіб.

Використаємо формулу $a^n - b^n = (a - в)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$, де n – будь-яке натуральне число.

Приклад 51. Доведіть, що $2012^{22} - 1$ ділиться націло на 2013.

Розв'язання. За наслідком з теореми Безу вираз $x^{2n} - a^{2n}$ ділиться без остачі на х+а, тобто початкове число ділиться на 2012+1=2013.

Приклад 52. Доведіть, що $1 + 2^{2013} + 3^{2013} + ... + 1000^{2013}$ ділиться націло на 1001.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Згрупуємо доданки наступним чином:

$$1 + 2^{2013} + 3^{2013} + ... + 1000^{2013} = (1^{1013} + 1000^{2013}) + (2^{2013} + 999^{2013}) +$$
$$+ (3^{2013} + 998^{2013}) + ... + (500^{2013} + 501^{2013})$$

За наслідком з теореми Безу вираз $x^{2n-1} + a^{2n-1}$ ділиться без остачі на х+а. Тобто вирази $(1^{1013} + 1000^{2013})$, $(2^{2013} + 999^{2013})$, $(3^{2013} + 998^{2013}), \ldots,$ $(500^{2013} + 501^{2013})$ діляться відповідно на $1 + 1000 = 1001$, $2 + 999 = 1001$, $3 + 998 = 1001, \ldots,$ $500 + 501 = 1001$. Отже і початковий вираз ділиться на 1001.

2 спосіб.

Використати формулу $a^n + b^n = (a + в)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1})$, де n – непарне натуральне число.

Приклад 53. Довести, що вираз $3^{4n+4} - 4^{3n+3}$ ділиться на 17.

Розв'язання. Виконаємо перетворення $3^{4(n+1)} - 4^{3(n+1)} = 81^{n+1} - 64^{n+1}$. За наслідком з теореми Безу $x^n - a^n$ ділиться без остачі на х-а, тобто на 81-64=17.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що $2012^{22} - 1$ ділиться на 2011.
2. Доведіть, що $1 + 2^{1001} + 3^{1001} + ... + 2012^{1001}$ ділиться націло на 2013.
3. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^{2n} + 3^{2n} + 30 \cdot 21^n$ кратний 16.
4. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^n - 6 \cdot 2^n$ кратний 5.

5. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $5^n - 2^{n+1}$ кратний 3.

6. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $21^n + 4^{n+2}$ кратний 17.

7. Доведіть, що при будь-якому непарному натуральному значенні n вираз $5^n + 2^n$ кратний 7.

8. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ кратний 19.

9. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ кратний 57.

10. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $5^n + 7^n + 9^n + 11^n$ кратний 4.

Метод математичної індукції

1. Початок індукції: перевіряємо, чи виконується твердження при n=1 (іноді починають з n=p).

2. Припускаємо, що задане твердження справедливе при n=k, де $k \geq 0$.

3. Доводимо (спираючись на припущення) справедливість нашого твердження і при n=k+1. Робимо висновок.

Приклад 54. Доведіть, що $10^n - 9n - 1$ ділиться на 81 при будь-якому $n \in N$.

Розв'язання. Використаємо метод математичної індукції.

1. Перевіряємо, чи виконується твердження при n=1: 10-9-1=0, тобто ділиться на 81.

2. Припускаємо, що задане твердження справедливе при n=k, тобто $(10^k - 9k - 1) \vdots 81$.

3. Доведемо, що задане твердження виконується при n=k+1. Маємо:

$$10^{k+1} - 9(k+1) - 1 = 10^k \cdot 10 - 9k - 9 - 1 = 10 \cdot \left(10^k - 9k - 1\right) + 81k.$$

Перший доданок останньої суми ділиться на 81 за припущенням індукції, другий теж ділиться на 81. Отже, вся сума ділиться на 81.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ кратний 19.

2. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ кратний 7.

3. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $4^n + 15n - 1$ кратний 9.

4. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $5^n - 3^n + 2n$ кратний 4.

5. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $3^{2n+2} - 8n - 9$ кратний 64.

6. Доведіть, що $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ділиться на 7 при будь-якому $n \in N$.

7. Доведіть, що $9^n - 8n - 1$ ділиться на 16 при будь-якому $n \in N$.

8. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $5^n - 3^n + 2n$ кратний 4.