видавництво Генеза

ДЕРЖАВНА ПІДСУМКОВА АТЕСТАЦІЯ

П. Г. ПАВЛЕНКО

9

РОЗВ'ЯЗНИК ЗАВДАНЬ

2020

МАТЕМАТИКА

50 варіантів

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Г	Г	А	В	Г	Б	Г	В	Г	Г	В

2.1	2.2	2.3	2.4
−60	$y=-2x^2$	120	12

3.1. Нехай треба взяти x г 3-відсоткового розчину солі і y г 8-відсоткового. Тоді $x+y=260$. У x г 3-відсоткового розчину міститься $0{,}03x$ г солі, а в y г 8-відсоткового розчину — $0{,}08y$ г солі. Тоді $0{,}03x+0{,}08y=260\cdot 0{,}05$.

Маємо систему $\begin{cases} x+y=260, \\ 0{,}03x+0{,}08y=13. \end{cases}$

Розв'яжемо її: $x=260-y$; $0{,}03(260-y)+0{,}08y=13$; $0{,}05y=5{,}2$; $y=104$ (г), тоді $x=156$ (г).

Отже, треба взяти 156 г 3-відсоткового розчину солі та 104 г 8-відсоткового.

Відповідь. 156 г і 104 г.

3.2. $\dfrac{1}{2x^2+6}+\dfrac{1}{3x-12}=\dfrac{1}{12-3x+4x^2-x^3}$.

Оскільки

$12-3x+4x^2-x^3=3(4-x)+x^2(4-x)=(4-x)(3+x^2)$,

то маємо:

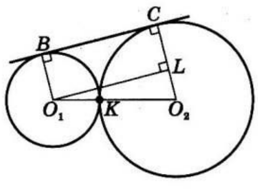
$$\frac{1}{2(x^2+3)}+\frac{1}{3(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(3+x^2)}=0;$$

$$\frac{3(x-4)+2(x^2+3)+6}{6(x-4)(3+x^2)}=0.$$

Рівняння рівносильне системі

$\begin{cases} 2x^2+3x=0, \\ x\ne 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x(2x+3)=0, \\ x\ne 4; \end{cases}$ $x_1=0;\ x_2=-1{,}5.$

Відповідь. −1,5; 0.



3.3. Нехай BC — спільна зовнішня дотична до кіл, що дотикаються зовні; B і C — точки дотику. $O_1B=4$ см; $O_2C=9$ см.

$O_1K+KO_2=4+9=13$ (см).

Проведемо $O_1L \parallel BC$.

Тоді O_1BCL — прямокутник і $LO_2=CO_2-CL=CO_2-O_1B=9-4=$ $=5$ (см).

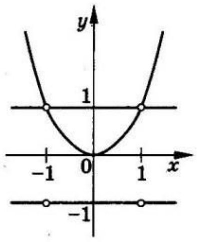
У $\triangle O_1LO_2$: $O_1L=\sqrt{O_1O_2^2-LO_2^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см).

Оскільки O_1BCL — прямокутник, то $BC=O_1L=12$ см.

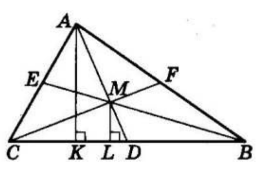
Відповідь. 12 см.

4.1м. Рівняння $\dfrac{(y-x^2)(|y|-1)}{1-x^2}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x^2, \\ |y|=1, \end{array}\right. \\ x\ne 1, \\ x\ne -1. \end{cases}$$



Графік зображено на малюнку. Це сукупність параболи $y=x^2$ з «виколотими» точками (1; 1) і (–1; 1); прямої $y=1$ з тими самими «виколотими» точками і прямої $y=-1$ з «виколотими» точками (–1; –1) і (1; –1).



4.2м. *Лема.* Трикутники, на які розбивають даний трикутник медіани, мають рівні площі.

Доведення леми. Нехай AD, BE, CF — медіани $\triangle ABC$. $S_{\triangle CMD}=S_{\triangle DMB}$ (у цих трикутниках рівні відповідні висоти й основи). Проведемо висоти AK — трикутника ABC і ML — трикутника CMD.

$\triangle AKD \sim \triangle MLD$ (за двома кутами). Тоді $\dfrac{AK}{ML}=\dfrac{AD}{MD}=\dfrac{3}{1}$ (оскільки M — точка перетину медіан).

Тоді $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CMB}}=\dfrac{3}{1}$ (у трикутниках рівні основи, а тому їх площі відносяться так, як висоти).

Отже, $S_{\triangle CMB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}$, а тому $S_{\triangle CMD}=S_{\triangle DMB}=\dfrac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

Аналогічно $S_{\triangle CME}=S_{\triangle EMA}=S_{\triangle AMF}=S_{\triangle MFB}=\dfrac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

Лему доведено.

Знайдемо площу $\triangle ABC$:

$p=\dfrac{25+29+6}{2}=30$ (см); $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=$

$=\sqrt{30(30-25)(30-29)(30-6)}=60$ (см²).

Тому площі всіх трикутників, на які медіани розбивають даний, по $\dfrac{60}{6}=10$ (см²). *Відповідь.* Усі по 10 см².

Варіант 2

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
А	Б	В	Г	В	А	Б	А	Б	А	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
1; –2	$y = 2x - 7$	38,75	60° або 120°

3.1. Нехай перший трактор для того, щоб зорати поле самостійно, витрачає x год; тоді другий трактор витрачає на це $(x + 10)$ год. За одну годину перший трактор оре $\frac{1}{x}$ частину поля, а другий трактор — $\frac{1}{x+10}$ частину поля. При спільній роботі вони орють $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}$ частину поля. За умовою, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=12.$

Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{x+10+x}{x(x+10)}=\frac{1}{12}$;

$12(2x+10) = x^2 + 10x$; $x^2 - 14x + 120 = 0$; $x_1 = 20$; $x_2 = -6$.

Другий корінь не підходить за умовою задачі.

Отже, перший трактор, працюючи самостійно, може зорати поле за 20 год, а другий — за 30 год.

Відповідь. 20 год; 30 год.

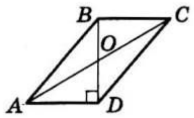
3.2. ОДЗ: $x > 0$. Маємо: $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}=0$ або $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

1) $\sqrt{x} = 2$; $x_1 = 4$.

2) Рівняння $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ розв'яжемо за допомогою заміни $x^2 = t$. Тоді $t^2 - 4t - 5 = 0$; $t_1 = -1$; $t_2 = 5$. Повертаємося до змінної x. Рівняння $x^2 = -1$ розв'язків не має. Розв'язками рівняння $x^2 = 5$ є числа $x = \sqrt{5}$ і $x = -\sqrt{5}$. Ураховуючи ОДЗ, отримаємо $x_2 = \sqrt{5}$. Отже, коренями початкового рівняння є числа $x_1 = 4$; $x_2 = \sqrt{5}$.

Відповідь. $x_1 = 4$; $x_2 = \sqrt{5}$.

3.3. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм, точка O — точка перетину діагоналей; $BD \perp AD$. У $\triangle AOD$: $OD < AO$, а тому $BD < AC$.



Виходячи з умови, $BD = 8$ см, $AC = 10$ см.

$OD=\frac{BD}{2}=\frac{8}{2}=4$ (см), $AO=\frac{AC}{2}=\frac{10}{2}=5$ (см).

У $\triangle AOD$: $AD=\sqrt{AO^2-OD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ (см).

Тому $S_{ABCD} = AD \cdot BD = 3 \cdot 8 = 24$ (см^2).

Відповідь. 24 см^2.

4.1м. Рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2-4xa+3a^2-2a-1=0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Розв'язуючи рівняння, маємо:

$D=(-4a)^2-4(3a^2-2a-1)=4a^2+8a+4=4(a+1)^2$;

$x_1=\frac{4a+2(a+1)}{2}=3a+1$; $x_2=\frac{4a-2(a+1)}{2}=a-1$.

Рівняння, задане в умові, має єдиний корінь в одному з таких випадків:

1) $x_1 = x_2$, $x_1 \neq 4$; 2) $x_1 = 4$, $x_2 \neq 4$; 3) $x_2 = 4$, $x_1 \neq 4$.

Розглянемо ці випадки:

1) $3a+1 = a-1$; $a = -1$, тоді $x_1 = -2 \neq 4$.

2) $3a+1 = 4$; $a = 1$, тоді $x_2 = 0 \neq 4$.

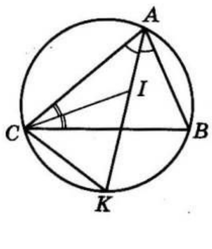
3) $a-1 = 4$; $a = 5$, тоді $x_1 = 3 \cdot 5 + 1 = 16 \neq 4$.

Отже, $a=-1$; $a=1$; $a=5$.

Відповідь. –1; 1; 5.

4.2м. AK — бісектриса $\angle CAB$, I — центр вписаного у $\triangle ABC$ кола. $\angle ICK=\angle ICB+\angle BCK$; $\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$; $\angle BCK=\angle KAB$ (як два кути, що спираються на одну й ту саму дугу KB), але $\angle KAB=\frac{1}{2}\angle CAB$. Остаточно маємо

$\angle ICK=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle CAB)$.



$\angle KIC=\angle ICA+\angle IAC$ (зовнішній кут $\triangle CIA$ дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним). Тоді $\angle KIC=\frac{1}{2}\angle ACB+$ $+\frac{1}{2}\angle CAB=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle CAB)$.

Отже, $\angle ICK=\angle KIC$, тому $CK=KI$.

Аналогічно можна довести, що $BK=KI$.

Задачу доведено.

Варіант 3

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
А	А	Б	Б	А	В	В	А	Г	А	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
1	$q=-12$; $x_0=2$	(3; –2)	36 см

3.1. Нехай друга бригада виготовляє за годину x деталей, тоді перша — $(x+5)$ деталей. Друга бригада для виготовлення 450 деталей затратила $\frac{450}{x}$ год, а перша $\frac{450}{x+5}$ год. За умовою $\frac{450}{x}-\frac{450}{x+5}=1$.

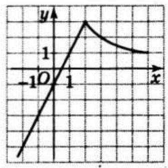
Розв'яжемо це рівняння:

$\frac{450x+2250-450x}{x(x+5)}=1$; $x^2+5x-2250=0$; $x_1=45$; $x_2=-50$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, друга бригада виготовляє 45 деталей, а перша — 50 деталей щодня.

Відповідь. 50 деталей; 45 деталей.

3.2. Графіком функції $f(x)=2x-1$ є пряма, що проходить через точки (–2; –5) і (0; –1), а графіком функції $g(x)=\frac{6}{x}$ є гіпербола. Графік функції $y=\begin{cases}2x-1, \text{ якщо } x<2,\\ \frac{6}{x}, \text{ якщо } x\geqslant 2,\end{cases}$

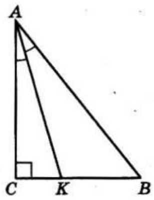


зображено на малюнку.

Областю значень функції є множина $(-\infty; 3]$.

Відповідь. $(-\infty; 3]$.

3.3. Нехай ABC — прямокутний трикутник з прямим кутом C, AK — бісектриса трикутника. За властивістю бісектриси, $\frac{AC}{AB}=\frac{CK}{KB}$. Оскільки $AC<AB$, то й $CK<KB$. За умовою, CK = 3 см, KB = 5 см. Тоді CB = 8 (см).



Маємо $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$, тому можна позначити $AC=3x$; $AB=5x$.

За теоремою Піфагора, $AB^2=AC^2+CB^2$; $(5x)^2=(3x)^2+8^2$; $16x^2=64$; $x^2=4$; $x=2$. Отже, $AC=3\cdot 2=6$ (см). Тоді площа трикутника $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ (см^2).

Відповідь. 24 см^2.

4.1^м. *Доведення.* За теоремою Вієта:

$a+b=-p$; $ab=1$ і $b+c=-q$, $bc=2$.

Тоді $(a+b)(b+c)=pq$; $ab+b^2+bc+ac=pq$.

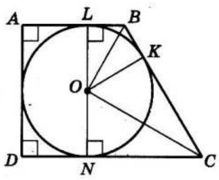
Віднімаючи від цього рівняння почленно $2ab=2$ і $2bc=4$, отримаємо: $ab+b^2+bc+ac-2ab-2bc=pq-2-4$;

$b(b-a)-c(b-a)=pq-6$;

$(b-a)(b-c)=pq-6$,

що й треба було довести.

4.2^м. Нехай O — центр кола, вписаного у трапецію $ABCD$ ($\angle A=\angle D=90°$). $OB=3$ см, $OC=9$ см.



Оскільки точка O є точкою перетину бісектрис кутів трапеції, то

$\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}\angle CBA+\frac{1}{2}\angle BCD=$

$=\frac{1}{2}(\angle CBA+\angle BCD)=\frac{1}{2}\cdot 180°=90°$.

Тому у $\triangle OBC$:

$\angle BOC=180°-90°=90°$.

Тоді $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$ (см).

Виразивши двічі площу $\triangle OBC$, знайдемо OK — висоту цього трикутника й одночасно радіус кола:

$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{1}{2}BC\cdot OK$;

$OK=\frac{OB\cdot OC}{BC}=\frac{3\cdot 9}{3\sqrt{10}}=\frac{9}{10}\sqrt{10}$ (см).

Тоді $AD=2r=2\cdot OK=\frac{9}{5}\sqrt{10}$ (см). Маємо:

$LB=\sqrt{OB^2-OL^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{9}{10}\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\sqrt{10}$ (см).

Тоді $AB=AL+LB=\frac{9}{10}\sqrt{10}+\frac{3}{10}\sqrt{10}=\frac{6}{5}\sqrt{10}$ (см).

Далі $NC=\sqrt{OC^2-ON^2}=\sqrt{9^2-\left(\frac{9}{10}\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{729}{10}}=\frac{27}{10}\sqrt{10}$ (см).

Тоді $DC=DN+NC=\frac{9}{10}\sqrt{10}+\frac{27}{10}\sqrt{10}=\frac{18}{5}\sqrt{10}$ (см).

Периметр трапеції

$P=\frac{9}{5}\sqrt{10}+\frac{6}{5}\sqrt{10}+3\sqrt{10}+\frac{18}{5}\sqrt{10}=\frac{48}{5}\sqrt{10}$ (см).

Відповідь. $\frac{48}{5}\sqrt{10}$ см.

Варіант 4

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Б	В	А	Б	Г	Г	Б	Б	В	Г	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
0,4	–2	[3; +∞)	2; –2

3.1. Нехай x км/год — швидкість течії. Тоді $(18+x)$ км/год — швидкість човна за течією річки і $(18-x)$ км/год — швидкість човна проти течії. 20 км за течією човен долає за $\frac{20}{18+x}$ год, а проти течії — за $\frac{20}{18-x}$ год. Ураховуючи те, що 15 хв $=\frac{15}{60}$ год $=\frac{1}{4}$ год за умовою задачі, маємо рівняння $\frac{20}{18-x}-\frac{20}{18+x}=\frac{1}{4}$.

Розв'яжемо його: $\frac{360+20x-360+20x}{(18-x)(18+x)}=\frac{1}{4}$; $160x=324-x^2$;

$x^2+160x-324=0$; $x_1=2$; $x_2=-162$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість течії 2 км/год.

Відповідь. 2 км/год.

3.2. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}$.

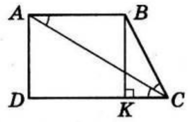
Звільнимося від ірраціональності у знаменнику кожного з дробів:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{(\sqrt{3}+\sqrt{1})(\sqrt{3}-\sqrt{1})}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}+$$

$$+\ldots+\frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{(\sqrt{121}+\sqrt{119})(\sqrt{121}-\sqrt{119})}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+$$

$$+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{121}-\sqrt{119})=\frac{1}{2}(\sqrt{121}-\sqrt{1})=\frac{1}{2}(11-1)=5.$$

Відповідь. 5.



3.3. Нехай $ABCD$ — прямокутна трапеція, що задана в умові; $\angle A=\angle D=90°$; $\angle C$ — гострий; $\angle ACD=\angle BCA$; $DC=9$ см; $AB=5$ см.

Оскільки $\angle DCA=\angle BAC$ (внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CD та січній AC), то $\angle BAC=\angle BCA$. Тому $\triangle ABC$ — рівнобедрений і $BC=AB=5$ см.

Проведемо висоту BK. Чотирикутник $ABKD$ є прямокутним і $DK=AB=5$ см. Тоді $KC=DC-DK=9-5=4$ (см).

У $\triangle BKC$: $BK=\sqrt{BC^2-KC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ (см).

Площа трапеції $S=\frac{AB+DC}{2}\cdot BK=\frac{5+9}{2}\cdot 3=21$ (см^2).

Відповідь. 21 см^2.

4.1^{м}. $x^2+\frac{x^2}{(2x+1)^2}=2$.

Виділимо квадрат різниці: $\left(x-\frac{x}{2x+1}\right)^2+2\cdot x\cdot\frac{x}{2x+1}=2$;

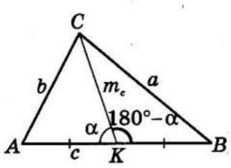
$\left(\frac{2x^2+x-x}{2x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{2x+1}=2$; $\left(\frac{2x^2}{2x+1}\right)^2+\frac{2x^2}{2x+1}-2=0$.

Заміна $\frac{2x^2}{2x+1}=t$. Тоді $t^2+t-2=0$; $t_1=1$; $t_2=-2$.

1) $\frac{2x^2}{2x+1}=1$; $\begin{cases}2x^2=2x+1,\\ x\neq-\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-2x-1=0,\\ x\neq-\frac{1}{2};\end{cases}$ $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

2) $\frac{2x^2}{2x+1}=-2$; $\begin{cases}2x^2=-4x-2,\\ x\neq-\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+2x+1=0,\\ x\neq-\frac{1}{2};\end{cases}$ $x_3=-1$.

Відповідь. $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$; $x_3=-1$.



4.2^{м}. Нехай ABC — даний трикутник; $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$; CK — медіана, $CK=m_c$. Позначимо $\angle CKA=\alpha$, тоді $\angle CKB=180°-\alpha$.

У $\triangle ACK$:

$b^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m_c^2-2\cdot\frac{c}{2}\cdot m_c\cos\alpha$;

у $\triangle CKB$: $a^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+m_c^2-2\cdot\frac{c}{2}\cdot m_c\cos(180°-\alpha)$.

Складемо останні дві рівності почленно і врахуємо, що $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$. Маємо $a^2+b^2=2\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+m_c^2\right)$, що й треба було довести.

Варіант 5

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Г	В	Б	В	Г	В	Б	Г	В	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{84}{125}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-5}$	1; 2	(–4; 0)

3.1. Нехай швидкість течії — x км/год. Тоді швидкість човна за течією дорівнює $(18+x)$ км/год, а проти течії — $(18-x)$ км/год. 30 км за течією човен пропливає за $\frac{30}{18+x}$ год, а 16 км проти течії – за $\frac{16}{18-x}$ год. За умовою $\frac{30}{18+x}+\frac{16}{18-x}=2,5$.

Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{540-30x+288+16x}{(18+x)(18-x)}=2,5$;

$828-14x=2,5(324-x^2)$; $2,5x^2-14x+18=0$; $x_1=3,6$; $x_2=2$. Обидва корені задовольняють умову. Отже, швидкість течії 3,6 км/год або 2 км/год.

Відповідь. 3,6 км/год або 2 км/год.

3.2. $\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^2+2+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2}=$

$=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^2+2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2}=$

$=\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2}{1^2-(\sqrt{2})^2}\right|=\left|\frac{6}{-1}\right|=6.$

Відповідь. 6.

3.3. Нехай коло із центром у точці O вписане в рівнобедрений трикутник ABC, у якого $AB=BC$. BK — висота трикутника.

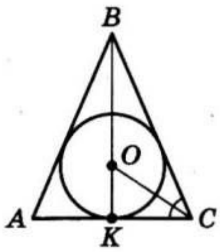
Оскільки CO — бісектриса $\triangle BKC$, то $\frac{CK}{CB}=\frac{KO}{BO}$. Оскільки $CK<CB$, то й $KO<BO$. Тому, виходячи з умови, $KO=5$ см, $BO=13$ см, тоді $BK=5+13=18$ (см).

Також маємо $\frac{CK}{CB}=\frac{5}{13}$. Позначимо $CK=5x$; $CB=13x$. Тоді периметр трикутника $P=2(5x+13x)=36x$.

У $\triangle BKC$: $BC^2=BK^2+KC^2$;

$(13x)^2=18^2+(5x)^2$; $(12x)^2=18^2$; $12x=18$; $x=1,5$.

Отже, $P=36\cdot1,5=54$ (см).



Відповідь. 54 см.

4.1[м]. $\begin{cases}(m+1)x+y=3,\\2x-(m-2)y=6.\end{cases}$

Дана система не має розв'язків у тому випадку, коли $\frac{m+1}{2}=\frac{1}{-(m-2)}$ і $\frac{m+1}{2}\neq\frac{3}{6}$.

Отже, маємо: $\begin{cases}-(m^2-2m+m-2)=2,\\m+1\neq1;\end{cases}$ $\begin{cases}m(m-1)=0,\\m\neq0;\end{cases}$ $m=1$.

Відповідь. $m=1$.

4.2[м]. Позначимо $\alpha=120°$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Маємо $|4\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(4\vec{a}+3\vec{b})^2}=\sqrt{16\vec{a}^2+24\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^2}=$

$=\sqrt{16|\vec{a}|^2+24|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha+9|\vec{b}|^2}=\sqrt{16\cdot3^2+24\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+9\cdot2^2}=$

$=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Відповідь. $6\sqrt{3}$.

Варіант 6

3.1. Нехай перше з невідомих чисел дорівнює x, а друге — y. Тоді, за умовою, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=2$. Після зменшення першого числа на його четверту частину матимемо: $x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x$, а після збільшення другого на його шосту частину отримаємо: $y+\frac{1}{6}y=\frac{7}{6}y$. За умовою, $\frac{3}{4}x+\frac{7}{6}y=53$.

Отримали систему $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=2,\\ \frac{3}{4}x+\frac{7}{6}y=53.\end{cases}$

Розв'яжемо її. Після множення лівої і правої частин першого рівняння на 6, а другого — на 12 матимемо:

$$\begin{cases}3x-2y=12,\\ 9x+14y=53\cdot 12.\end{cases}$$

Домножимо перше рівняння системи на 7 і використаємо спосіб додавання:

$$+\begin{cases}3x-2y=12,\\ 9x+14y=53\cdot 12.\end{cases}$$
$$30x=60\cdot 12.$$

Звідси $x=24$, тоді $3\cdot 24-2y=12$; $2y=60$; $y=30$.

Отже, шукані числа — 24 і 30.

Відповідь. 24 і 30.

3.2. $\frac{1}{x^2-2x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{12}{x^3+x^2-9x-9}$.

Оскільки $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ і $x^3+x^2-9x-9=x^2(x+1)-9(x+1)=(x+1)(x^2-9)=(x+1)(x-3)(x+3)$, маємо:

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)}+\frac{1}{x+3}=\frac{12}{(x+1)(x-3)(x+3)};$$

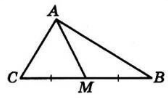
$$\frac{x+3+(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+3)}=\frac{12}{(x+1)(x-3)(x+3)}.$$

Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases}x+3+x^2+x-3x-3=12,\\ x\neq -1,\\ x\neq 3,\\ x\neq -3;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-x-12=0,\\ x\neq -1,\\ x\neq 3,\\ x\neq -3.\end{cases}$$

Рівняння $x^2-x-12=0$ має корені $x_1=-3$ і $x_2=4$, але лише другий задовольняє початкове рівняння.

Відповідь. $x=4$.



3.3. Нехай ABC — заданий в умові трикутник, $AC=7$ см; $AB=11$ см. AM — медіана трикутника. Позначимо $AM=x$, тоді, за умовою, $BC=x+8$.

За формулою медіани: $AM^2=\frac{1}{4}(2AC^2+2AB^2-BC^2)$ маємо:

$x^2=\frac{1}{4}(2\cdot 7^2+2\cdot 11^2-(x+8)^2)$; $4x^2=340-(x^2+16x+64)$; $5x^2+16x-276=0$.

Ураховуючи, що $x>0$, маємо: $x=6$. Тоді $BC=6+8=14$ (см).

Відповідь. 14 см.

4.1м. *Доведення.* За умовою, $\frac{a+b}{2}=m\sqrt{ab}$, тому $a+b=2m\sqrt{ab}$. Поділимо обидві частини одержаної рівності на $b\neq 0$. Маємо: $\frac{a}{b}+1=2m\sqrt{\frac{a}{b}}$. Позначимо $\sqrt{\frac{a}{b}}=t$. Оскільки $a>b$, то $t>1$. Маємо рівняння для t: $t^2-2mt+1=0$.

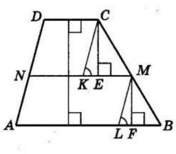
Звідси $t_{1,2}=\frac{2m\pm 2\sqrt{m^2-1}}{2}$; $t_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-1}$.

1) $t_1=m-\sqrt{m^2-1}$. Порівняємо t_1 з одиницею. Припустимо, що $t_1>1$, тобто $m-\sqrt{m^2-1}>1$; $m-1>\sqrt{m^2-1}$. Звідси матимемо: $m^2-2m+1>m^2-1$; $m<1$. Проте з умови зрозуміло, що $m>1$. Отже, t_1 — не підходить.

2) $t_2=m+\sqrt{m^2-1}$ (бо $m>1$). Тоді $\sqrt{\frac{a}{b}}=m+\sqrt{m^2-1}$. Звідси

$$\frac{a}{b}=(m+\sqrt{m^2-1})^2=\frac{(m+\sqrt{m^2-1})[(m+\sqrt{m^2-1})(m-\sqrt{m^2-1})]}{m-\sqrt{m^2-1}}=$$

$$=\frac{(m+\sqrt{m^2-1})(m^2-(\sqrt{m^2-1})^2)}{m-\sqrt{m^2-1}}=\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}},$$ що й треба було довести.



4.2м. Нехай $ABCD$ — трапеція, що задана в умові; $AB=a$ і $DC=b$ — основи трапеції. Покладемо, для визначеності, $BC>AD$. MN — відрізок, що ділить трапецію на дві рівновеликі фігури. Проведемо $CK\parallel DN$ і $ML\parallel NA$. Позначимо шуканий відрізок $MN=x$. Маємо $S_{DNMC}=S_{NMBA}$;

$\frac{b+x}{2}\cdot CE=\frac{a+x}{2}\cdot MF$, де CE і MF — висоти відповідних трапецій, а також відповідно $\triangle CKM$ і $\triangle MLB$. Звідси маємо:

$$\frac{CE}{MF}=\frac{x+a}{x+b}. \qquad (1)$$

$\triangle CKM\sim\triangle MLB$ (за двома кутами). Тому $\frac{CE}{MF}=\frac{KM}{LB}$. Проте $KM=NM-NK=x-b$; $LB=AB-AL=a-x$. Тоді

$$\frac{CE}{MF}=\frac{x-b}{a-x}. \qquad (2)$$

Порівнюючи праві частини (1) і (2), ліві частини яких рівні між собою, маємо:

$\frac{x+a}{x+b}=\frac{x-b}{a-x}$; $a^2-x^2=x^2-b^2$; $2x^2=a^2+b^2$;

$x^2=\frac{a^2+b^2}{2}$; $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Відповідь. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	В	Г	Г	В	Б	В	Б	Б	Б	А	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
$x=3$	6,5	4 цукерки	78 см^2

Варіант 7

3.1. Нехай перший оператор, працюючи самостійно, може набрати рукопис за x год, тоді другий оператор може це зробити за $(x+3)$ год. За одну годину перший оператор набере $\frac{1}{x}$ частину рукопису, а другий — $\frac{1}{x+3}$ частину рукопису. За 3 години роботи перший оператор набрав $\frac{3}{x}$ частину рукопису, а за 2 години роботи другий оператор набрав $\frac{2}{x+3}$ частини рукопису. За умовою, $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+3}=\frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{3(x+3)+2x}{x(x+3)}=\frac{1}{2}$;

$2(5x+9)=x(x+3)$; $x^2-7x-18=0$; $x_1=9$; $x_2=-2$. Другий корінь не задовольняє умову задачі.

Отже, перший оператор, працюючи самостійно, може набрати рукопис за 9 год, а другий — за 12 год.

Відповідь. 9 год; 12 год.

3.2. Нехай у коробці x червоних ручок. Тоді ймовірність того, що навмання витягнуто червону ручку, дорівнює $\frac{x}{6+x}$.

За умовою $0,4<\frac{x}{6+x}<0,6$.

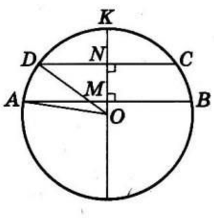
Оскільки $6+x>0$, то маємо

$\begin{cases}0,4(6+x)<x,\\ x<0,6(6+x);\end{cases}$ $\begin{cases}2,4+0,4x<x,\\ x<3,6+0,6x;\end{cases}$ $\begin{cases}0,6x>2,4,\\ 0,4x<3,6;\end{cases}$ $\begin{cases}x>4,\\ x<9.\end{cases}$

Враховуючи, що $x\in N$, маємо = 5; 6; 7; 8.

Відповідь. 5; 6; 7 або 8.

3.3. Нехай AB і DC — паралельні хорди кола із центром у точці O; $AB=32$ см; $DC=24$ см.



Нехай радіус OK, перпендикулярний до даних хорд, перетинає хорду AB у точці M, а DC — у точці N.

Тоді $MN=4$ см (за умовою). За властивістю хорди, перпендикулярної до діаметра: $AM=MB=\frac{32}{2}=16$ (см); $DN=NC=\frac{24}{2}=12$ (см).

Позначимо $OA=OD=r$ — радіус кола; $OM=x$.

У $\triangle AOM$: $AO^2=AM^2+OM^2$; $r^2=16^2+x^2$;

у $\triangle DON$: $OD^2=ON^2+ND^2$; $r^2=(x+4)^2+12^2$.

Тоді $16^2+x^2=(x+4)^2+12^2$; $256+x^2=x^2+8x+16+144$; $8x=96$; $x=12$.

Отже, маємо $r=\sqrt{16^2+12^2}=20$ (см).

Відповідь. 20 см.

4.1ᵐ. Маємо: $\begin{cases}\frac{(y+x)^2-2xy}{x+y}=\frac{10}{3},\\ \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-\frac{2xy}{x+y}=\frac{10}{3},\\ \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{4}.\end{cases}$

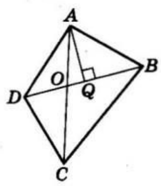
Заміна: $x+y=u$, $xy=v$.

Тоді $\begin{cases}u-\frac{2v}{u}=\frac{10}{3},\\ \frac{u}{v}=\frac{3}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}u-\frac{2}{\frac{u}{v}}=\frac{10}{3},\\ \frac{u}{v}=\frac{3}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}u-\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{10}{3},\\ v=\frac{4}{3}u;\end{cases}$ $\begin{cases}u=6,\\ v=8.\end{cases}$

Тоді $\begin{cases}x+y=6,\\ xy=8.\end{cases}$ Звідси пари (2; 4), (4; 2).

Відповідь. (2; 4), (4; 2).

4.2ᵐ. Нехай діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Нехай площа $\triangle COB$ — найбільша. Знайдемо її. Оскільки у $\triangle AOD$ і $\triangle AOB$ однакова висота AQ, то $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{OD}{OB}$. Аналогічно $\frac{S_{\triangle DOC}}{S_{\triangle COB}}=\frac{OD}{OB}$.



Тоді $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{S_{\triangle DOC}}{S_{\triangle COB}}$; $S_{\triangle AOD}\cdot S_{\triangle COB}=S_{\triangle DOC}\cdot S_{\triangle AOB}$.

Оскільки $S_{\triangle COB}$ — найбільша, то для виконання останньої рівності необхідно, щоб $S_{\triangle AOD}$ була найменша, тобто $S_{\triangle AOD}=2$ дм². Тоді $2\cdot S_{\triangle COB}=4\cdot 6$ і $S_{\triangle COB}=12$ (дм²). Остаточно маємо $S_{ABCD}=2+4+6+12=24$ (дм²).

Відповідь. 24 дм².

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	В	Г	А	Б	Г	В	Г	А	Б	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$x=2$	$y=-\frac{8}{x}$	180	60 см

Варіант 8

3.1. Нехай x км/год — власна швидкість човна, y км/год — швидкість течії. Тоді $(x+y)$ км/год — швидкість човна за течією і $(x-y)$ км/год — швидкість човна проти течії.

За умовою задачі $5(x+y)+2x=123$, тобто $7x+5y=123$ і $5(x+y)=3\cdot 2\cdot(x-y)$, тобто $5x+5y=6x-6y$; $x=11y$.

Маємо систему $\begin{cases} 7x+5y=123, \\ x=11y. \end{cases}$

Розв'яжемо її: $7\cdot 11y+5y=123$; $82y=123$; $y=1{,}5$ (км/год), тоді $x=16{,}5$ (км/год).

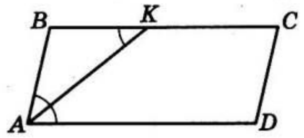
Отже, власна швидкість човна 16,5 км/год, швидкість течії — 1,5 км/год.

Відповідь. 16,5 км/год; 1,5 км/год.

3.2. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності: $(a-2)^2-5-2(a-6)=a^2-4a+4-5-2a+12=a^2-6a+11=$ $=a^2-6a+9+2=(a-3)^2+2$.

Оскільки $(a-3)^2 \geqslant 0$ для всіх a, то $(a-3)^2+2>0$ для всіх a, а тому $(a-2)^2-5>2(a-6)$ для всіх дійсних значень a, що й треба було довести.

3.3. Нехай $ABCD$ — даний в умові паралелограм. AK — бісектриса кута A, $K\in BC$. За умовою $BK:KC=3:4$. Позначимо $BK=3x$ см, $KC=4x$ см.



За умовою $\angle BAK=\angle KAD$. Крім того, $\angle BKA=\angle KAD$ (внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AK). Тому $\angle BAK=\angle BKA$, а отже, $\triangle ABK$ — рівнобедрений. $BA=BK=3x$ см.

Ураховуючи те, що периметр паралелограма дорівнює 80 см і $BC=BK+KC=3x+4x=7x$, маємо рівняння $2(3x+7x)=80$; $20x=80$; $x=4$ (см).

Тому $BA=3\cdot 4=12$ (см), $BC=7\cdot 4=28$ (см).

Відповідь. 12 см; 28 см.

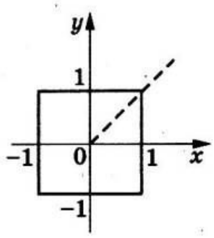
4.1^м. $|x-y|+|x+y|=2$.

Зазначимо, що коли точка $A(x_0;\ y_0)$ належить графіку функції, то точки $B(-x_0;\ y_0)$ і $C(x_0;\ -y_0)$ також належать графіку цієї функції. Дійсно, якщо $|x_0-y_0|+|x_0+y_0|=2$, то

$|-x_0-y_0|+|-x_0+y_0|=|-(x_0+y_0)|+|-(x_0-y_0)|=|x_0+y_0|+|x_0-y_0|=2;$

$|x_0-(-y_0)|+|x_0-y_0|=|x_0+y_0|+|x_0-y_0|=2.$

Це означає, що шуканий графік симетричний відносно осей координат і для його побудови досить виконати побудову в I координатній чверті.



Розглянемо два випадки:

1) $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$; $x\geqslant y$. Тоді $|x-y|+|x+y|=2$; $x-y+x+y=2$; $x=1$.

2) $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$; $x<y$. Тоді $-(x-y)+x+y=2$; $y=1$.

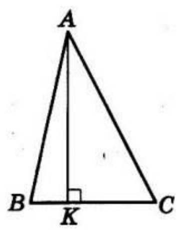
Графік зображено на малюнку.

4.2^м. Нехай задано $\triangle ABC$, у якого $AB=\sqrt{10}$ см; $AC=\sqrt{13}$ см; AK — висота; $AK=BC$.

Оскільки $\triangle ABC$ — гострокутний, то точка K належить відрізку BC. Позначимо $AK=BC=x$; $BK=y$. Тоді $KC=BC-BK=x-y$.

У $\triangle AKB$: $AB^2=BK^2+AK^2$; $10=x^2+y^2$;

у $\triangle AKC$: $AC^2=AK^2+KC^2$; $13=x^2+(y-x)^2$.



Маємо систему $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 2x^2-2xy^2+y^2=13. \end{cases}$

Заміна $y=tx$.

Тоді $\begin{cases} x^2(1+t^2)=10, \\ x^2(2-2t+t^2)=13; \end{cases}$ $\dfrac{1+t^2}{2-2t+t^2}=\dfrac{10}{13}$; $3t^2+20t-7=0$.

Ураховуючи, що $t>0$, маємо $t=\dfrac{1}{3}$, тоді $x^2=\dfrac{10}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$; $x^2=9$ і $x=3$ (см).

Відповідь. 3 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	А	Б	Б	А	Г	А	Б	Б	Г	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
4,25	–10	(0; 2), (–2; 0)	70°

Варіант 9

3.1. Нехай швидкість течії річки x км/год. Тоді швидкість рибалки проти течії дорівнює $(2{,}7 - x)$ км/год. Щоб подолати 3 км проти течії, рибалка витратив $\frac{3}{2{,}7 - x}$ год. Далі рибалка проплив 3 км зі швидкістю течії і витратив на це $\frac{3}{x}$ год. За умовою, $\frac{3}{2{,}7-x}+\frac{3}{x}=4{,}5$, тобто $\frac{1}{2{,}7-x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{x+2{,}7-x}{x(2{,}7-x)}=\frac{3}{2}$; $2 \cdot 2{,}7 = 3x(2{,}7 - x)$;

$3x^2 - 8{,}1x + 5{,}4 = 0$; $x^2 - 2{,}7x + 1{,}8 = 0$.

Звідси $x = 1{,}5$ або $x = 1{,}2$.

Отже, швидкість течії 1,5 км/год або 1,2 км/год.

Відповідь. 1,5 км/год або 1,2 км/год.

3.2. $(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 1) = 3$. Уведемо заміну $x^2 + x = t$. Тоді $(t - 3)(t - 1) = 3$; $t^2 - 4t = 0$; $t(t - 4) = 0$. Отже, $t = 0$ або $t = 4$.

1) $t = 0$. Тоді $x^2 + x = 0$; $x(x + 1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

2) $t = 4$. Тоді $x^2 + x = 4$; $x^2 + x - 4 = 0$; $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Відповідь. 0; -1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

3.3. Знайдемо довжини сторін трикутника:

$KL=\sqrt{(6-(-4))^2+(-4-16)^2}=\sqrt{10^2+20^2}=\sqrt{500}$;

$LM=\sqrt{(3-6)^2+(-5-(-4))^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$;

$KM=\sqrt{(3-(-4))^2+(-5-16)^2}=\sqrt{7^2+21^2}=\sqrt{490}$.

Оскільки $KL^2 = LM^2 + KM^2$ (бо $(\sqrt{500})^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{490})^2$), то $\triangle KLM$ — прямокутний з гіпотенузою KL.

Центр кола, описаного навколо цього трикутника, — середина гіпотенузи, тобто точка $Q\left(\frac{-4+6}{2};\ \frac{16-4}{2}\right)$, або $Q(1;\ 6)$.

Радіус кола $r=\frac{KL}{2}=\frac{\sqrt{500}}{2}=\frac{10\sqrt{5}}{2}=5\sqrt{5}$. Рівняння описаного кола $(x-1)^2+(y-6)^2=(5\sqrt{5})^2$, тобто $(x-1)^2+(y-6)^2=$ $=125$.

Відповідь. $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 125$.

4.1м. *Доведення.* Розглянемо різницю лівої і правої частин:

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{4(a^3+b^3)-(a+b)^3}{8}=$$

$$=\frac{4(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)^3}{8}=$$

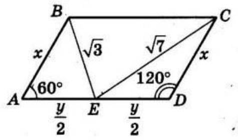
$$=\frac{(a+b)(4a^2-4ab+4b^2-a^2-2ab-b^2)}{8}=$$

$$=\frac{(a+b)(3a^2-6ab+3b^2)}{8}=\frac{3(a+b)(a-b)^2}{8}.$$

Оскільки $a > 0$, $b > 0$, то $a + b > 0$, $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Тоді $\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{3(a+b)(a-b)^2}{8}\geqslant 0$, а тому $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, що й треба було довести.

4.2м. Нехай $ABCD$ — паралелограм, про який іде мова в задачі. $\angle A = 60°$, тоді $\angle D = 120°$.



Позначимо $AB = CD = x$; $AD = y$.

Тоді $AE = ED = \frac{y}{2}$.

За теоремою косинусів:

у $\triangle ABE$: $(\sqrt{3})^2=x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{y}{2}\cdot\cos 60°$;

$12 = 4x^2 + y^2 - 2xy$;

у $\triangle CDE$: $(\sqrt{7})^2=x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{y}{2}\cdot\cos 120°$;

$28 = 4x^2 + y^2 + 2xy$.

Маємо систему $\begin{cases}4x^2+y^2-2xy=12,\\4x^2+y^2+2xy=28.\end{cases}$

Додаючи ці рівняння, матимемо:

$2(4x^2 + y^2) = 40$; $4x^2 + y^2 = 20$.

Якщо перше рівняння домножити на (-1) і додати до другого, то матимемо: $4xy = 16$; $xy = 4$. Звідси $y=\frac{4}{x}$.

Маємо $4x^2+\frac{16}{x^2}=20$; $\frac{4x^4-20x^2+16}{x^2}=0$; $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2}=0$.

Замінимо $x^2 = t$. Тоді $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 4$. Далі врахуємо, що $x > 0$ і $y > 0$.

1) $t = 1$; $x^2 = 1$; $x = 1$; $y=\frac{4}{1}$; $y = 4$.

2) $t = 4$; $x^2 = 4$; $x = 2$; $y=\frac{4}{2}$; $y = 2$.

Відповідь. 1 см і 4 см або 2 см і 2 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Б	Б	Б	А	В	А	Б	Б	Г	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{2}{y}$	2	$[-2;\ +\infty)$	60°

Варіант 10

3.1. Нехай x км/год — швидкість потяга за розкладом. Перегон завдовжки 300 км він мав подолати за $\frac{300}{x}$ год. Після збільшення його швидкість стала дорівнювати $(x+10)$ км/год, а перегон він подолав за $\frac{300}{x+10}$ год. За умовою $\frac{300}{x}-\frac{300}{x+10}=1$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{300x+3000-300x}{x(x+10)}=1$; $x^2+10x-3000=0$; $x_1=50$; $x_2=-60$.

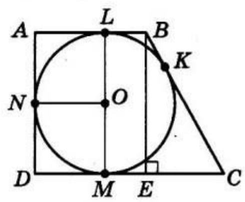
Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість потяга за розкладом 50 км/год, а подолати перегон він мав за $\frac{300}{50}=6$ (год).

Відповідь. 6 год.

3.2. Маємо $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$; $((a+c)+b)((a+c)-b)=$ $=a^2+b^2+c^2$; $(a+c)^2-b^2=a^2+b^2+c^2$; $a^2+2ac+c^2-b^2=a^2+b^2+c^2$; $2ac=2b^2$; $ac=b^2$.

Тому a, b, c — послідовні члени геометричної прогресії.

3.3. У прямокутну трапецію з основами AB і CD вписано коло. Точки K, L, N і M — точки дотику кола сторін BC, AB, AD і DC відповідно. За умовою $BK=8$ см; $KC=18$ см.



За властивістю дотичних, $BL=BK=8$ см; $MC=CK=18$ см.

Проведемо ML і висоту трапеції BE. $ALMD$ і $LMEB$ — прямокутники.

$ME=LB=8$ см; $EC=MC-ME=18-8=10$ (см); $BC=BK+KC=$ $=8+18=26$ (см).

У $\triangle BEC$: $BE=\sqrt{BC^2-EC^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$ (см), а $AD=$ $=LM=BE=24$ (см). Тоді радіус вписаного кола $r=\frac{24}{2}=12$ (см).

$ONAL$ — квадрат; $NA=AL=r=12$ см, аналогічно $DN=DM=$ $=12$ см. Тоді $DC=12+18=30$ (см), $AB=12+8=20$ (см).

Отже, периметр трапеції $P=20+30+24+26=100$ (см).

Відповідь. 100 см.

4.1[м]. $\frac{\sqrt{m-2\sqrt{m-2}-1}}{\sqrt{m-2}-1}+1=\frac{\sqrt{m-2-2\sqrt{m-2}+1}}{\sqrt{m-2}-1}+1=$

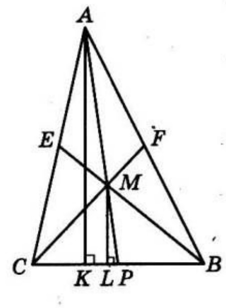
$=\frac{\sqrt{(\sqrt{m-2})^2-2\sqrt{m-2}\cdot 1+1^2}}{\sqrt{m-2}-1}+1=\frac{\sqrt{(\sqrt{m-2}-1)^2}}{\sqrt{m-2}-1}+1=$

$=\frac{|\sqrt{m-2}-1|}{\sqrt{m-2}-1}+1.$

Оскільки $m=2{,}98$, то $0<\sqrt{m-2}<1$, тому $\sqrt{m-2}-1<0$ і $|\sqrt{m-2}-1|=-(\sqrt{m-2}-1)$. Маємо $\frac{-(\sqrt{m-2}-1)}{\sqrt{m-2}-1}+1=-1+1=0$.

Відповідь. 0.

4.2[м]. BE і CF — медіани $\triangle ABC$, $BC=10$ см; $BE=9$ см; $CF=12$ см. Знайдемо площу $\triangle CMB$, де M — точка перетину медіан. Маємо:



$BM=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}\cdot 9=6$ (см);

$CM=\frac{2}{3}CF=\frac{2}{3}\cdot 12=8$ (см).

$\triangle CMB$ — прямокутний, оскільки $6^2+8^2=10^2$; $\angle CMB=90°$.

$S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ (см^2).

Нехай AP — третя медіана $\triangle ABC$, AK — висота трикутника ABC, ML — висота трикутника CMB. Оскільки $MP:AP=1:3$, то $ML:AK=1:3$, а тому $\frac{S_{\triangle CMB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{3}$. Тому $S_{\triangle ABC}=3\cdot 24=72$ (см^2).

Відповідь. 72 см^2.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	А	Г	В	А	В	Б	Г	А	Б	В	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{y-x}{xy}$	$-\sqrt{3}$	2; 3; 4	6 см; 4 см

Варіант 11

3.1. Нехай x км/год — швидкість другого автомобіля, тоді $(x+10)$ км/год — швидкість першого. Другий автомобіль затратив на весь шлях $\frac{560}{x}$ год, а перший — $\frac{560}{x+10}$ год. За умовою, $\frac{560}{x}-\frac{560}{x+10}=1$.

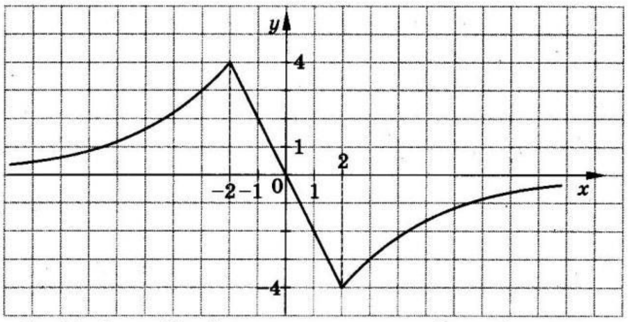
Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{560x+5600-560x}{x(x+10)}=1$; $x^2+10x-5600=0$; $x_1=70$; $x_2=-80$.

Другий корінь не задовольняє умову. Отже, 70 км/год — швидкість другого автомобіля і 80 км/год — першого.

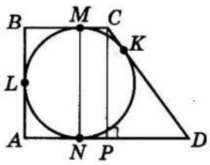
Відповідь. 80 км/год; 70 км/год.

3.2. Графіком функції $y=-\frac{8}{x}$ є гіпербола, розташована у II та IV координатних чвертях, а графіком функції $y=-2x$, де $-2<x<2$, є пряма, що проходить через точки $(1; -2)$ і $(-1; 2)$.



Графік функції зображено на малюнку. Функція зростає на проміжках $(-\infty; -2]$ і $[2; +\infty)$, найбільше значення функції дорівнює 4.

Відповідь. Зростає на $(-\infty; -2]$ і $[2; +\infty)$, найбільше значення дорівнює 4.



3.3. Нехай коло вписане у прямокутну трапецію $ABCD$, у якої $\angle A=\angle B=90°$. Точки K, M, L і N — точки дотику кола відповідно до сторін CD, CB, BA і AD. $CK=4$ см, $KD=25$ см (за умовою). $DC=4+25=29$ (см).

За властивістю дотичних $CM=CK=4$ см, $DN=DK=25$ см.

Проведемо MN і висоту CP. Оскільки $MN\perp AD$, $MN \parallel CP$, то $MCPN$ — прямокутник. $NP=MC=4$ см; $DP=DN-NP=25-4=21$ (см).

У $\triangle CPD$: $CP=\sqrt{CD^2-DP^2}=\sqrt{29^2-21^2}=20$ (см).

Оскільки MN — діаметр кола і $MN=CP=20$ см, то радіус кола $r=BL=LA=\frac{20}{2}=10$ (см).

За властивістю дотичних, $BM=BL=10$ см і $AN=AL=10$ см. Тоді $AD=10+25=35$ (см), $BC=10+4=14$ (см) і площа трапеції $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot CP=\frac{35+14}{2}\cdot 20=490$ (см^2).

Відповідь. 490 см^2.

4.1ᵐ. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)=7$. Згрупуємо:

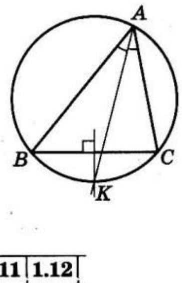
$((x+1)(x-4))((x-1)(x-2))=7$; $(x^2-3x-4)(x^2-3x+2)=7$.

Позначимо $x^2-3x=t$. Тоді маємо: $(t-4)(t+2)=7$; $t^2-2t-15=0$; $t_1=-3$; $t_2=5$.

1) $x^2-3x=-3$; $x^2-3x+3=0$, рівняння не має розв'язків.

2) $x^2-3x=5$; $x^2-3x-5=0$; $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+20}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$.

Відповідь. $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$.



4.2ᵐ. Нехай серединний перпендикуляр до сторони BC перетинає описане коло в точці K. Тоді $\cup BK=\cup KC$.

Тому $\angle BAK=\angle KAC$, а отже, AK — бісектриса кута BAC.

Отже, точка K — точка перетину бісектриси кута A трикутника ABC і серединного перпендикуляра до сторони BC — належить колу, описаному навколо трикутника ABC. Доведено.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	Г	Б	В	В	Б	А	Б	Г	В	В

2.1	2.2	2.3	2.4
17	(1; –1), (–5; 5)	$\frac{1}{6}$	16π см

Варіант 12

3.1. Нехай початкова ціна футбольного м'яча x грн, а волейбольного — y грн. За умовою, $4x + 3y = 320$.

Після того як футбольний м'яч подешевшав на 20 %, він став коштувати $x - 0,2x = 0,8x$. Після того як волейбольний м'яч подорожчав на 5 %, він став коштувати $y + 0,05y = 1,05y$. За умовою, $2 \cdot 0,8x + 1,05y = 122$.

Маємо систему $\begin{cases} 4x + 3y = 320, \\ 1,6x + 1,05y = 122. \end{cases}$

Розв'яжемо отриману систему. З першого рівняння маємо $4x = 320 - 3y$; $x = 80 - 0,75y$. Підставимо у друге рівняння $1,6(80 - 0,75y) + 1,05y = 122$; $128 - 1,2y + 1,05y = 122$; $0,15y = 6$. Звідси $y = 40$, $x = 80 - 0,75 \cdot 40$; $x = 50$.

Отже, початкова ціна футбольного м'яча була 50 грн, а волейбольного — 40 грн.

Відповідь. 50 грн; 40 грн.

3.2. Виконаємо спрощення виразу за діями:

1) $\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x-2)^2} =$

$= \frac{(x-2)^2 - 2(x-2)(x+2) + (x+2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{(x-2-(x+2))^2}{(x-2)^2(x+2)^2} =$

$= \frac{16}{(x-2)^2(x+2)^2}.$

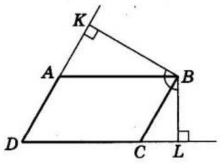
2) $\frac{(x+2)^4}{16} \cdot \frac{16}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}.$

3) $\frac{8x}{(x-2)^2} - \frac{(x+2)^2}{(x-2)^2} = \frac{8x-(x^2+4x+4)}{(x-2)^2} = \frac{8x-x^2-4x-4}{(x-2)^2} =$

$= \frac{-x^2+4x-4}{(x-2)^2} = \frac{-(x^2-4x+4)}{x^2-4x+4} = -1.$

Відповідь. -1.

3.3. Нехай $ABCD$ — заданий паралелограм; $\angle D : \angle A = 2 : 3$.



Позначимо $\angle D = 2x$ і $\angle A = 3x$. Тоді $2x + 3x = 180°$; $5x = 180°$; $x = 36°$. Тому $\angle D = 2 \cdot 36° = 72°$.

З вершини гострого кута B паралелограма $ABCD$ проведено висоти BK і BL. Тоді в чотирикутнику $DKBL$ відомі кути: $\angle K = \angle L = 90°$ і $\angle D = 72°$.

Тому

$\angle KBL = 360° - (2 \cdot 90° + 72°) = 108°$.

Відповідь. 108°.

4.1[м]. $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$. Нехай $x + \frac{1}{x} = t$.

Тоді $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, а тому $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

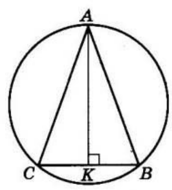
Маємо $7t - 2(t^2 - 2) = 9$; $2t^2 - 7t + 5 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 2,5$.

1) $x + \frac{1}{x} = 1$. Оскільки відомо, що $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$, то рівняння $x + \frac{1}{x} = 1$ не має розв'язків.

2) $x + \frac{1}{x} = 2,5$; $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$; $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$.

Відповідь. 2; $\frac{1}{2}$.

4.2[м]. Нехай у коло вписано рівнобедрений трикутник ABC, у якого бічна сторона вдвічі більша за основу. Тому позначимо $AB = AC = 2x$; $CB = x$.



Проведемо AK — медіану і висоту трикутника.

Тоді $CK = \frac{CB}{2} = \frac{x}{2}$.

У $\triangle ACK$ ($\angle K = 90°$): $\cos C = \frac{CK}{AC}$; $\cos C = \frac{\frac{x}{2}}{2x} = \frac{1}{4}$.

Тоді $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Відомо, що $AB = 2R\sin C$; $AB = 2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 4\sqrt{15}$ (см). Тоді $CB = 2\sqrt{15}$ (см).

Знайдемо добуток $Rr = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = \frac{abc}{4p}$. Звідси $r = \frac{abc}{4pR}$.

Маємо: $p = \frac{2AB + CB}{2} = AB + \frac{CB}{2} = 4\sqrt{15} + \sqrt{15} = 5\sqrt{15}$ (см).

Тоді $r = \frac{4\sqrt{15} \cdot 4\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{15}}{4 \cdot 5\sqrt{15} \cdot 8} = 3$ (см).

Відповідь. 3 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	В	Г	Б	В	А	А	В	В	Г	А	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
$x = 7$	$k = 0,5$; $b = -2$	21	3 см; 8 см

Варіант 13

3.1. Нехай другий оператор набирає щогодини по x сторінок, тоді перший оператор щогодини набирає по $(x+1)$ сторінці. На набір рукопису зі 120 сторінок перший оператор витратив $\frac{120}{x+1}$ год, а на набір рукопису зі 100 сторінок другий оператор витратив $\frac{100}{x}$ год. За умовою, $\frac{120}{x+1}+1=\frac{100}{x}$.

Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{120}{x+1}+1-\frac{100}{x}=0$;

$\frac{120x+x(x+1)-100(x+1)}{x(x+1)}=0$; $\frac{120x+x^2+x-100x-100}{x(x+1)}=0$;

$x^2+21x-100=0$; $x_1=4$; $x_2=-25$.

Другий корінь не підходить за умовою задачі.

Отже, другий оператор щогодини набирав по 4 сторінки, а перший оператор — по 5 сторінок.

Відповідь. 5 с./год; 4 с./год.

3.2. Нехай у коробці є x чорних кульок. Тоді ймовірність витягнути навмання чорну кульку з коробки дорівнює $\frac{x}{x+10}$.

За умовою, $0,4<\frac{x}{x+10}<0,5$.

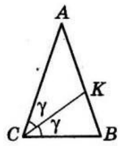
Оскільки $x+10>0$, то можна домножити на $x+10$. Маємо: $0,4(x+10)<x<0,5(x+10)$;

$\begin{cases}0,4x+4<x,\\ x<0,5x+5;\end{cases}$ $\begin{cases}0,6x>4,\\ 0,5x<5;\end{cases}$ $\begin{cases}x>6\frac{2}{3},\\ x<10.\end{cases}$

Оскільки x — натуральне число, то $x=7$, або $x=8$, або $x=9$. Отже, у коробці може бути 7, 8 або 9 чорних кульок.

Відповідь. 7, 8 або 9.

3.3. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник. $AB=AC=20$ см; $BC=5$ см; CK — бісектриса трикутника.



За властивістю бісектриси, $\frac{AC}{BC}=\frac{AK}{KB}$.

Позначимо $AK=x$, тоді $KB=20-x$. Маємо:

$\frac{20}{5}=\frac{x}{20-x}$; $400-20x=5x$; $25x=400$; $x=16$ (см).

Отже, $AK=16$ см, $KB=4$ см.

Позначимо $CK=y$; $\angle ACK=\angle KCB=\gamma$. Тоді у $\triangle ACK$: $\cos\gamma=\frac{AC^2+CK^2-AK^2}{2\cdot AC\cdot CK}$; у $\triangle KCB$: $\cos\gamma=\frac{CK^2+CB^2-KB^2}{2\cdot CK\cdot CB}$.

Маємо: $\frac{20^2+y^2-16^2}{2\cdot 20\cdot y}=\frac{y^2+5^2-4^2}{2\cdot y\cdot 5}$; $y^2+144=4(y^2+9)$; $y^2=36$; $y=6$ (см).

Відповідь. 6 см.

4.1м. Розв'яжемо спочатку рівняння $x^3-x^2-15x-9=0$. Будемо шукати цілі корені рівняння серед дільників числа -9: ±1; ±3; ±9. Знаходимо, що $x=-3$ — корінь (оскільки $(-3)^3-(-3)^2-15\cdot(-3)-9=0$).

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-15x-9 & x+3 \\ \hline x^3+3x^2 & x^2-4x-3 \\ -4x^2-15x & \\ -4x^2-12x & \\ -3x-9 & \\ -3x-9 & \\ 0 & \end{array}$$

Поділимо куточком $x^3-x^2-15x-9$ на $x+3$, отримаємо частку x^2-4x-3. Рівняння $x^2-4x-3=0$ має корені $x_{1,2}=2\pm\sqrt{7}$.

Отже, $x^3-x^2-15x-9=(x+3)(x-(2+\sqrt{7}))(x-(2-\sqrt{7}))=$
$=(x+3)(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})$.

Відповідь. $(x+3)(x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7})$.

4.2м. Нехай у паралелограмі $ABCD$: $AB=a$; $AD=b$; $BD=d_1$; $AC=d_2$; $\angle BAD=\varphi$ — гострий кут.

У $\triangle BAD$: $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi$;

у $\triangle ABC$: $d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\varphi)=$
$=a^2+b^2+2ab\cos\varphi$.

Перемножимо ліві та праві частини рівнянь почленно:

$d_1^2d_2^2=(a^2+b^2)^2-(2ab\cos\varphi)^2$; $d_1^2d_2^2=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2\cos^2\varphi$.

Але за умовою $d_1^2d_2^2=a^4+b^4$, тому

$a^4+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2\cos^2\varphi$; $2a^2b^2-4a^2b^2\cos^2\varphi=0$;

$2a^2b^2(1-2\cos^2\varphi)=0$; $\cos^2\varphi=\frac{1}{2}$.

Оскільки φ — гострий, $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, а тому $\varphi=45°$, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Г	Б	А	Г	В	Г	Б	В	Г	А	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
$-\frac{3}{xy}$	$p=2,5$; $x_2=-4$	(2; –1), (8; 11)	10 см

Варіант 14

3.1. Нехай перша бригада, працюючи самостійно, може зорати поле за x днів, тоді друга — за $(x-5)$ днів. За один день перша зоре $\frac{1}{x}$ частину роботи, а друга — $\frac{1}{x-5}$ частину роботи. За умовою $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}$.

Розв'яжемо це рівняння: $\frac{x-5+x}{x(x-5)}=\frac{1}{6}$; $6(2x-5)=x^2-5x$;

$x^2-17x+30=0$; $x_1=15$; $x_2=2$. Другий корінь не підходить. Отже, перша бригада, працюючи самостійно, може зорати поле за 15 днів, а друга — за 10 днів.

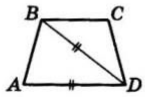
Відповідь. 15 днів; 10 днів.

3.2. Для того щоб нерівність $x^2-(2m+1)x+m^2>0$ виконувалася для всіх дійсних значень x, необхідно і достатньо, щоб парабола, що є графіком функції $y=x^2-(2m+1)x+m^2$, не перетинала осі x (див. малюнок), тобто при виконанні умови $D<0$.

Маємо $D=(-(2m+1))^2-4m^2=4m^2+4m+1-4m^2=4m+1$. Далі, $4m+1<0$; $m<-0{,}25$.

Відповідь. $m<-0{,}25$.

3.3. Нехай $ABCD$ — трапеція, що задана в умові. Діагональ BD розбиває її на рівнобедрені трикутники. Це можливо лише у випадку, коли $AB=BC=CD$ і $BD=AD$. Позначимо $\angle BAD=x$, тоді $\angle ABC=\angle BCD=180°-x$. Оскільки $AD=BD$, то $\angle ABD=\angle BAD=x$. Тоді $\angle DBC=(180°-x)-x=180°-2x$.



$\triangle BCD$ — рівнобедрений ($BC=CD$). Тому $\angle BDC=\angle DBC=180°-2x$.

У $\triangle BCD$: $180°-2x+180°-x+180°-2x=180°$; $5x=360°$; $x=72°$.

Отже, $\angle A=\angle ADC=72°$ і $\angle ABC=\angle BCD=180°-72°=108°$.

Відповідь. 72°, 108°.

4.1м. $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{xy}=\frac{80}{\sqrt{xy}},\\ x+y=20.\end{cases}$ З умови випливає, що $xy>0$.

Домножимо перше рівняння на $\sqrt{xy}\neq 0$. Маємо

$\sqrt{\frac{x}{y}\cdot xy}+xy=80$; $\sqrt{x^2}+xy=80$; $|x|+xy=80$.

Отже, $\begin{cases}|x|+xy=80,\\ y=20-x;\end{cases}$ $\begin{cases}|x|+x(20-x)=80,\\ y=20-x.\end{cases}$

1) Якщо $x>0$, то $|x|=x$. Маємо $x+20x-x^2=80$; $x^2-21x-80=0$; $x_1=16$; $x_2=5$. Обидва корені задовольняють умову $x>0$. Тоді $y_1=20-16=4$; $y_2=20-5=15$. Кожна з пар (16; 4), (5; 15) задовольняє умову $xy>0$.

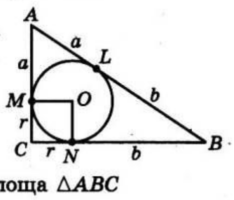
2) Якщо $x<0$, то $|x|=-x$. Маємо $-x+20x-x^2=80$; $x^2-19x+80=0$; $x_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{41}}{2}$.

Але $x_1=\frac{19+\sqrt{41}}{2}>0$ і $x_2=\frac{19-\sqrt{41}}{2}>0$.

Отже, у випадку $x<0$ система не має розв'язків.

Відповідь. (16; 4), (5; 15).

4.2м. На малюнку точки L, N, M — точки дотику кола відповідно до сторін AB, BC і CA. $AL=a$; $LB=b$ (за умовою). За властивістю дотичних, $AM=AL=a$; $BN=BL=b$.



Ураховуючи той факт, що $OMCN$ — квадрат, позначимо $CM=CN=r$. Тоді площа $\triangle ABC$

$S=\frac{1}{2}AC\cdot CB=\frac{1}{2}(a+r)(b+r)$.

У $\triangle ABC$, за теоремою Піфагора, $(a+r)^2+(b+r)^2=(a+b)^2$;

$a^2+2ar+r^2+b^2+2br+r^2=a^2+2ab+b^2$;

$r^2+ar+br=ab$;

$r^2+ar+br+ab=ab+ab$;

$r(r+a)+b(r+a)=2ab$;

$(r+a)(r+b)=2ab$.

Тому $S=\frac{1}{2}\cdot 2ab=ab$.

Відповідь. ab.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Г	Г	В	В	Г	Б	В	В	Г	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{1}{2}$	–6; –7	$p=2$; $q=-5$	45 см

Варіант 15

3.1. Нехай швидкість одного автомобіля — x км/год, тоді швидкість іншого — $(x-10)$ км/год. Один проїхав з міста в село за $\frac{450}{x}$ год, інший — за $\frac{450}{x-10}$ год. Ураховуючи те, що 30 хв $=\frac{1}{2}$ год, та умову задачі, маємо $\frac{450}{x-10}-\frac{450}{x}=\frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

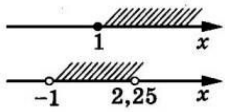
$\frac{450x-450x+4500}{x(x-10)}=\frac{1}{2}$; $x^2-10x-9000=0$; $x_1=100$; $x_2=-90$.

Другий корінь не задовольняє умову. Отже, швидкість одного автомобіля 100 км/год, а іншого — 90 км/год.

Відповідь. 100 км/год; 90 км/год.

3.2. Область допустимих значень функції знайдемо із системи: $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 5x+9-4x^2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ 4x^2-5x-9<0. \end{cases}$

$4x^2-5x-9=0$; $x_1=2,25$; $x_2=-1$.



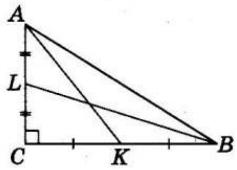
Розв'язком нерівності $4x^2-5x-9<0$ є множина $(-1;\ 2,25)$. Остаточно маємо, що областю допустимих значень функції є множина $[1;\ 2,25)$.

Відповідь. $[1;\ 2,25)$.

3.3. Нехай $AC=b$ і $BC=a$ — катети прямокутного трикутника; $AB=c$ — його гіпотенуза. Тоді $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

BL і AK — медіани. За умовою $BL=4$ см; $AK=3$ см.

У $\triangle AKC$: $AK^2=AC^2+CK^2$; $4^2=b^2+\frac{a^2}{4}$;



у $\triangle BCL$: $BL^2=LC^2+BC^2$; $3^2=\frac{b^2}{4}+a^2$.

Склавши ці рівності почленно, маємо $25=\frac{5}{4}(a^2+b^2)$, звідси $a^2+b^2=20$ і $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (см).

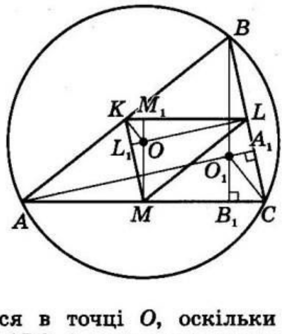
Відповідь. $2\sqrt{5}$ см.

4.1м. $(\sqrt{x-1}-a)(4x-5)=0$.

Рівняння рівносильне сукупності: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=a, \\ \begin{cases} 4x-5=0, \\ x-1\geqslant 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}=a, \\ x=\frac{5}{4}. \end{array}\right.$

Задане в умові рівняння має єдиний корінь, якщо рівняння $\sqrt{x-1}=a$ розв'язків не має, що досягається при $a<0$, або якщо коренем цього рівняння є число $\frac{5}{4}$. Це відбувається, коли $a=\sqrt{\frac{5}{4}-1}=\frac{1}{2}$.

Відповідь. $a<0$ або $a=\frac{1}{2}$.



4.2м. За умовою, у гострокутному $\triangle ABC$ проведено висоти AA_1 і BB_1, точка їхнього перетину O_1 — ортоцентр. Навколо трикутника описано коло із центром у точці O. Потрібно довести, що $O_1C=2OK$, де OK — відстань від точки O до сторони AB.

Проведемо середні лінії KL, LM і KM трикутника ABC. Отримаємо $\triangle KLM$, висоти якого перетинаються в точці O, оскільки вони перпендикулярні до сторін $\triangle ABC$ і проходять через точки K, L і M — середини цих сторін. $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ (бо $\frac{AB}{ML}=\frac{AC}{KL}=\frac{BC}{KM}=\frac{2}{1}$), а в подібних трикутниках відповідні елементи також пропорційні. Тому $\frac{AB}{ML}=\frac{O_1C}{OK}$, отже, $\frac{O_1C}{OK}=\frac{2}{1}$; $O_1C=2OK$, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	В	Б	В	Б	А	Г	Б	А	Б	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{1}{9}$	$\sqrt{3}$	$\left(\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{3}\right)$	$3x-y+7=0$

Варіант 16

3.1. Нехай x км/год — швидкість потяга за розкладом, тоді, ліквідуючи запізнення, він їхав зі швидкістю $(x+5)$ км/год. За розкладом перегон завдовжки 180 км потяг мав проїхати за $\frac{180}{x}$ год, а проїхав за $\frac{180}{x+5}$ год. Оскільки 24 хв $=\frac{24}{60}$ год $=\frac{2}{5}$ год, то, враховуючи умову задачі, маємо рівняння $\frac{180}{x}-\frac{180}{x+5}=\frac{2}{5}$, або $\frac{90}{x}-\frac{90}{x+5}=\frac{1}{5}$. Розв'яжемо це рівняння:

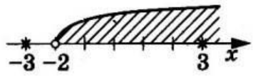
$$\frac{90x+450-90x}{x(x+5)}=\frac{1}{5};\ x^2+5x-2250=0;\ x_1=45;\ x_2=-50.$$

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість потяга за розкладом дорівнює 45 км/год.

Відповідь. 45 км/год.

3.2. Область визначення функції знайдемо із системи:

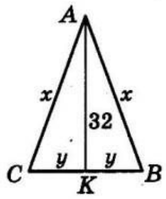
$$\begin{cases}2x+4>0,\\ |x|\neq 3;\end{cases}\quad \begin{cases}x>-2,\\ x\neq 3,\\ x\neq -3;\end{cases}$$



$x\in(-2;3)\cup(3;+\infty)$.

Відповідь. $(-2;3)\cup(3;+\infty)$.

3.3. Довжина кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 50π, з іншого боку, ця довжина дорівнює $2\pi R$, де R — радіус описаного кола. Маємо: $2\pi R=50\pi$; $R=25$ (см).



У $\triangle ABC$: $AC=AB$; AK — висота, медіана. Позначимо $AC=AB=x$ см, $CK=KB=y$ см. Тоді $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 32=32y$ (см²). За відомою формулою, $R=\frac{abc}{4S}$; $25=\frac{x\cdot x\cdot 2y}{4\cdot 32y}$; $x^2=25\cdot 16\cdot 4$; $x=40$.

Тоді у $\triangle AKC$:

$CK=\sqrt{AC^2-AK^2}=\sqrt{40^2-32^2}=24$ (см), $BC=2\cdot 24=48$ (см).

Периметр трикутника $P=2\cdot 40+48=128$ (см).

Відповідь. 128 см.

4.1ᵐ. Розв'яжемо рівняння $x^4-3x^3-6x^2+12x+16=0$.

Оскільки $\frac{16}{1}=\left(\frac{12}{-3}\right)^2$, то дане рівняння — зворотно-симетричне. $x=0$ не є коренем рівняння; розділимо ліву і праву частини рівняння на x^2. Маємо:

$$x^2-3x-6+\frac{12}{x}+\frac{16}{x^2}=0;\ \left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{4}{x}\right)-6=0.$$

Позначимо $x-\frac{4}{x}=t$. Тоді $t^2=x^2-8+\frac{16}{x^2}$; $x^2+\frac{16}{x^2}=t^2+8$.

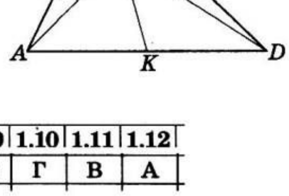
Отже, $t^2+8-3t-6=0$; $t^2-3t+2=0$; $t_1=1$; $t_2=2$.

1) $x-\frac{4}{x}=1$; $\begin{cases}x^2-x-4=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$ $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

2) $x-\frac{4}{x}=2$; $\begin{cases}x^2-8x-4=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$ $x_{3,4}=1\pm\sqrt{5}$.

Відповідь. $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$; $x_{3,4}=1\pm\sqrt{5}$.

4.2ᵐ. Нехай L — середина основи BC, а K — середина основи AD трапеції $ABCD$. При гомотетії із центром O і коефіцієнтом $k=-\frac{AD}{BC}$ трикутник AOD є образом трикутника COB. Звідси випливає, що точка K є образом точки L при цій гомотетії. А отже, точки L, O і K належать одній прямій, тобто $O\in LK$, що й треба було довести.



1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	Б	Б	В	Г	А	В	Б	В	Г	В	А

2.1	2.2	2.3	2.4
−9	$a=5$; $c=3$	0,7	4,8 см

Варіант 17

3.1. Нехай x км/год — швидкість першого туриста, а y км/год — другого. Тоді $2(x+y)=20$, а тому $x+y=10$.

Першому туристу, щоб подолати 20 км, потрібно $\frac{20}{x}$ год, а другому — $\frac{20}{y}$ год. Оскільки 1 год 40 хв$=1\frac{40}{60}$ год$=1\frac{2}{3}$ год$=\frac{5}{3}$ год, то маємо рівняння $\frac{20}{x}-\frac{20}{y}=\frac{5}{3}$, або $\frac{4}{x}-\frac{4}{y}=\frac{1}{3}$.

Маємо систему $\begin{cases} x+y=10, \\ \frac{4}{x}-\frac{4}{y}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

Розв'яжемо її: $x=10-y$; $\frac{4}{10-y}-\frac{4}{y}=\frac{1}{3}$; $\frac{4y-40+4y}{y(10-y)}=\frac{1}{3}$;

$3(8y-40)=10y-y^2$; $y^2+14y-120=0$; $y_1=6$; $y_2=-20$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Тоді $x=4$. Отже, швидкість першого туриста — 4 км/год, а другого — 6 км/год.

Відповідь. 4 км/год; 6 км/год.

3.2. Маємо

$\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{4+4\sqrt{7}+7}=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2}=\sqrt{(2+\sqrt{7})^2}$.

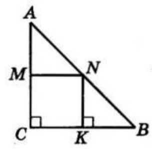
Тоді

$\sqrt{11+4\sqrt{7}}-\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}=\sqrt{(2+\sqrt{7})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}=\left|2+\sqrt{7}\right|-\left|1-\sqrt{7}\right|$.

Оскільки $1-\sqrt{7}<0$, $\left|1-\sqrt{7}\right|=-(1-\sqrt{7})$.

Остаточно отримаємо $2+\sqrt{7}+1-\sqrt{7}=3$.

Відповідь. 3.



3.3. На малюнку квадрат $CMNK$ вписано у прямокутний трикутник ABC вказаним способом; $AC=BC=6$ см (за умовою). Позначимо сторону квадрата $CK=KN=x$.

У $\triangle KNB$: $\angle K=90°$; $\angle B=45°$ (оскільки $\triangle ABC$ — прямокутний, рівнобедрений). Тому $\angle KNB=180°-(90°+45°)=45°$. Отже, $\triangle KNB$ — рівнобедрений і $KB=KN=x$.

Тоді $CK+KB=CB$; $2x=6$; $x=3$ (см). Отже, сторона квадрата дорівнює 3 см. Тоді його площа $S=3^2=9$ (см^2).

Відповідь. 9 см^2.

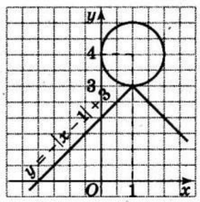
4.1м. Використаємо графічний метод.

1) $x^2+y^2-2x-8y+16=0$;

$(x^2-2x+1)+(y^2-8y+16)-1=0$;

$(x-1)^2+(y-4)^2=1$.

Геометричною інтерпретацією рівняння $x^2+y^2-2x-8y+16=0$ є коло із центром у точці $A(1;\ 4)$ і радіусом $r=1$.

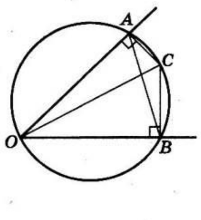


2) $y+|x-1|=a^2-1$. Позначимо $a^2-1=b$. Маємо $y=-|x-1|+b$. Геометричною інтерпретацією цього рівняння є сім'я прямих кутів, вершина яких належить прямій $x=1$, для яких ця пряма є віссю симетрії; сторони кутів напрямлені вниз.

Геометричні образи рівнянь мають єдину точку перетину лише у випадку $b=3$ (див. малюнок). Отже,

$b=3$; $a^2-1=3$; $a^2=4$; $a=\pm 2$.

Відповідь. $a=2$ або $a=-2$.



4.2м. Нехай точка C розміщена всередині кута AOB такого, що $\angle AOB=60°$. CA і CB — відстані до сторін кута, $CA=\sqrt{7}$ см, $CB=2\sqrt{7}$ см.

Оскільки $\angle CAO=\angle CBO=90°$, то $\angle CAO+\angle CBO=180°$, а тому навколо чотирикутника $ACBO$ можна описати коло, до того ж OC — його діаметр (бо $\angle OAC=90°$). Знайдемо діаметр кола з $\triangle ACB$: $OC=\frac{AB}{\sin ACB}$.

Маємо $\angle ACB=180°-\angle AOB=180°-60°=120°$.

У $\triangle ACB$, за теоремою косинусів,

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos ACB}=$

$=\sqrt{7+28-2\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=7$ см.

Тоді $OC=\frac{7}{\sin 120°}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$ (см).

Відповідь. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Б	Г	А	А	В	Г	В	В	Б	Г	А

2.1	2.2	2.3	2.4
$x=3$	$[0;\ 1)$	$\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$	30 см

Варіант 18

3.1. Нехай за планом перша бригада повинна виготовити x деталей, а друга — y деталей. Тоді $x + y = 250$. До обіду перша бригада виготовила $0{,}6x$, а друга — $0{,}7y$ деталей. За умовою, $0{,}7y - 0{,}6x = 6$. Маємо систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 250, \\ 0{,}7y - 0{,}6x = 6. \end{cases}$

Розв'яжемо її. З першого рівняння маємо $y = 250 - x$.

Підставимо значення y у друге рівняння:
$0{,}7(250 - x) - 0{,}6x = 6$; $1{,}3x = 169$; $x = 130$.
Тоді $y = 120$. Отже, перша бригада повинна була виготовити 130 деталей, а друга — 120 деталей.
Відповідь. 130 деталей; 120 деталей.

3.2. $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

1) $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=$

$=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}=$

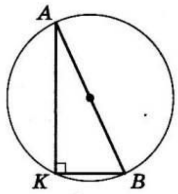
$=a-2\sqrt{ab}+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

2) $\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

3) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1$.

Відповідь. 1.

3.3. Нехай точка K належить колу, KA і KB — хорди, $\angle AKB = 90°$.



Оскільки кут AKB прямий, то він спирається на діаметр, а тому AB — діаметр кола і $AB = 2\cdot 10 = 20$ (см).
Позначимо $BK = x$ см, тоді $KA = (x+4)$ см.
У $\triangle AKB$: $AB^2 = AK^2 + KB^2$;
$20^2 = (x+4)^2 + x^2$;
$x^2 + 4x - 192 = 0$.
Ураховуючи, що $x > 0$, отримаємо $x = 12$.
Отже, $KB = 12$ см, $KA = 16$ см.
Відповідь. 12 см і 16 см.

4.1ᵐ. $\dfrac{x}{x^2+3x+2}-\dfrac{x}{x^2+5x+2}=\dfrac{1}{24}$.

Оскільки $x=0$ не є коренем рівняння, то поділимо чисельник і знаменник кожного дробу, що стоять у лівій частині рівняння, на x. Маємо $\dfrac{1}{x+3+\dfrac{2}{x}}-\dfrac{1}{x+5+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{24}$. Заміна

$x+3+\dfrac{2}{x}=t$. Тоді:

$\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{1}{24}$; $\dfrac{t+2-t}{t(t+2)}=\dfrac{1}{24}$; $\begin{cases} t^2+2t-48=0, \\ t\neq 0, \\ t\neq -2; \end{cases}$ $t_1=6$; $t_2=-8$.

1) $t_1=6$; $x+3+\dfrac{2}{x}=6$; $\dfrac{x^2-3x+2}{x}=0$; $x_1=1$; $x_2=2$.

2) $t_2=-8$; $x+3+\dfrac{2}{x}=-8$; $\dfrac{x^2+11x+2}{x}=0$; $x_{3,4}=\dfrac{-11\pm\sqrt{113}}{2}$.

Відповідь. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_{3,4}=\dfrac{-11\pm\sqrt{113}}{2}$.

4.2ᵐ. Нехай S — площа трикутника. Тоді $h_a=\dfrac{2S}{a}$; $h_b=\dfrac{2S}{b}$; $h_c=\dfrac{2S}{c}$, де a, b, c — сторони трикутника. За умовою, $\left(\dfrac{h_c}{h_a}\right)^2+\left(\dfrac{h_c}{h_b}\right)^2=1$. Тому $\left(\dfrac{\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{a}}\right)^2+\left(\dfrac{\frac{2S}{c}}{\frac{2S}{b}}\right)^2=1$; $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$;

$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=1$, $a^2+b^2=c^2$. Звідси випливає, що трикутник прямокутний, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	В	Г	Б	Б	Б	В	Г	В	А	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
2013	$q=-40$; $x_2=-8$	(2; 1), (−2; 1)	110°

Варіант 19

3.1. Нехай x, $x + 1$ і $x + 2$ — три послідовних натуральних числа, які треба знайти. За умовою,

$3x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + 67.$

Розв'яжемо отримане рівняння

$3x^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + 67$; $x^2 - 6x - 72 = 0.$

Оскільки x — натуральне число, то маємо $x = 12$.

Отже, шукані числа 12; 13; 14.

Відповідь. 12; 13; 14.

3.2. $\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right):\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right).$

Оскільки $x > 0$ і $y \geqslant 0$, то $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$. Маємо

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}:\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{x-\sqrt{xy}+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y-2\sqrt{x}\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3.3. Знайдемо рівняння прямої AB. Маємо:

$\dfrac{x-2}{-3-2}=\dfrac{y-3}{5-3}$; $2(x - 2) = -5(y - 3)$; $2x - 4 = -5y + 15$;

$2x + 5y - 19 = 0.$

Оскільки точка $C(a; 9)$ належить цій прямій, то

$2a + 5 \cdot 9 - 19 = 0$; $2a = -26$; $a = -13$.

Відповідь. $a = -13$.

4.1м. Подамо систему так: $\begin{cases} x+y+xy=7,\\ (x+y)^2-xy=13.\end{cases}$

Далі заміна $x + y = u$; $xy = v$. Маємо систему для u і v:

$\begin{cases} u+v=7,\\ u^2-v=13.\end{cases}$

Розв'яжемо її способом додавання. Додавши відповідно ліві і праві частини рівнянь, маємо: $u^2 + u = 20$; $u^2 + u - 20 = 0$; $u_1 = 4$, тоді $v_1 = 3$ або $u_2 = -5$, тоді $v_2 = 12$:

1) $\begin{cases} u=4,\\ v=3;\end{cases}$ $\begin{cases} x+y=4,\\ xy=3.\end{cases}$ Звідси маємо пари чисел (3; 1), (1; 3).

2) $\begin{cases} u=-5,\\ v=12;\end{cases}$ $\begin{cases} x+y=-5,\\ xy=12;\end{cases}$ $\begin{cases} x=-5-y,\\ (-5-y)y=12.\end{cases}$ $y^2 + 5y + 12 = 0.$

Немає розв'язків.

Відповідь. (3; 1), (1; 3).

4.2м. *Доведення.* Нехай висоти трикутника $h_a = 15$ см, $h_b = 20$ см, $h_c = 12$ см проведено до сторін a, b і c відповідно. Відомо, що площа трикутника $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$.

Тоді $a=\dfrac{2S}{h_a}$, $b=\dfrac{2S}{h_b}$, $c=\dfrac{2S}{h_c}$.

Перевіримо виконання рівності $a^2 + b^2 = c^2$.

Маємо:

$$a^2+b^2=\left(\frac{2S}{h_a}\right)^2+\left(\frac{2S}{h_b}\right)^2=(2S)^2\left(\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}\right)=(2S)^2\left(\frac{1}{225}+\frac{1}{400}\right)=$$

$$=(2S)^2\cdot\frac{1}{144}=(2S)^2\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2=\left(\frac{2S}{12}\right)^2=\left(\frac{2S}{h_c}\right)^2=c^2.$$

Отже, $a^2 + b^2 = c^2$; тому трикутник з висотами 12 см, 15 см і 20 см є прямокутним, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	Г	В	В	А	Г	В	Б	Г	В	Б	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
4	–1	–1	6 см

Варіант 20

3.1. Нехай чисельник шуканого дробу дорівнює x, тоді його знаменник — $(x+5)$, а сам дріб — $\frac{x}{x+5}$. Після того як до чисельника додали 3, а до знаменника — 4, отримали дріб $\frac{x+3}{x+9}$. За умовою $\frac{x+3}{x+9}-\frac{x}{x+5}=\frac{1}{8}$. Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{x^2+3x+5x+15-x^2-9x}{(x+9)(x+5)}=\frac{1}{8}$; $8(15-x)=x^2+14x+45$;

$x^2+22x-75=0$; $x_1=3$; $x_2=-25$.

Якщо $x=3$, матимемо дріб $\frac{3}{8}$, якщо $x=-25$, то матимемо дріб $\frac{-25}{-20}$, який не задовольняє умову.

Відповідь. $\frac{3}{8}$.

3.2. ОДЗ знайдемо з умови:

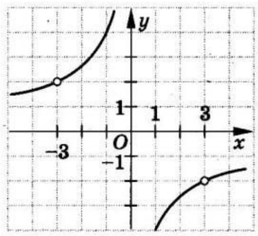
$9x-x^3\neq 0$; $x(9-x^2)\neq 0$; $x\neq 0$; $x\neq 3$; $x\neq -3$.

На ОДЗ спрощуємо:

$\frac{6x^2-54}{9x-x^3}=\frac{6(x^2-9)}{-x(x^2-9)}=-\frac{6}{x}$.

Отже, графіком функції $y=\frac{6x^2-54}{9x-x^3}$ є гіпербола $y=-\frac{6}{x}$ з «виколотими» точками $(-3;\ 2)$ і $(3;\ -2)$.

Графік зображено на малюнку.



3.3. Нехай сторони паралелограма дорівнюють a см і b см, тоді $2(a+b)=26$ і $a+b=13$.

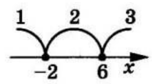
За властивістю діагоналей паралелограма: $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$, де d_1 і d_2 — діагоналі паралелограма. Маємо: $7^2+11^2=2(a^2+b^2)$; $a^2+b^2=85$. Отже, маємо систему $\begin{cases} a+b=13, \\ a^2+b^2=85. \end{cases}$

Розв'яжемо її: $b=13-a$, тоді $a^2+(13-a)^2=85$; $2a^2-26a+84=0$; $a^2-13a+42=0$. Звідси $a_1=6$ і тоді $b_1=7$ або $a_2=7$, і тоді $b_2=6$.

Відповідь. 6 см і 7 см.

4.1м. Рівняння рівносильне сукупності

$\left[\begin{array}{l} |x+2|-|x-6|=x, \\ |x+2|-|x-6|=-x. \end{array}\right.$



Значення x, що перетворюють у нуль підмодульні вирази: $x=-2$ і $x=6$.

1) $x<-2$, тоді $|x+2|=-(x+2)$, $|x-6|=-(x-6)$. Маємо:

$\left[\begin{array}{l} -(x+2)+(x-6)=x, \\ -(x+2)+(x-6)=-x; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-8, \\ x=8; \end{array}\right.$ $-8\in(-\infty;\ -2)$; $8\notin(-\infty;\ -2)$.

Отже, $x=-8$ — корінь рівняння.

2) $-2\leqslant x<6$, тоді $|x+2|=x+2$, $|x-6|=-(x-6)$. Маємо:

$\left[\begin{array}{l} x+2+(x-6)=x, \\ x+2+(x-6)=-x; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=\frac{4}{3}; \end{array}\right.$ $4\in[-2;6)$ і $\frac{4}{3}\in[-2;6)$.

Отже, $x=4$ і $x=\frac{4}{3}$ — корені рівняння.

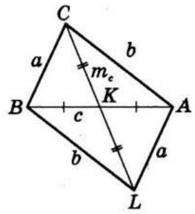
3) $x\geqslant 6$, тоді $|x+2|=x+2$, $|x-6|=x-6$. Маємо:

$\left[\begin{array}{l} x+2-(x-6)=x, \\ x+2-(x-6)=-x; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=-8; \end{array}\right.$ $8\in[6;+\infty)$; $-8\notin[6;+\infty)$.

Отже, $x=8$ — корінь рівняння.

Відповідь. $x_1=-8$; $x_2=4$; $x_3=\frac{4}{3}$; $x_4=8$.

4.2м. Нехай a, b, c — сторони трикутника; m_c — медіана, що проведена до сторони c. Продовжимо CK за точку K на відстань, що дорівнює CK. Отримали паралелограм $BCAL$, у якому $BL=CA=b$ і $CL=2m_c$.



У $\triangle CBL$, за нерівністю трикутника, маємо $2m_c<a+b$.

Аналогічно $2m_a<b+c$ і $2m_b<a+c$, де m_a і m_b — дві інші медіани. Додаючи почленно отримані нерівності, маємо: $2(m_a+m_b+m_c)<2(a+b+c)$; $m_a+m_b+m_c<a+b+c$, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
А	Б	Г	Б	Г	А	В	Б	Г	Г	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{16}{b^2}$	$\sqrt{3}$	-1	15 см

Варіант 21

3.1. Нехай x км/год — швидкість течії, тоді швидкість катера за течією $(20+x)$ км/год, а проти течії — $(20-x)$ км/год. 22 км за течією катер проплив за $\frac{22}{20+x}$ год, а 36 км проти течії — за $\frac{36}{20-x}$ год. 6 км на плоту можна подолати за $\frac{6}{x}$ год.

За умовою задачі маємо рівняння $\frac{22}{20+x}+\frac{36}{20-x}=\frac{6}{x}$, або $\frac{11}{20+x}+\frac{18}{20-x}=\frac{3}{x}$.

Розв'яжемо його: $\frac{220-11x+360+18x}{(20+x)(20-x)}=\frac{3}{x}$;

$580x+7x^2=1200-3x^2$; $x^2+58x-120=0$; $x_1=2$; $x_2=-60$.

Другий корінь не задовольняє умову. Отже, швидкість течії 2 км/год.

Відповідь. 2 км/год.

3.2. $a_1=-15{,}1$; $a_2=-14{,}4$, тоді $d=a_2-a_1=-14{,}4+15{,}1=0{,}7$. Формула загального члена $a_n=a_1+d(n-1)$; $a_n=-15{,}1+0{,}7(n-1)$; $a_n=0{,}7n-15{,}8$. Знайдемо члени арифметичної прогресії, найближчі до нуля. Перевіримо, чи не містить прогресія числа 0.

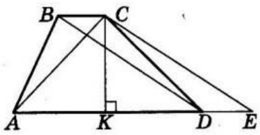
$a_n=0$; $0{,}7n-15{,}8=0$; $n=22\frac{4}{7}$. Отже, розглянемо a_{22} і a_{23}.

$a_{22}=0{,}7\cdot 22-15{,}8=-0{,}4$; $a_{23}=0{,}7\cdot 23-15{,}8=0{,}3$.

Найменшим за модулем є $a_{23}=0{,}3$.

Відповідь. $a_{23}=0{,}3$.

3.3. Нехай $ABCD$ — задана в умові трапеція. Її основи $BC=2$ см і $AD=18$ см. діагоналі трапеції $BD=15$ см, $AC=7$ см.



Проведемо $CE \parallel BD$, де точка E належить продовженню сторони AD. Тоді $BCED$ — паралелограм, бо має дві пари паралельних сторін. Тоді $DE=BC=2$ (см); $CE=BD=15$ (см) і $AE=AD+DE=18+2=20$ (см).

Проведемо CK — висоту $\triangle ACE$ і трапеції $ABCD$.

У $\triangle ACE$: $CK=\frac{2S_{\triangle ACE}}{AE}$. За формулою Герона:

$S_{\triangle ACE}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{20+15+7}{2}=21$;

$S_{\triangle ACE}=\sqrt{21(21-20)(21-15)(21-7)}=42$ (см²).

Тоді $CK=\frac{2\cdot 42}{20}=4{,}2$ (см).

Площа трапеції $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot CK=\frac{18+2}{2}\cdot 4{,}2=42$ (см²).

Відповідь. 42 см².

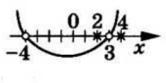
4.1м. $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|(x^2+x-12)\leqslant 0$.

Розглянемо окремо рівняння $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|(x^2+x-12)=0$ і нерівність $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|(x^2+x-12)<0$.

1) $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|(x^2+x-12)=0$; $x_1=4$; $x_2=-4$; $x_3=3$.

2) $\left|\frac{x-4}{x-2}\right|(x^2+x-12)<0$. Нерівність рівносильна системі:

$\begin{cases} x\neq 4, \\ x\neq 2, \\ x^2+x-12<0; \end{cases}$ $x\in(-4;2)\cup(2;3)$.



Об'єднуючи, маємо $[-4;2)\cup(2;3]\cup\{4\}$.

Відповідь. $[-4;2)\cup(2;3]\cup\{4\}$.

4.2м. Маємо $S=rp=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, де a, b, c — сторони трикутника; $p=\frac{a+b+c}{2}$ — його півпериметр. Тоді $h_a=\frac{2S}{a}$; $h_b=\frac{2S}{b}$; $h_c=\frac{2S}{c}$.

Отримаємо: $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{rp}=\frac{1}{r}$, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	В	Г	Г	Б	Г	В	В	В	Б	А	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
17	(−1; −1), (4; 4)	14 олівців	10 см

Варіант 22

3.1. Нехай басейн наповнюється через першу трубу за x год, тоді через другу — за $(x + 8)$ год, а через третю — за $(x + 2)$ год. За одну годину перша труба наповнює $\frac{1}{x}$ частину басейну, друга — $\frac{1}{x+8}$ частину басейну, а третя — $\frac{1}{x+2}$ частину басейну. За умовою, $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+8}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{1}{x}=\frac{x+8+x+2}{(x+2)(x+8)}$; $\frac{1}{x}=\frac{2x+10}{x^2+10x+16}$;

$x^2 + 10x + 16 = 2x^2 + 10x$; $x^2 = 16$.

Ураховуючи, що $x > 0$, маємо $x = 4$.

Отже, через першу трубу для наповнення басейну необхідно 4 год, через другу — 12 год, через третю — 6 год.

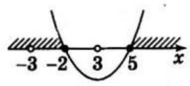
Відповідь. 4 год; 12 год; 6 год.

3.2. Область визначення функції знайдемо із системи $y=\sqrt{x^2-3x-10}-\frac{5}{x^2-9}$.

Розв'яжемо першу нерівність:

$x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$; $x^2 - 3x - 10 = 0$; $x_1 = 5$; $x_2 = -2$.

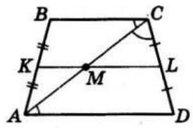
Маємо: $x \in (-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.



Необхідно врахувати, що $x^2 \neq 9$, тобто $x \neq -3$; $x \neq 3$. Тому остаточно отримаємо: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [5; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [5; +\infty)$.

3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, що задана в умові, KL — її середня лінія, M — точка перетину діагоналі AC і KL. За умовою, $KM = 4$ см, $ML = 5$ см.



Оскільки $ML \parallel AD$ і L — середина CD, то, за теоремою Фалеса: M — середина AC. Тому ML — середня лінія $\triangle ACD$ і $AD = 2ML = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

Аналогічно, KM — середня лінія $\triangle ABC$ і $BC = 2KM = 2 \cdot 4 = 8$ (см).

$\angle BCA = \angle ACD$ (за умовою); $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC). Тому $\angle ACD = \angle CAD$; $\triangle ADC$ — рівнобедрений і $CD = AD = 10$ (см). $AB = CD = 10$ (см).

Тоді периметр $P = 3 \cdot 10 + 8 = 38$ (см).

Відповідь. 38 см.

4.1м. З умови випливає, що $\frac{b_1}{1-q}=4$.

Розглянемо послідовність, що складається з кубів членів даної прогресії: b_1^3; $b_1^3q^3$; $b_1^3q^6$; ... Оскільки $|q|<1$, то $|q^3|<1$. А отже, дана послідовність — нескінченна геометрична прогресія, у якої перший член b_1^3 і знаменник q^3. Тоді $\frac{b_1^3}{1-q^3}=192$.

Маємо систему:

$$\begin{cases}\frac{b_1}{1-q}=4,\\ \frac{b_1}{1-q}\cdot\frac{b_1^2}{1+q+q^2}=192;\end{cases}\quad \begin{cases}b_1=4(1-q),\\ 4\cdot\frac{b_1^2}{1+q+q^2}=192;\end{cases}$$

$$\begin{cases}b_1=4(1-q),\\ 16(1-q)^2=48(1+q+q^2).\end{cases}$$

Маємо $2q^2 + 5q + 2 = 0$.

Ураховуючи, що $|q|<1$, отримаємо $q=-\frac{1}{2}$.

Відповідь. $-\frac{1}{2}$.

4.2м. Позначимо $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$.

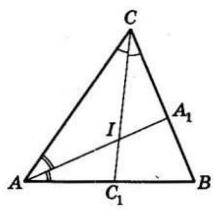
Оскільки CC_1 — бісектриса $\triangle ABC$, то $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BC}$.

Позначимо $AC_1 = x$, тоді $C_1B = c - x$.

Маємо: $\frac{x}{c-x}=\frac{b}{a}$; $x=\frac{bc}{a+b}$.

У $\triangle ACC_1$: AI — бісектриса, тому

$\frac{CI}{IC_1}=\frac{AC}{AC_1}$; $\frac{CI}{IC_1}=\frac{b}{\frac{bc}{a+b}}=\frac{a+b}{c}$.



Отже, $\frac{CI}{IC_1}=\frac{12+18}{15}=2:1$.

Відповідь. 2 : 1.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	А	А	В	В	В	Б	Г	Б	А	В

2.1	2.2	2.3	2.4
6; –3	$y = -1{,}5x$	31,5	60° або 120°

Варіант 23

3.1. Нехай перший робітник, працюючи самостійно, виконує завдання за x год, тоді другий — за $(x+6)$ год. Перший за одну годину виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а другий — $\frac{1}{x+6}$ частину роботи. За умовою, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{x+6+x}{x(x+6)}=\frac{1}{4}$; $4(2x+6)=x^2+6x$; $x^2-2x-24=0$; $x_1=6$; $x_2=-4$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, перший робітник, працюючи самостійно, виконує роботу за 6 год, а другий — за 12 год.

Відповідь. 6 год; 12 год.

3.2. $\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(a\sqrt{a}-1)}{a+\sqrt{a}+1}}+\sqrt{a}=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)((\sqrt{a})^3-1)}{a+\sqrt{a}+1}}+\sqrt{a}=$

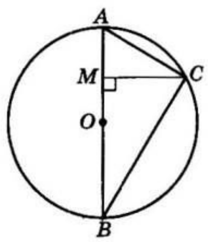
$=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-1)((\sqrt{a})^2+\sqrt{a}+1)}{a+\sqrt{a}+1}}+\sqrt{a}=\sqrt{(\sqrt{a}-1)^2}+\sqrt{a}=$

$=|\sqrt{a}-1|+\sqrt{a}$.

Оскільки $a=0{,}97$, то $\sqrt{a}-1<0$, і тому $|\sqrt{a}-1|=-(\sqrt{a}-1)$.

А отже, маємо $-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}=1$.

Відповідь. 1.



3.3. Нехай точка O — центр кола, OA — його радіус; $CM \perp OA$, де $M \in OA$, $CM = 24$ см. За умовою, $OM : MA = 5 : 8$. Позначимо $OM = 5x$; $MA = 8x$.

Продовжимо AO до другого перетину з колом у точці B. AB — діаметр кола. Тому $\angle ACB = 90°$ (як вписаний кут, що спирається на діаметр). Тому CM — висота прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи.

$CM^2 = AM \cdot MB$; $OB = OA = 5x + 8x = 13x$;

$BM = BO + OM = 13x + 5x = 18x$.

Отже, $24^2 = 8x \cdot 18x$; $x^2 = 4$; $x = 2$. Тоді $OA = 13 \cdot 2 = 26$ (см). Довжина кола $l = 2\pi r = 52\pi$ (см).

Відповідь. 52π см.

4.1[м]**.** $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=n\cdot\left(\frac{n^2}{6}+\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)=n\cdot\frac{n^2+3n+2}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Оскільки n — натуральне число, то $n(n+1)(n+2)$ — добуток трьох послідовних натуральних чисел. Серед них є хоча б одне, кратне 2, і є рівно одне число, кратне 3. Тому вираз $n(n+1)(n+2)$ кратний 6, тобто число $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ є натуральним, а тому й число $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ — натуральне, що й треба було довести.

4.2[м]**.** Маємо півпериметр трикутника $p=\frac{15+27}{2}=21$ (см).

За відомою формулою $S=pr$, де r — радіус вписаного кола, отримаємо $S=21\cdot 4=84$ (см^2). З іншого боку:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Позначимо одну з невідомих сторін x см, тоді інша дорівнює $27-x$. Отримаємо: $84=\sqrt{21(21-15)(21-x)(21-(27-x))}$;

$84^2=21\cdot 6(21-x)(x-6)$; $56=21x-126-x^2+6x$; $x^2-27x+182=0$; $x_1=13$; $x_2=14$.

Отже, одна із сторін буде 13 см, тоді друга — $27-13=14$ (см).

Маємо $\cos\alpha=\frac{13^2+14^2-15^2}{2\cdot 13\cdot 14}=\frac{5}{13}$.

Відповідь. $\frac{5}{13}$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Б	Г	Б	А	В	Б	Б	Г	В	Б	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{5a-a^2-6}{3a+9}$	$p=2$ або $p=-2$	(3; 2), (0,4; −0,6)	10 см

Варіант 24

3.1. Нехай перший робітник за планом мав виготовити x деталей, а другий — y деталей. Тоді $x+y=250$.

Оскільки перший перевиконав план на 10%, то виготовив $x+0{,}1x=1{,}1x$ деталей; другий перевиконав план на 15%, а тому виготовив $y+0{,}15y=1{,}15y$ деталей. За умовою, $1{,}1x+1{,}15y=280$.

Маємо систему $\begin{cases} x+y=250, \\ 1{,}1x+1{,}15y=280. \end{cases}$ Розв'яжемо її: $x=250-y$;

$1{,}1(250-y)+1{,}15y=280$; $0{,}05y=5$; $y=100$, тоді $x=150$.

Отже, перший робітник мав виготовити 150 деталей, а другий — 100 деталей.

Відповідь. 150 деталей; 100 деталей.

3.2. *Доведення.* Оскільки $0{,}5x^2-x+2=0{,}5(x^2-2x+4)$ і $0{,}5x^3+4=0{,}5(x^3+8)=0{,}5(x+2)(x^2-2x+4)$, то маємо

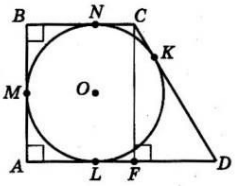
$$\left(\frac{1{,}5x-4}{0{,}5(x^2-2x+4)}-\frac{2x-14}{0{,}5(x+2)(x^2-2x+4)}+\frac{1}{x+2}\right):\frac{4}{x+2}=$$

$$=\frac{(1{,}5x-4)(x+2)-(2x-14)+0{,}5(x^2-2x+4)}{0{,}5(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{x+2}{4}=$$

$$=\frac{1{,}5x^2-4x+3x-8-2x+14+0{,}5x^2-x+2}{2(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{2x^2-4x+8}{2(x^2-2x+4)}=1.$$

Отже, значення виразу не залежить від значення змінної, що й треба було довести.

3.3. Нехай у прямокутну трапецію $ABCD$, у якої $\angle A=\angle B=90°$, вписано коло з радіусом 6 см. Тоді $AB=12$ см. Нехай точки M, N, K, L — точки дотику сторін трапеції AB, BC, CD і AD відповідно. За властивістю дотичних та використовуючи умову, матимемо: $AM=MB=BN=AL=6$ (см), $DK=DL=8$ (см).



Позначимо $KC=CN=x$. Проведемо висоту CF.

Маємо $LF=CN=x$; тоді $DF=8-x$.

Крім того, $CF=AB=12$ см; $DC=8+x$.

У $\triangle CFD$, за теоремою Піфагора, $CD^2=CF^2+FD^2$,

$(8+x)^2=12^2+(8-x)^2$;

$64+16x+x^2=144+64-16x+x^2$; $32x=144$; $x=4{,}5$.

Тоді $BC=6+4{,}5=10{,}5$ (см), $AD=AL+LD=6+8=14$ (см).

Площа трапеції:

$$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB=\frac{14+10{,}5}{2}\cdot 12=147\ (\text{см}^2).$$

Відповідь. 147 см^2.

4.1[м]. Зазначимо, що кратне порівняння має місце тільки для додатних чисел. Використовуючи теорему Вієта й умову, одержимо:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3k+2}{4}, \\ x_1x_2=\frac{k^2-1}{4}, \\ x_2=3x_1. \end{cases}\quad \begin{cases} x_1+3x_1=\frac{3k+2}{4}, \\ x_1 3x_1=\frac{k^2-1}{4}, \\ x_2=3x_1. \end{cases}\quad \begin{cases} x_1=\frac{3k+2}{16}, \\ 3\left(\frac{3k+2}{16}\right)^2=\frac{k^2-1}{4}, \\ x_2=3x_1. \end{cases}$$

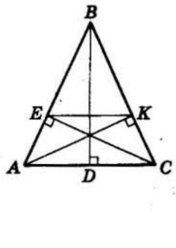
Розв'язуючи друге рівняння, одержимо $37k^2-36k-76=0$; $k_1=-\frac{38}{37}$; $k^2=2$.

1) $k_1=-\frac{38}{37}$, тоді $x_1=\dfrac{3\left(-\frac{38}{37}\right)+2}{16}<0$. Тому $k_1=-\frac{38}{37}$ не підходить.

2) $k_2=2$; тоді $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3}{2}$.

Відповідь. $k=2$.

4.2[м]. Нехай задано рівнобедрений трикутник ABC, у якого $AC=6$ см; $AB=BC=9$ см; BD, CE і AK — висоти трикутника. Оскільки трикутник гострокутний, то основи висот — точки E і K належать сторонам AB і BC відповідно.



$\triangle ADB \backsim \triangle AEC$ (за двома кутами). Тоді

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$; $\frac{3}{9}=\frac{AE}{6}$; $AE=2$ (см).

$BE=9-2=7$ (см).

$\triangle BEK \backsim \triangle BAC$ (за двома кутами). Тоді

$\frac{BE}{EK}=\frac{BA}{AC}$; $\frac{7}{EK}=\frac{9}{6}$; $EK=\frac{42}{9}$; $EK=4\frac{2}{3}$ (см).

Відповідь. $4\frac{2}{3}$ см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	В	В	Б	Б	Б	В	Г	Б	Б	Б	А

2.1	2.2	2.3	2.4
$-\frac{4}{b}$	1; 2	$(-\infty; 2]$	45°

Варіант 25

3.1. Нехай початковий сплав містить x г срібла. Тоді відсоток срібла у сплаві був $\frac{x}{x+20}\cdot 100\%$. Після того як до сплаву додали 5 г срібла і 10 г золота, відсоток срібла став $\frac{x+5}{x+35}\cdot 100\%$. За умовою, $\frac{x+5}{x+35}\cdot 100\% - \frac{x}{x+20}\cdot 100\% = 5\%$; $\frac{x+5}{x+35} - \frac{x}{x+20} = \frac{1}{20}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{x^2+5x+20x+100-x^2-35x}{(x+35)(x+20)} = \frac{1}{20};$$

$20(100-10x)=x^2+55x+700;$

$x^2+255x-1300=0;\ x_1=5;\ x_2=-260.$

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, у початковому сплаві було 5 г срібла.

Відповідь. 5 г.

3.2. $\begin{cases} 3xy+y=7, \\ 3xy-x=4. \end{cases}$

Помножимо друге рівняння на (–1) і додамо до першого:

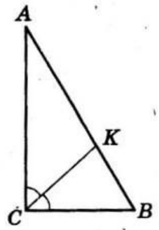
$$\begin{cases} 3xy+y=7, \\ -3xy+x=-4 \end{cases}$$
$$\overline{\quad x+y=3. \quad}$$

Звідси $y=3-x$. Підставимо у друге рівняння початкової системи $3x(3-x)-x=4;\ 3x^2-8x+4=0.$

Маємо $x_1=2;\ x_2=\frac{2}{3}$. Тоді $y_1=3-2=1;\ y_2=3-\frac{2}{3}=2\frac{1}{3}$.

Відповідь. (2; 1), $\left(\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$.

3.3. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник; $\angle C=90°$, CK — його бісектриса. За умовою, $KB=15$ см; $AK=20$ см. Тоді $AB=35$ см.



За властивістю бісектриси: $\frac{AC}{CB}=\frac{AK}{KB}$; $\frac{AC}{CB}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$; позначимо $AC=4x$; $CB=3x$.

У $\triangle ABC$: $AB^2=AC^2+CB^2$; $35^2=(4x)^2+(3x)^2$; $35^2=25x^2$; $x^2=49$; $x=7$.

Тоді $AC=4\cdot 7=28$ (см), $CB=3\cdot 7=21$ (см).

Радіус вписаного кола $r=\frac{a+b-c}{2}$; $r=\frac{28+21-35}{2}=7$ (см).

Відповідь. 7 см.

4.1м. Використаємо метод математичної індукції.

1) Якщо $n=1$, то $4^n+15n-1=4+15-1=18$ — кратне 9.

2) Припустимо, що для $n=k$ умова задачі виконується, тобто $4^k+15k-1$ — кратне 9.

3) Доведемо для $n=k+1$, що $4^{k+1}+15(k+1)-1$ — кратне 9. Маємо: $4^k\cdot 4+15k+15-1=(4^k+15k-1)+(3\cdot 4^k+15)=$ $=(4^k+15k-1)+3(4^k+5)$.

Число $4^k+15k-1$ — кратне 9 (за припущенням). Оскільки $4^k=(3+1)^k$, то 4^k для будь-якого k при діленні на 3 дає остачу 1, а тому число 4^k+5 для будь-якого k кратне 3, а отже, вираз $3(4^k+5)$ для будь-якого k кратний 9.

Тоді $(4^k+15k-1)+3(4^k+5)$ — кратне 9.

4) Довели для будь-якого n.

4.2м. Відстань між центром даного кола $Q_1(1; -3)$ і центром шуканого $Q(-2; 1)$ дорівнює $Q_1Q=\sqrt{(-2-1)^2+(1+3)^2}=5$. Нехай r — радіус шуканого кола, $r_1=2$ — радіус даного кола.

Кола можуть мати як внутрішній, так і зовнішній дотик. Розглянемо ці випадки.

1. Зовнішній дотик. Тоді $r+r_1=5$; $r+2=5$; $r=3$. Отже, рівняння кола $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

2. Внутрішній дотик. Тоді $|r-r_1|=5$; $|r-2|=5$; $r-2=5$ або $r-2=-5$. Ураховуючи, що $r>0$, маємо $r=7$. Отже, рівняння кола $(x+2)^2+(y-1)^2=49$.

Відповідь. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ або $(x+2)^2+(y-1)^2=49$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	Б	Б	А	Г	Б	Г	Б	Б	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$4{,}34\cdot 10^{11}$	$5a^3\sqrt{a}$	[0; 4]	$y=1$ або $y=-5$

Варіант 26

3.1. Нехай до ятки завезли x кг апельсинів і y кг бананів. За умовою, $x-y=100$.

Після того як продали 80% апельсинів, у ятці залишилося 20%, тобто $0{,}2x$ кг, а після того як продали 30% бананів, у ятці залишилося 70%, тобто $0{,}7y$ кг. За умовою, $0{,}7y-0{,}2x=105$. Маємо систему $\begin{cases} x-y=100, \\ 0{,}7y-0{,}2x=105. \end{cases}$

Розв'яжемо її: $x=100+y$; $0{,}7y-0{,}2(100+y)=105$; $0{,}7y-20-0{,}2y=105$; $0{,}5y=125$; $y=250$ (кг), тоді $x=350$ (кг). Отже, було завезено 350 кг апельсинів і 250 кг бананів.

Відповідь. 350 кг апельсинів і 250 кг бананів.

3.2. $(2^2+4^2+6^2+...+100^2)-(1^2+3^2+5^2+...+99^2)=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+...+(100^2-99^2)=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+(6-5)(6+5)+...+(100-99)(100+99)=3+7+11+...+199.$

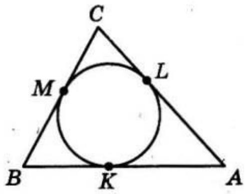
Отримали суму арифметичної прогресії, що складається з 50 членів; $a_1=3$; $a_{50}=199$. Її сума $S_{50}=\frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50$. Отже, значення виразу, що дано в умові, дорівнює $\frac{3+199}{2}\cdot 50=5050$.

Відповідь. 5050.

3.3. У $\triangle ABC$, у якого $AB=29$ см, вписано коло. K, L, M — точки дотику відповідно до сторін AB, AC і BC. За умовою $AL=24$ см, $CL=1$ см.

За властивістю дотичних маємо: $AK=AL=24$ см; $CM=CL=1$ см.

Тоді $KB=AB-AK=29-24=5$ (см), а тому й $BM=BK=5$ см. Отже, $AC=24+1=25$ (см), $BC=BM+MC=5+1=6$ (см).



Отже, маємо трикутник зі сторонами 29 см, 25 см і 6 см. Знайдемо його площу за формулою Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\frac{29+25+6}{2}=30$ (см).

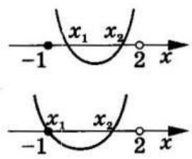
Отже, $S=\sqrt{30(30-29)(30-25)(30-6)}=60$ (см^2).

Відповідь. 60 см^2.

4.1[м]. Нехай $f(x)=4x^2-(3a+1)x-a-2$; $x_0=-\frac{-(3a+1)}{8}=\frac{3a+1}{8}$; $D=(3a+1)^2-16(-a-2)=9a^2+22a+33$.

Корені x_1 і x_2 належать проміжку $[-1;\ 2)$ при виконанні умови:

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ -1<x_0<2, \\ f(-1)\geqslant 0, \\ f(2)>0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9a^2+22a+33\geqslant 0, \\ -1<\frac{3a+1}{8}<2, \\ 4+(3a+1)-a-2\geqslant 0, \\ 16-2(3a+1)-a-2>0. \end{cases}$$

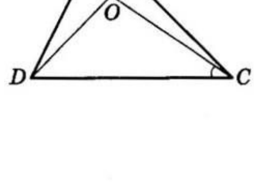


Перша нерівність виконується для всіх a ($D_1=22^2-4\cdot 9\cdot 33<0$).

Отже, маємо: $\begin{cases} -8<3a+1<16, \\ 2a\geqslant -3, \\ -7a>-12; \end{cases}$ $\begin{cases} -3<a<5, \\ a\geqslant -\frac{3}{2}, \\ a<\frac{12}{7}; \end{cases}$ $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{12}{7}\right)$.

Відповідь. $a\in\left[-\frac{3}{2};\frac{12}{7}\right)$.

4.2[м]. Нехай $ABCD$ — задана в умові трапеція. $S_{\triangle AOB}=n^2$; $S_{\triangle COD}=k^2$. $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (за двома кутами); $\left(\frac{AO}{OC}\right)^2=\frac{n^2}{k^2}$; звідси $\frac{AO}{OC}=\frac{n}{k}$.



Оскільки $\triangle AOD$ і $\triangle DOC$ мають однакові висоти, то їхні площі відносяться так само, як основи, тобто

$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle DOC}}=\frac{AO}{OC}=\frac{n}{k}$; $S_{\triangle AOD}=k^2\cdot\frac{n}{k}=kn$.

Аналогічно $S_{\triangle BOC}=kn$. Тоді площа трапеції $S=n^2+k^2+kn+kn=n^2+2nk+k^2=(n+k)^2$, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
А	Б	Б	Б	В	Г	Б	В	В	Г	Б	А

2.1	2.2	2.3	2.4
$19+3\sqrt{2}$	(1; −1), (−1; −3)	$\frac{1}{9}$	$16\sqrt{3}$ см^2

Варіант 27

3.1. Нехай $\overline{ab} = 10a + b$ — шукане двоцифрове число. Тоді, за умовою, $3ab = 10a + b$. Також, за умовою, $\overline{ab} + 18 = \overline{ba}$, тобто $10a + b + 18 = 10b + a$. Звідси маємо: $9b - 9a = 18$; $b - a = 2$.

Отримали систему $\begin{cases} b - a = 2, \\ 3ab = 10a + b. \end{cases}$ Розв'яжемо її. З першого рівняння: $b = a + 2$. Тоді, підставляючи у друге рівняння,

$3a(a + 2) = 10a + a + 2$; $3a^2 + 6a = 11a + 2$; $3a^2 - 5a - 2 = 0$. Ураховуючи той факт, що a – цифра, отримаємо $a = 2$. Тоді $b = 4$. Шукане число дорівнює 24.

Відповідь. 24.

3.2. *Доведення.* Спростимо даний вираз за діями.

1) $\dfrac{3a+2}{3a^2+1} - \dfrac{18a^3-a-9}{9a^4-1} + \dfrac{3a-2}{3a^2-1} =$

$= \dfrac{3a+2}{3a^2+1} - \dfrac{18a^3-a-9}{(3a^2+1)(3a^2-1)} + \dfrac{3a-2}{3a^2-1} =$

$= \dfrac{(3a+2)(3a^2-1)-(18a^3-a-9)+(3a-2)(3a^2+1)}{(3a^2+1)(3a^2-1)} =$

$= \dfrac{9a^3-3a+6a^2-2-18a^3+a+9+9a^3+3a-6a^2-2}{(3a^2+1)(3a^2-1)} =$

$= \dfrac{a+5}{(3a^2+1)(3a^2-1)}.$

2) $\dfrac{a+5}{(3a^2+1)(3a^2-1)} : \dfrac{a^2+10a+25}{9a^4-1} = \dfrac{(a+5)(3a^2+1)(3a^2-1)}{(3a^2+1)(3a^2-1)(a+5)^2} =$

$= \dfrac{1}{a+5}.$

Отже, заданий в умові вираз при всіх допустимих значеннях a тотожно дорівнює виразу $\dfrac{1}{a+5}$. Якщо $a < -5$, то $a + 5 < 0$, а тому й $\dfrac{1}{a+5} < 0$.

Отже, заданий в умові вираз набуває від'ємних значень для всіх $a < -5$.

3.3. Нехай кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює α. Тоді матимемо: $(\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = -17$; $\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = -17$; $|\vec{a}|^2 + \vec{a}\vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = -17$; $2^2 + 2 \cdot 3 \cdot \cos\alpha - 2 \cdot 3^2 = -17$; $6\cos\alpha = -3$; $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Тому $\alpha = 120°$.

Відповідь. 120°.

4.1м. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1;$

$\dfrac{6}{x^2+3x+2} + \dfrac{8}{x^2+3x-4} = 1$. Зробимо заміну $x^2 + 3x = t$.

Тоді $\dfrac{6}{t+2} + \dfrac{8}{t-4} = 1$; $\dfrac{6}{t+2} + \dfrac{8}{t-4} - 1 = 0$;

$\dfrac{6(t-4)+8(t+2)-(t+2)(t-4)}{(t+2)(t-4)} = 0;$

$\dfrac{6t-24+8t+16-t^2-2t+4t+8}{(t+2)(t-4)} = 0$; $\dfrac{-t^2+16t}{(t+2)(t-4)} = 0$;

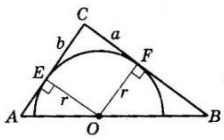
$t_1 = 0$; $t_2 = -3$.

1) $t_1 = 0$; $x^2 + 3x = 0$; $x(x + 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -3$;

2) $t_2 = 16$; $x^2 + 3x = 16$; $x^2 + 3x - 16 = 0$; $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$.

Відповідь. -3; 0; $\dfrac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$.

4.2м. Нехай у $\triangle ABC$ зі сторонами $AC = b = 13$ см; $AB = c = 14$ см і $BC = a = 15$ см вписано півколо з радіусом r указаним способом. Центром кола є точка O, коло дотикається до сторони AC у точці E, а до сторони BC — у точці F.



Знайдемо площу $\triangle ABC$ як суму площ $\triangle ACO$ і $\triangle OCB$:

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACO} + S_{\triangle OCB} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot OE + \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot OF = \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}ar,$

тоді $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}r(a+b)$ і $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b}$.

Знайдемо $S_{\triangle ABC}$ за формулою Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

$p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21;$

$S = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$ (см²).

Тоді $r = \dfrac{2 \cdot 84}{15+13} = 6$ (см).

Довжина півкола $\dfrac{l}{2} = \dfrac{2\pi r}{2} = \pi r = 6\pi$ (см).

Відповідь. 6π см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
А	В	Г	Б	В	Б	В	Б	Г	А	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
3; −4	$k = 0$; $b = -2$	185	13 см

Варіант 28

3.1. Нехай власна швидкість катера — x км/год, тоді його швидкість за течією — $(x+2)$ км/год, а проти течії $(x-2)$ км/год. 40 км за течією він подолав за $\frac{40}{x+2}$ год, а 16 км проти течії — за $\frac{16}{x-2}$ год. За умовою задачі, $\frac{40}{x+2}+\frac{16}{x-2}=3$.

Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{40x-80+16x+32}{(x+2)(x-2)}=3$;

$56x-48=3(x^2-4)$; $3x^2-56x+36=0$; $x_1=18$; $x_2=\frac{2}{3}$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість катера 18 км/год.

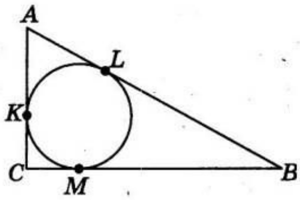
Відповідь. 18 км/год.

3.2. Нехай a, b і c — послідовні члени геометричної прогресії, тоді $b^2=ac$.

Розглянемо різницю $(a^2+b^2)(b^2+c^2)-(ab+bc)^2$. Маємо:
$a^2b^2+b^4+a^2c^2+b^2c^2-(a^2b^2+2ab^2c+b^2c^2)=b^4+a^2c^2-2ab^2c=$ $=(b^2-ac)^2=0^2=0$.

Отже, $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$, що й треба було довести.

3.3. Нехай коло вписано у прямокутний трикутник ABC, точки K, L, M — точки дотику кола відповідно зі сторонами AC, AB і BC.



За умовою, $CK=2$ см; $KA=3$ см. Тоді, за властивістю дотичних, $CM=CK=2$ см; $AL=AK=3$ см. Позначимо $BL=BM=x$. Тоді, за теоремою Піфагора, $AC^2+CB^2=AB^2$; $5^2+(2+x)^2=(3+x)^2$; $25+4+4x+x^2=9+6x+x^2$; $x=10$ (см).

Тоді $AB=x+3=10+3=13$ (см), а радіус кола, описаного навколо трикутника, $R=\frac{AB}{2}=\frac{13}{2}=6,5$ (см).

Відповідь. 6,5 см.

4.1ᵐ. Згрупуємо $((x+2)(x+12))((x+3)(x+8))=4x^2$;
$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$.

Оскільки $x=0$ не є коренем рівняння, то розділимо ліву і праву частини на x^2. Маємо:

$$\frac{x^2+14x+24}{x}\cdot\frac{x^2+11x+24}{x}=4;\ \left(x+14+\frac{24}{x}\right)\left(x+11+\frac{24}{x}\right)=4.$$

Заміна $x+11+\frac{24}{x}=t$. Тоді $t(t+3)=4$; $t^2+3t-4=0$; $t_1=1$; $t_2=-4$.

1) $x+11+\frac{24}{x}=1$; $\begin{cases}x^2+10x+24=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$ $x_1=-4$; $x_2=-6$.

2) $x+11+\frac{24}{x}=-4$; $\begin{cases}x^2+15x+24=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$ $x_{3,4}=\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$.

Відповідь. $x_1=-4$; $x_2=-6$; $x_{3,4}=\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$.

4.2ᵐ. Нехай O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, а MN — висота трапеції, що проходить через точку O. Оскільки MN — вісь симетрії трапеції, то $\angle AOM=\angle MOB=45°$, а тому $AM=MO$.

Аналогічно $ON=ND$. Тоді

$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\cdot MN=$

$=\frac{2AM+2ND}{2}\cdot MN=$

$=(AM+ND)\cdot MN=$
$=(MO+ON)\cdot MN=MN\cdot MN=$
$=MN^2=h^2$.

Відповідь. h^2.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	В	Г	А	Б	В	В	Б	Б	В	А	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{b-3}{7}$	–37	(–1; 2), (2,8; 0,1)	100°

Варіант 29

3.1. Нехай через першу трубу басейн наповнюється за x год, тоді через другу спорожнюється за $(x+3)$ год. За одну годину перша труба наповнить $\frac{1}{x}$ частину басейна, а друга — спорожнить $\frac{1}{x+3}$ частину басейна. За умовою $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{36}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

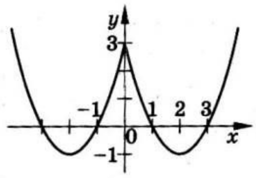
$\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{1}{36}$; $x^2+3x-108=0$; $x_1=9$; $x_2=-12$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, через першу трубу басейн наповнюється за 9 год, а через другу спорожнюється за 12 год.

Відповідь. 9 год; 12 год.

3.2. Спочатку будуємо графік для $x \geqslant 0$, а потім ураховуємо парність функції. При $x \geqslant 0$ маємо $y=x^2-4x+3$. Графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Координати її вершини:

$x_0=-\frac{-4}{2}=2$; $y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1$.



Графік перетинає вісь абсцис у точках (1; 0) і (3; 0), а вісь ординат — у точці (0; 3).

Симетрично відображуємо частину графіка, побудовану для $x \geqslant 0$, відносно осі ординат. Графік функції подано на малюнку.

Найменше значення функції дорівнює –1.

Відповідь. –1.

3.3. Нехай точка O — середина діагоналі AC, тоді $O\left(\frac{3+(-2)}{2}; \frac{-1+2}{2}\right)$, тобто $O(0,5;\ 0,5)$.

Нехай Q — середина діагоналі BD, тоді $Q\left(\frac{2+(-1)}{2}; \frac{3+(-2)}{2}\right)$, тобто $Q(0,5;\ 0,5)$.

Середини діагоналей чотирикутника $ABCD$ збігаються, тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Тому $ABCD$ — паралелограм.

$AC=\sqrt{(3+2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{34}$; $BD=\sqrt{(2+1)^2+(3+2)^2}=\sqrt{34}$.

Діагоналі паралелограма $ABCD$ рівні, тому він є прямокутником, що й треба було довести.

4.1м. Оскільки $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)$, то введемо заміни: $x+y=t$; $xy=z$. Тоді маємо систему

$$\begin{cases} t(t^2-3z)=19, \\ (z+8)t=2. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи маємо $z=\frac{2}{t}-8$, підставляємо в перше рівняння: $t^3-3t\left(\frac{2}{t}-8\right)-19=0$; $t^3+24t-25=0$;

$(t^3-1)+(24t-24)=0$; $(t-1)(t^2+t+1)+24(t-1)=0$;

$(t-1)(t^2+t+25)=0$.

Це рівняння має єдиний корінь $t=1$, тоді $z=\frac{2}{1}-8$; $z=-6$.

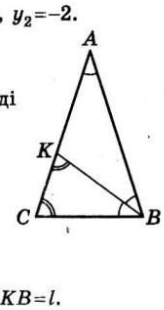
Маємо $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6. \end{cases}$ Звідси $x_1=-2$, $y_1=3$ або $x_2=3$, $y_2=-2$.

Відповідь. (–2; 3), (3; –2).

4.2м. Нехай у $\triangle ABC$: $\angle ABC=\angle ACB=72°$, тоді $\angle CAB=180°-2\cdot 72°=36°$.

BK — бісектриса трикутника; $BK=l$.

$\angle ABK=\angle KBC=\frac{72°}{2}=36°$.



Тоді:

1) $\angle KBA=\angle A$, а тому $KA=KB=l$;

2) $\angle CKB=180°-(36°+72°)=72°$, а отже, $CB=KB=l$.

Позначимо $AB=x$, тоді $KC=CA-KA=x-l$. Маємо, за властивістю бісектриси: $\frac{AB}{AK}=\frac{BC}{CK}$; $\frac{x}{l}=\frac{l}{x-l}$; $x^2-xl-l^2=0$; ураховуючи, що $x>0$, отримаємо $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}l$.

Відповідь. l; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}l$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}l$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	В	В	В	А	Б	Г	В	В	Г	Б	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{1}{m-3}$	(1; 2]	9	115°

Варіант 30

3.1. Нехай спочатку в першому ящику було x кульок, а у другому — y кульок. Якщо з другого ящика переклали до першого 10 кульок, то в першому ящику стане $(x + 10)$ кульок, а у другому — $(y - 10)$ кульок. За умовою, $x + 10 = y - 10$, тобто $y - x = 20$. Якщо з першого ящика переклали до другого 20 кульок, то в першому ящику стане $(x - 20)$ кульок, а у другому — $(y + 20)$ кульок. За умовою, $4(x - 20) = y + 20$, тобто $4x - y = 100$.

Маємо систему $\begin{cases} y - x = 20, \\ 4x - y = 100. \end{cases}$

Додамо рівняння системи: $3x = 120$; $x = 40$.

Тоді $y = 40 + 20$; $y = 60$. Отже, у першому ящику було 40 кульок, а у другому — 60 кульок.

Відповідь. 40 кульок; 60 кульок.

3.2. Рівняння $\dfrac{(x+a)(x-2a-3)}{x-7} = 0$ рівносильне системі

$\begin{cases} (x+a)(x-2a-3) = 0, \\ x \neq 7. \end{cases}$

Маємо $x_1 = -a$; $x_2 = 2a + 3$. Для того щоб рівняння мало один корінь, повинно виконуватися: $x_1 = 7$; $x_2 \neq 7$ або $x_2 = 7$; $x_1 \neq 7$. Розглянемо ці можливості.

1) $x_1 = 7$, тобто $-a = 7$; $a = -7$. Тоді $x^2 = 2 \cdot (-7) + 3$; $x^2 = -11$. Отже, при $a = -7$ рівняння, задане в умові, має єдиний корінь.

2) $x_2 = 7$, тобто $2a + 3 = 7$; $a = 2$. Тоді $x_1 = -2$. Отже, при $a = 2$ рівняння, задане в умові, також має єдиний корінь.

Відповідь. $a = -7$; $a = 2$.

3.3. Нехай $r = 4\sqrt{3}$ см — радіус кола, вписаного у правильний многокутник; $R = 8$ см — радіус кола, описаного навколо правильного многокутника; n — кількість сторін многокутника. За відомою формулою, $r = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$.

Маємо: $4\sqrt{3} = 8\cos\dfrac{180^\circ}{n}$; $\cos\dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки $n \geqslant 3$, то $\dfrac{180^\circ}{n} \leqslant 60^\circ$.

Тому $\dfrac{180^\circ}{n} = 30^\circ$; $n = 6$. Маємо правильний шестикутник. Його сторона дорівнює радіусу кола, описаного навколо шестикутника, тобто 8 см.

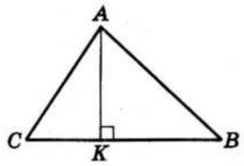
Відповідь. 6 сторін; 8 см.

4.1[м]. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)=a^2b+ab^2-2abc+b^2c+c^2b-2abc+a^2c+ac^2-2abc=b(a^2-2ac+c^2)+a(b^2-2bc+c^2)+c(a^2-2ab+b^2)=b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2$.

Оскільки $b>0$ і $(a-c)^2 \geqslant 0$, то $b(a-c)^2 \geqslant 0$. Аналогічно $a(b-c)^2 \geqslant 0$ і $c(a-b)^2 \geqslant 0$.

Тому $b(a-c)^2+a(b-c)^2+c(a-b)^2 \geqslant 0$, а отже, і $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b) \geqslant 0$, що й треба було довести.

4.2[м]. Нехай задано $\triangle ABC$; $BC = 14$ см; AK — висота трикутника; $AK = 12$ см.



За умовою, $AB + BC + AC = 42$ см, тому $AB + AC = 42 - 14 = 28$ (см).

Площа трикутника

$S = \dfrac{1}{2} BC \cdot AK = \dfrac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$ (см^2).

З іншого боку, за формулою Герона,

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Позначимо $AC = x$, тоді $AB = 28 - x$. Маємо $p = \dfrac{42}{2} = 21$ (см).

Тоді $84 = \sqrt{21(21-14)(21-x)(21-(28-x))}$;

$84^2 = 21 \cdot 7 \cdot (21 - x)(x - 7)$; $48 = 21x - x^2 - 147 + 7x$;

$x^2 - 28x + 195 = 0$. Тому $x_1 = 15$; $x_2 = 13$.

Отже, $AC = 15$ см, тоді $AB = 28 - 15 = 13$ (см) або $AC = 13$ см, тоді $AB = 28 - 13 = 15$ см.

Відповідь. 15 см і 13 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Г	В	Б	Б	В	Г	Г	Б	А	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
0,61	$(\sqrt{17} - 3) : 4$	$[-6; 1,5]$	8 см

Варіант 31

3.1. До зупинки автомобіль проїхав $\frac{1}{3}\cdot 1200 = 400$ (км), а після зупинки — $1200-400=800$ (км). Нехай x км/год — запланована швидкість. Тоді $\frac{800}{x}$ год — час, за який автомобіль мав проїхати ці 800 км. Насправді швидкість автомобіля була $(x+20)$ км/год, і він проїхав ці 800 км за $\frac{800}{x+20}$ год. За умовою $\frac{800}{x}-\frac{800}{x+20}=2$, або $\frac{400}{x}-\frac{400}{x+20}=1$.

Розв'яжемо це рівняння: $\frac{400x+8000-400x}{x(x+20)}=1$;

$x^2+20x-8000=0$; $x_1=80$; $x_2=-100$.

Другий корінь не задовольняє умову. Отже, швидкість автомобіля до зупинки була 80 км/год.

Відповідь. 80 км/год.

3.2. Спростимо вираз

$$\left(\frac{3-a}{a^2-2a+1}-\frac{2}{1-a}\right)\left(\frac{a^2-3a}{a^3+3a^2+3a+1}+\frac{2}{a^2+2a+1}\right).$$

1) $\frac{3-a}{a^2-2a+1}-\frac{2}{1-a}=\frac{3-a}{(a-1)^2}+\frac{2}{a-1}=\frac{3-a+2(a-1)}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{(a-1)^2}$.

2) $a^3+3a^2+3a+1=(a^3+1)+(3a^2+3a)=(a+1)(a^2-a+1)+3a(a+1)=$
$=(a+1)(a^2-a+1+3a)=(a+1)(a^2+2a+1)=(a+1)(a+1)^2=(a+1)^3$.

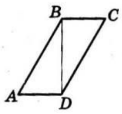
3) $\frac{a^2-3a}{a^3+3a^2+3a+1}+\frac{1}{a^2+2a+1}=\frac{a^2-3a}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+1)^2}=\frac{a^2-3a+a+1}{(a+1)^3}=$
$=\frac{a^2-2a+1}{(a+1)^3}=\frac{(a-1)^2}{(a+1)^3}$.

4) $\frac{a+1}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a-1)^2}{(a+1)^3}=\frac{1}{(a+1)^2}$.

Отже, даний в умові вираз при всіх допустимих значеннях змінної дорівнює виразу $\frac{1}{(a+1)^2}$, який є додатним як відношення двох додатних виразів. Доведено.

3.3. Нехай у паралелограмі $ABCD$: $\angle A=60°$, тоді $\angle ABC=180°-60°=120°$.

За умовою, $\angle CBD:\angle DBA=3:1$, тому позначимо $\angle DBA=x$, тоді $\angle CBD=3x$ і маємо: $x+3x=120°$; $x=30°$.



Отже, $\angle DBA=30°$, $\angle CBD=90°$, тобто діагональ BD перпендикулярна до сторін AD і BC.

Меншою є діагональ, яка сполучає тупі кути паралелограма. Отже, $BD=4\sqrt{3}$ (см) — за умовою.

У $\triangle ABD$: $AD=BD\,\mathrm{tg}\,30°=4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=4$ (см);

$AB=\frac{BD}{\sin 60°}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$ (см). Тоді периметр паралелограма

$P=2(AD+AB)=2(4+8)=24$ (см).

Відповідь. 24 см.

4.1[м]. $\begin{cases}3x^2+2y^2-4xy=17,\\ y^2-x^2=16.\end{cases}$

Це система рівнянь, ліві частини яких — однорідні многочлени. Заміна $y=tx$. Тоді маємо:

$\begin{cases}3x^2+2t^2x^2-4x^2t=17,\\ t^2x^2-x^2=16;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2(3+2t^2-4t)=17,\\ x^2(t^2-1)=16.\end{cases}$

Оскільки $x\neq 0$ і $t\neq\pm 1$, то розділимо почленно перше рівняння на друге. Маємо:

$\frac{3+2t^2-4t}{t^2-1}=\frac{17}{16}$; $15t^2-64t+65=0$; $t_1=2{,}6$; $t_2=1\frac{2}{3}$.

1) $t=2{,}6$; $\begin{cases}y=2{,}6x,\\ (2{,}6x)^2-x^2=16;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2{,}6x,\\ x^2=\frac{25}{9};\end{cases}$ $x_1=\frac{5}{3}$; $y_1=\frac{13}{3}$;

$x_2=-\frac{5}{3}$; $y_2=-\frac{13}{3}$.

2) $t=\frac{5}{3}$; $\begin{cases}y=\frac{5}{3}x,\\ \left(\frac{5}{3}x\right)^2-x^2=16;\end{cases}$ $\begin{cases}y=\frac{5}{3}x,\\ x^2=9;\end{cases}$ $x_3=3$; $y_3=5$;

$x_4=-3$; $y_4=-5$.

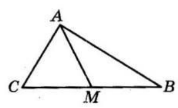
Відповідь. $\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3}\right),\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{3}\right),(3;5),(-3;-5)$.

4.2[м]. Нехай AM — медіана $\triangle ABC$; $AM=2$ см, $AC=1$ см, $AB=\sqrt{15}$ см. За формулою медіани, маємо:

$AM^2=\frac{1}{4}(2AC^2+2AB^2-CB^2)$; $4=\frac{1}{4}\left(2\cdot 1^2+2\cdot(\sqrt{15})^2-CB^2\right)$;

$CB^2=16$; $CB=4$.

Зазначимо, що $\triangle ABC$ — прямокутний ($AC^2+AB^2=CB^2$, оскільки $1^2+(\sqrt{15})^2=4^2$) з прямим кутом A. Тоді його площа



$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{15}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ (см²).

Відповідь. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см².

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Б	А	А	Г	Б	Г	А	Г	В	Г	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
94	(0; 4), (1; 3)	30	8 см

Варіант 32

3.1. Нехай чисельник шуканого дробу дорівнює x, тоді знаменник — $(x+3)$, а сам дріб — $\frac{x}{x+3}$. Після того як збільшили чисельник на 2, а знаменник — на 10, отримали дріб $\frac{x+2}{x+13}$.

За умовою $\frac{x}{x+3}-\frac{x+2}{x+13}=\frac{2}{15}$. Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{x^2+13x-(x^2+3x+2x+6)}{(x+3)(x+13)}=\frac{2}{15};\ 15(8x-6)=2(x^2+16x+39);$$

$2x^2-88x+168=0;\ x^2-44x+84=0;\ x_1=2;\ x_2=42.$

Якщо $x=2$, маємо дріб $\frac{2}{5}$, що задовольняє умову, якщо $x=42$, то маємо дріб $\frac{42}{45}$, який умову не задовольняє, бо є скоротним.

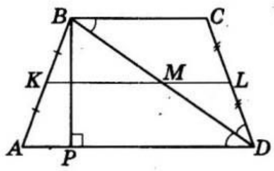
Відповідь. $\frac{2}{5}$.

3.2. $10a^2-6a-2ab+b^2+2=9a^2-6a+1+a^2-2ab+b^2+1=$ $=(3a-1)^2+(a-b)^2+1.$

Оскільки $(3a-1)^2\geqslant 0$ для всіх значень a і $(a-b)^2\geqslant 0$ для всіх значень a і b, то $(3a-1)^2+(a-b)^2+1>0$, а тому й $10a^2-6a-2ab+b^2+2>0$ для всіх значень a і b, що й треба було довести.

3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція; KL — її середня лінія, $\angle ADB=\angle BDC$.

Оскільки $KM \parallel AD$ і $BK=KA$, то, за теоремою Фалеса, M — середина BD, а тому KM — середня лінія трикутника ABD і $AD=2KM$. Аналогічно $BC=2ML$. Оскільки $AD>BC$, то й $KM>ML$. За умовою $KM=23$ см; $ML=13$ см. Тоді $AD=2\cdot 23=46$ (см), $BC=2\cdot 13=26$ (см).



$\angle ADB=\angle CBD$ (внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC та січній BD). За умовою, $\angle ADB=\angle BDC$. Тому $\angle DBC=\angle CDB$, $\triangle BCD$ рівнобедрений і $CD=BC=26$ см.

Проведемо висоту BP. Маємо

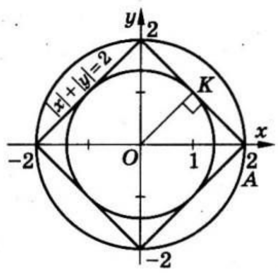
$$AP=\frac{AD-BC}{2}=\frac{46-26}{2}=10\text{ (см)}.$$

У $\triangle ABP$: $BP=\sqrt{AB^2-AP^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$ (см).

Тоді $S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot BP=\frac{26+46}{2}\cdot 24=864$ (см^2).

Відповідь. 864 см^2.

4.1^м. $\begin{cases}|x|+|y|=2,\\ x^2+y^2=a^2.\end{cases}$



Використаємо графічний метод.

Графіком рівняння $|x|+|y|=2$ є квадрат з вершинами в точках (2; 0), (0; 2), (–2; 0) і (0; –2).

Графіком рівняння $x^2+y^2=a^2$ є коло із центром у початку координат і радіусом $|a|$.

Система має чотири розв'язки, коли графіки перетинаються в чотирьох точках (див. мал.). Це досягається, якщо радіус кола дорівнює 2 або довжині відрізка OK.

У $\triangle OKA$: $KA=OK$ і $OA=2$. Маємо:

$OK^2+AK^2=2^2;\ 2OK^2=4;\ OK=\sqrt{2}$.

Отже, $|a|=2$, $a=\pm 2$ і $|a|=\sqrt{2}$, $a=\pm\sqrt{2}$.

Відповідь. ± 2 і $\pm\sqrt{2}$.

4.2^м. За відомими формулами для медіани трикутника $m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2);\ m_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)$ і $m_c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$.

За умовою $m_a^2+m_b^2=5m_c^2$, тоді $2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2=$ $=5(2a^2+2b^2-c^2)$ або після спрощення $a^2+b^2=c^2$.

Звідси випливає, що трикутник є прямокутним, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Г	А	В	Г	Б	Г	В	Б	Б	А	А

2.1	2.2	2.3	2.4
$x=2$	(6; 3)	610	14 см

Варіант 33

3.1. Нехай спочатку у кінотеатрі було x рядів по y місць у кожному. Тоді, за умовою, $xy = 390$.

Після того як додали один ряд, рядів стало $x + 1$. А після збільшення місць у кожному ряді на 4, їх стало по $y + 4$. За умовою, $(x + 1)(y + 4) = 480$.

Маємо систему $\begin{cases} xy = 390, \\ (x+1)(y+4) = 480. \end{cases}$

Розв'яжемо її. З другого рівняння маємо:

$xy + y + 4x + 4 = 480$; $390 + y + 4x + 4 = 480$; $y = 86 - 4x$.

Підставимо y у перше рівняння системи:

$x(86 - 4x) = 390$; $2x^2 - 43x + 195 = 0$.

Оскільки x — натуральне число, то маємо $x = 15$. Тому в кінотеатрі стало $15 + 1 = 16$ рядів.

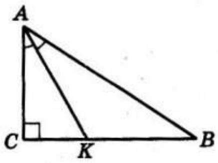
Відповідь. 16 рядів.

3.2. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -9$, $x_1x_2 = -2$. Маємо:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{(-9)^2 - 2\cdot(-2)}{-2} = -42,5.$$

Відповідь. $-42,5$.

3.3. Нехай ABC — заданий в умові трикутник; $\angle C = 90°$; $AC = 12$ см; $BC = 16$ см; AK — бісектриса трикутника.



За теоремою Піфагора,

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ (см).

Оскільки AK — бісектриса трикутника, то $\frac{AC}{CK} = \frac{AB}{BK}$. Позначимо $CK = x$, тоді $BK = 16 - x$. Маємо:

$\frac{12}{x} = \frac{20}{16 - x}$; $32x = 192$; $x = 6$ (см).

Тоді у $\triangle ACK$ ($\angle C = 90°$):

$AK = \sqrt{AC^2 + CK^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ (см).

Відповідь. $6\sqrt{5}$ см.

4.1м. *Доведення.* Будемо перетворювати ліву частину, намагаючись отримати суму $a + b$, замінивши її потім на 1. Також використаємо тотожність $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

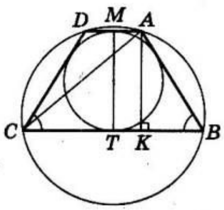
Маємо: $\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{a^4 - a - b^4 + b}{(a^3 - 1)(b^3 - 1)} = \frac{a^4 - b^4 - (a - b)}{a^3b^3 - (a^3 + b^3) + 1} =$

$= \frac{(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) - (a - b)}{a^3b^3 - (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 1} = \frac{(a - b)((a + b)^2 - 2ab - 1)}{a^3b^3 - ((a + b)^2 - 3ab) + 1} =$

$= \frac{-2ab(a - b)}{a^3b^3 + 3ab} = \frac{2ab(b - a)}{ab(a^2b^2 + 3)} = \frac{2(b - a)}{a^2b^2 + 3}$.

Умовну рівність доведено.

4.2м. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, у яку вписано коло радіусом r і описано коло радіусом R. Необхідно знайти $\frac{r}{R}$, якщо $\angle ABC = \alpha$.



Позначимо $AD = 2a$; $BC = 2b$; $AB = c$. Оскільки трапеція рівнобічна описана, то $2AB = AD + BC$; $2c = 2a + 2b$; $c = a + b$.

Проведемо висоту $AK = 2r$.

У $\triangle AKB$ ($\angle K = 90°$): $AK = AB\sin\alpha$; $2r = c\sin\alpha$.

Знайдемо R як радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$:

$2R = \frac{AC}{\sin\alpha}$; $AC = \sqrt{AK^2 + KC^2}$.

$KC = CT + TK = CT + MA = \frac{2b}{2} + \frac{2a}{2} = a + b = c$.

Тоді: $2R = \frac{\sqrt{(c\sin\alpha)^2 + c^2}}{\sin\alpha} = \frac{c\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$.

Маємо $\frac{r}{R} = \frac{2r}{2R} = \frac{c\sin\alpha}{\frac{c\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}$.

Відповідь. $\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	Б	В	Б	Г	В	Г	Г	А	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{x}{x+3}$	$\frac{x+3}{2x+2}$	(4; 1), (–2; –2)	16 см

Варіант 34

3.1. Нехай у початковому сплаві було x кг цинку. Тоді відсоток міді у сплаві дорівнює $\frac{2}{2+x}\cdot 100\,\%$. Після того як у цей сплав додали 6 кг міді, відсоток міді став $\frac{8}{8+x}\cdot 100\,\%$. За умовою, $\frac{8}{8+x}\cdot 100\,\% - \frac{2}{2+x}\cdot 100\,\% = 30\,\%$, або $\frac{8}{8+x}-\frac{2}{2+x}=\frac{3}{10}$.

Розв'яжемо це рівняння: $\frac{16+8x-16-2x}{(8+x)(2+x)}=\frac{3}{10}$;

$10\cdot 6x=3(16+10x+x^2)$; $3x^2-30x+48=0$; $x^2-10x+16=0$; $x_1=2$; $x_2=8$.

Обидва корені задовольняють умову задачі. У першому випадку сплав містив 2 кг цинку і його загальна маса була 4 кг, а у другому випадку він містив 8 кг цинку і його загальна маса була 10 кг.

Відповідь. 4 кг або 10 кг.

3.2. $p=\frac{m}{n}$, n — кількість усіх двоцифрових чисел; $n=90$, m — кількість двоцифрових чисел, кратних 4 або 5.

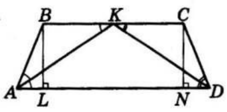
Числа, кратні 4, такі: 12; 16; ...; 92; 96: Оскільки $12=4\cdot 3$; $16=4\cdot 4$; ...; $92=4\cdot 23$; $96=4\cdot 24$, то цих чисел 22.

Числа, кратні 5, такі: 10; 15; ...; 90; 95. Оскільки $10=5\cdot 2$; $15=5\cdot 3$; ...; $90=5\cdot 18$; $95=5\cdot 19$, то цих чисел 18.

Але числа 20, 40, 60, 80 були враховані двічі. Тому $m=$ $=22+18-4=36$ і $p=\frac{36}{90}=\frac{2}{5}=0{,}4$.

Відповідь. 0,4.

3.3. Нехай $ABCD$ — задана в умові трапеція; бісектриси кутів A і D при основі AD перетнулися в точці K на стороні BC; $AB=10$ см; $CD=17$ см. $\angle BKA=\angle KAD$ (внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC та січній AK).



$\angle BAK=\angle KAD$ (за умовою), тому $\angle BAK=\angle BKA$, $\triangle ABK$ — рівнобедрений: $BK=AB=10$ см.

Аналогічно отримаємо $KC=CD=17$ см. Тоді $BC=BK+KC=$ $=10+17=27$ (см).

Проведемо висоти BL і CN; $BL=CN=8$ см.

У $\triangle BLA$: $AL=\sqrt{AB^2-BL^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$ (см),

у $\triangle CND$: $ND=\sqrt{CD^2-CN^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$ (см).

$BCNL$ — прямокутник; $LN=BC=27$ (см), тоді $AD=AL+LN+$ $+ND=6+27+15=48$ (см).

Площа трапеції $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot BL=\frac{48+27}{2}\cdot 8=300$ (см^2).

Відповідь. 300 см^2.

4.1м. Підмодульні вирази перетворюються в нуль, якщо $x=-2$, $x=1$, $x=4$.

1) $x<-2$, тоді $|x+2|=-(x+2)$; $|x-1|=-(x-1)$; $|x-4|=-(x-4)$.

Маємо: $\begin{cases}x<-2,\\-x-2+1-x+x-4>3;\end{cases}$ $\begin{cases}x<-2,\\x<-8;\end{cases}$ $x<-8$.

2) $-2\leqslant x<1$, тоді $|x+2|=x+2$; $|x-1|=-(x-1)$; $|x-4|=-(x-4)$.

Маємо: $\begin{cases}x+2+1-x+x-4>3,\\-2\leqslant x<1;\end{cases}$ $\begin{cases}x>4,\\-2\leqslant x<1,\end{cases}$ система не має розв'язків.

3) $1\leqslant x<4$, тоді $|x+2|=x+2$; $|x-1|=x-1$; $|x-4|=-(x-4)$.

Маємо: $\begin{cases}x+2+x-1+x-4>3,\\1\leqslant x<4;\end{cases}$ $\begin{cases}x>2,\\1\leqslant x<4;\end{cases}$ $2<x<4$.

4) $x\geqslant 4$, тоді $|x+2|=x+2$; $|x-1|=x-1$; $|x-4|=x-4$.

Маємо: $\begin{cases}x+2+x-1-x+4>3,\\x\geqslant 4;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-2,\\x\geqslant 4;\end{cases}$ $x\geqslant 4$.

Об'єднуючи відповіді, маємо $x\in(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;-8)\cup(2;+\infty)$.

4.2м. Використовуючи формулу медіани, маємо:

$5^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$, $(\sqrt{73})^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$

і $(2\sqrt{13})^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)$, де a, b, c — сторони трикутника.

Маємо систему $\begin{cases}2a^2+2b^2-c^2=100,\\2b^2+2c^2-a^2=292,\\2a^2+2c^2-b^2=208.\end{cases}$

Склавши ці три рівняння почленно, маємо: $3(a^2+b^2+c^2)=600$; $a^2+b^2+c^2=200$; $2a^2+2b^2+2c^2=400$. Віднімаючи від останнього рівняння по черзі рівняння системи, матимемо: $3c^2=300$; $c^2=100$; $3a^2=108$; $a^2=36$; $3b^2=192$; $b^2=64$.

Оскільки $36+64=100$, то $a^2+b^2=c^2$, а тому трикутник прямокутний, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	В	А	Г	Б	В	Б	В	В	А	Б	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{x-1}{2(x+1)}$	$x<0$	3	$p=3$ або $p=-5$

Варіант 35

3.1. Нехай $\overline{ab} = 10a + b$ — шукане двоцифрове число. За умовою, $3(a + b) = 10a + b$, тобто $2b = 7a$. Також, за умовою, $\overline{ab} + 45 = \overline{ba}$, тобто $10a + b + 45 = 10b + a$. Звідси маємо: $9a - 9b = -45$; $b - a = 5$.

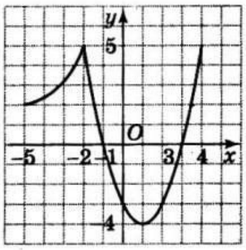
Отримали систему $\begin{cases} 2b = 7a, \\ b - a = 5. \end{cases}$

Розв'яжемо її: $b = 5 + a$.

Тоді $2(5 + a) = 7a$; $5a = 10$; $a = 2$. Тому $b = 5 + 2$; $b = 7$, а шукане число — 27.

Відповідь. 27.

3.2. Графіком функції $f(x) = -\dfrac{10}{x}$ є гіпербола. Графіком функції $g(x) = x^2 - 2x - 3$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Координати вершини параболи $x_0 = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1$; $y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$.



Графік функції

$$y = \begin{cases} -\dfrac{10}{x}, \text{ якщо } x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, \text{ якщо } x > -2 \end{cases}$$

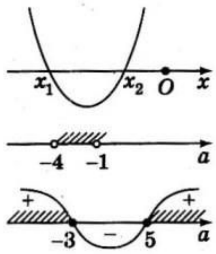
зображено на малюнку. Найменшим значенням цієї функції є -4.

Відповідь. -4.

3.3. Нехай загальна кількість кутів (а також і сторін) многокутника дорівнює n. Маємо три кути по $120°$ і $(n - 3)$ кутів по $160°$. Тоді сума кутів трикутника дорівнює $3 \cdot 120° + (n - 3) \cdot 160°$. З іншого боку, за відомою формулою, сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Маємо рівняння $360° + 160° \cdot (n - 3) = 180° \cdot (n - 2)$. Розв'яжемо його: $360 + 160n - 480 = 180n - 360$; $20n = 240$; $n = 12$.

Відповідь. 12.

4.1[м]. Початкова умова $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, де x_1 і x_2 — корені рівняння. Позначимо $y(x) = x^2 - (a + 1)x + a + 4$. Для виконання умови необхідно:



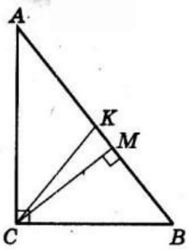
$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2} < 0, \\ y(0) > 0, \\ D \geqslant 0, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} a + 1 < 0, \\ a + 4 > 0, \\ (a+1)^2 - 4(a+4) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < a < -1, \\ a^2 - 2a - 15 \geqslant 0, \end{cases} \begin{cases} -4 < a < -1, \\ (a-5)(a+3) \geqslant 0. \end{cases}$$

Маємо остаточно: $a \in (-4; -3]$.

Відповідь. $(-4; -3]$.

4.2[м]. Нехай задано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) і $P_{\triangle ABC} = 72$ см, CK — його медіана; CM — висота. Позначимо $CK = x$, тоді гіпотенуза $AB = 2x$, а $CM = x - 7$.



Нехай катети трикутника дорівнюють a і b. Тоді $a^2 + b^2 = (2x)^2$, тобто

$(a + b)^2 - 2ab = 4x^2$. (*)

Виражаючи двічі площу трикутника ABC, отримаємо

$S = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}AB \cdot CM$, тобто $ab = 2x(x - 7)$.

Також маємо:

$a + b + 2x = 72$, $a + b = 72 - 2x$.

Підставимо отримані дані у (*). Маємо:

$(72 - 2x)^2 - 2 \cdot 2x(x - 7) = 4x^2$; $x^2 + 65x - 1296 = 0$.

Ураховуючи, що $x > 0$, отримаємо $x = 16$. Тоді гіпотенуза $AB = 2 \cdot 16 = 32$ (см).

Відповідь. 32 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	В	В	В	Г	Б	А	А	В	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
$3{,}41 \cdot 10^{-2}$	$\dfrac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} + 3\sqrt{y}}$	-2; -1; 0; 1	(0; 2)

Варіант 36

3.1. Нехай швидкість першого автомобіля дорівнює x км/год, а другого — y км/год. За 2 год перший проїхав $2x$ км, а другий — $2y$ км. За умовою, $2x - 2y = 20$, тобто $x - y = 10$. На весь шлях перший витрачає $\frac{180}{x}$ год, а другий — $\frac{180}{y}$ год. Оскільки 15 хв $= \frac{1}{4}$ год, то маємо рівняння $\frac{180}{y} - \frac{180}{x} = \frac{1}{4}$.

Отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 10, \\ \frac{180}{y} - \frac{180}{x} = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Розв'яжемо її. Отже, $x = 10 + y$, тоді

$\frac{180}{y} - \frac{180}{10+y} = \frac{1}{4}$; $\frac{1800 + 180y - 180y}{y(10+y)} = \frac{1}{4}$;

$y^2 + 10y - 7200 = 0$; $y_1 = 80$; $y_2 = -30$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Тоді $x = 90$.

Отже, швидкість першого автомобіля дорівнює 90 км/год, а другого — 80 км/год.

Відповідь. 90 км/год; 80 км/год.

3.2. Маємо $n^2 - 12n + 17 = n^2 - 2 \cdot n \cdot 6 + 6^2 - 6^2 + 17 = (n-6)^2 - 19$. Отже, $a_n = (n-6)^2 - 19$. Найменшим буде член послідовності, для якого $n - 6 = 0$, тобто $a_6 = 0^2 - 19 = -19$.

Відповідь. $a_6 = -19$.

3.3. Нехай коло із центром у точці O вписано в рівнобічну трапецію; $OC = 6$ см; $OD = 8$ см. DO — бісектриса кута D, а CO — бісектриса кута C.

У $\triangle COD$: $\angle COD = 180° - (\angle OCD + \angle CDO) =$

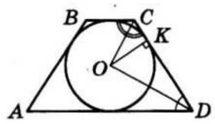
$= 180° - \left(\frac{\angle BCD}{2} + \frac{\angle CDA}{2}\right) = 180° - \frac{\angle BCD + \angle CDA}{2} = 180° - \frac{180°}{2} =$

$= 90°$.

Отже, $\triangle COD$ — прямокутний; радіус кола OK є висотою цього прямокутного трикутника.

У $\triangle COD$: $CD = \sqrt{CO^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см). Виражаючи двічі площу $\triangle COD$, маємо: $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD = \frac{1}{2} CD \cdot OK$.

Звідси $OK = \frac{OC \cdot OD}{DC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$ (см).



Отже, $r = 4{,}8$ (см) — радіус кола.

Тоді його довжина $l = 2\pi r = 9{,}6\pi$ (см).

Відповідь. $9{,}6\pi$ см.

4.1ᴹ. Спростимо вираз $\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2 + 4}$, де $a \neq 0$. Маємо

$\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{a^4 - 8a^2 + 16 + 16a^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 8a^2 + 16}{4a^2}} =$

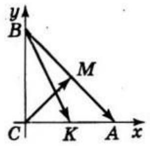
$= \sqrt{\frac{(a^2+4)^2}{(2a)^2}} = \frac{|a^2+4|^2}{|2a|^2}$.

Оскільки $a^2 + 4 > 0$ для всіх значень a, то $|a^2 + 4| = a^2 + 4$. Крім того, $|2a| = 2|a|$. Тоді

$$\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2 + 4}} = \frac{a^2+4}{a \cdot \frac{a^2+4}{2|a|}} = \frac{2|a|}{a} = \begin{cases} 2, \text{ якщо } a > 0, \\ -2, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Відповідь. 2, якщо $a > 0$; -2, якщо $a < 0$.

4.2ᴹ. *Доведення.* Для доведення введемо систему координат так, що початок координат збігається з вершиною прямого кута трикутника — точкою C, а точки A і B належать додатним півосям координат.



Маємо: $C(0;\ 0)$, $A(2\sqrt{2};\ 0)$, $B(0;\ 2)$. Оскільки K — середина AC, то $K\left(\frac{0+2\sqrt{2}}{2};\ \frac{0+0}{2}\right)$, тобто $K(\sqrt{2};\ 0)$ і $\overrightarrow{BK}(\sqrt{2}-0;\ 0-2)$, або $\overrightarrow{BK}(\sqrt{2};\ -2)$. M — середина AB, тому $M\left(\frac{2\sqrt{2}+0}{2};\ \frac{0+2}{2}\right)$, тобто $M(\sqrt{2};\ 1)$. Тоді $\overrightarrow{CM}(\sqrt{2}-0;\ 1-0)$, або $\overrightarrow{CM}(\sqrt{2};\ 1)$.

Оскільки $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{CM} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot 1 = 0$, то $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{CM}$, тобто медіани трикутника BK і CM перпендикулярні, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	В	Б	В	Г	А	В	В	Г	Б	А	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
$12\sqrt{6} + 24$	$y = 4x^2 + 2$	$\frac{1}{9}$	78 см²

Варіант 37

3.1. Нехай слюсар може виконати замовлення, працюючи самостійно, за x год, тоді перший його учень може виконати за $(x+4)$ год, а другий — за $(x+9)$ год. За одну годину слюсар виконує $\frac{1}{x}$ частину замовлення, перший учень — $\frac{1}{x+4}$ частину замовлення, а другий — $\frac{1}{x+9}$.

Оскільки слюсар виконує замовлення за той самий час, що й два учні, які працюють разом, то продуктивність праці слюсаря $\frac{1}{x}$ дорівнює сумарній продуктивності праці учнів $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+9}$. Маємо рівняння $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+9}$.

Розв'яжемо це рівняння: $\frac{1}{x}=\frac{x+9+x+4}{(x+4)(x+9)}$; $x^2+13x+36=2x^2+13x$; $x^2=36$. Ураховуючи, що $x>0$, маємо $x=6$. Отже, слюсар, працюючи самостійно, може виконати замовлення за 6 год, один з його учнів — за 10 год, а інший — за 15 год.

Відповідь. 6 год; 10 год; 15 год.

3.2. Область допустимих значень функції $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{3x}{x}$ знайдемо із системи:

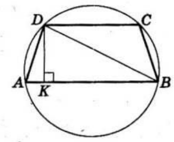
$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 0;\end{cases}\quad x\in[-2;\,0)\cup(0;\,2].$$

Для таких значень x функцію можна спростити $y_1=\sqrt{4-x^2}+3$. При $x\in[-2;\,0)\cup(0;\,2]$ маємо $x^2>0$; $-x^2<0$; $4-x^2<4$. Тоді $0\leqslant\sqrt{4-x^2}<\sqrt{4}$; $0\leqslant\sqrt{4-x^2}<2$. Тому $3\leqslant\sqrt{4-x^2}+3<5$.

Отже, область значень початкової функції — множина $[3;\,5)$.

Відповідь. $[3;\,5)$.

3.3. Нехай $ABCD$ — задана в умові трапеція. $AB=16$ см і $DC=12$ см — основи трапеції.



DK — висота трапеції; $DK=14$ см. Знайдемо радіус R кола, описаного навколо трапеції, як радіус кола, описаного навколо трикутника ADB, за формулою $2R=\frac{DB}{\sin A}$.

$$AK=\frac{AB-DC}{2}=\frac{16-12}{2}=2\text{ (см)},$$

тоді $KB=AB-AK=16-2=14$ (см).

У $\triangle DKB$ ($\angle K=90^\circ$):

$DB=\sqrt{DK^2+KB^2}=\sqrt{14^2+14^2}=14\sqrt{2}$ (см).

У $\triangle DKA$ ($\angle K=90^\circ$):

$AD=\sqrt{AK^2+KD^2}=\sqrt{2^2+14^2}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$ (см).

Також у цьому трикутнику $\sin A=\frac{DK}{AD}$.

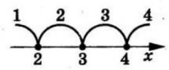
$\sin A=\frac{14}{10\sqrt{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

Тоді $2R=\frac{14\sqrt{2}}{\frac{7}{5\sqrt{2}}}=\frac{14\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}{7}=20$ (см).

Довжина описаного кола $l=2\pi R=20\pi$ (см).

Відповідь. 20π см.

4.1м. $|x-2|+|x-3|\geqslant|x-4|$. Числа, які перетворюють у нулі підмодульні вирази, такі: $x=2$; $x=3$; $x=4$.



1) $x<2$, тоді

$|x-2|=-(x-2)$; $|x-3|=-(x-3)$; $|x-4|=-(x-4)$.

Маємо: $\begin{cases}x<2,\\ -x+2-x+3\geqslant -x+4;\end{cases}$ $\begin{cases}x<2,\\ -x\geqslant -1;\end{cases}$ $\begin{cases}x<2,\\ x\leqslant 1;\end{cases}$ $x\leqslant 1$.

2) $2\leqslant x<3$, тоді

$|x-2|=x-2$; $|x-3|=-(x-3)$; $|x-4|=-(x-4)$.

Маємо: $\begin{cases}2\leqslant x<3,\\ x-2-x+3\geqslant -x+4;\end{cases}$ $\begin{cases}2\leqslant x<3,\\ x\geqslant 3;\end{cases}$ немає розв'язків.

3) $3\leqslant x<4$, тоді $|x-2|=x-2$; $|x-3|=x-3$; $|x-4|=-(x-4)$.

Маємо: $\begin{cases}3\leqslant x<4,\\ x-2+x-3\geqslant -x+4;\end{cases}$ $\begin{cases}3\leqslant x<4,\\ 3x\geqslant 9;\end{cases}$ $\begin{cases}3\leqslant x<4,\\ x\geqslant 3;\end{cases}$ $3\leqslant x<4$.

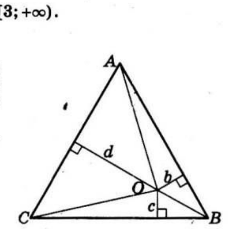
4) $x>4$, тоді $|x-2|=x-2$; $|x-3|=x-3$; $|x-4|=x-4$.

Маємо: $\begin{cases}x>4,\\ x-2+x-3\geqslant x-4;\end{cases}$ $\begin{cases}x>4,\\ x\geqslant 1;\end{cases}$ $x>4$.

Об'єднуючи, маємо $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

4.2м. Нехай O — задана точка, відстань від якої до сторони AB дорівнює b, до сторони BC — c і до сторони AC — d.



Позначимо $AB=BC=CA=a$, висоту трикутника h.

Маємо:

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA}$;

$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}ad$;

$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a(b+c+d)$; $h=b+c+d$, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	Г	В	Г	Б	А	Г	Б	Б	А	В	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$x=9$	$(0;\,2)$	5; 2	7 см

Варіант 38

3.1. Нехай $\overline{ab} = 10a + b$ — шукане двоцифрове натуральне число. За умовою, $a^2 + b^2 = 45$.

Також, за умовою, $\overline{ab} + 27 = \overline{ba}$, тобто $10a + b + 27 = 10b + a$. Звідси маємо: $9b - 9a = 27$; $b - a = 3$.

Отримали систему $\begin{cases} b - a = 3, \\ a^2 + b^2 = 45. \end{cases}$

Розв'яжемо її: $b = 3 + a$; $a^2 + (3 + a)^2 = 45$; $a^2 + 9 + 6a + a^2 - 45 = 0$; $a^2 + 3a - 18 = 0$. Ураховуючи те, що a — цифра, маємо $a = 3$, тоді $b = 3 + 3 = 6$, а шукане число 36.

Відповідь. 36.

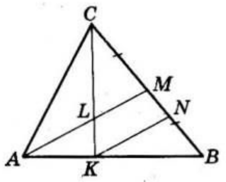
3.2. $x^3 - 8x^2 + 8x - 1 = 0$; $(x^3 - 1) + (8x - 8x^2) = 0$; $(x - 1)(x^2 + x + 1) - 8x(x - 1) = 0$; $(x - 1)(x^2 + x + 1 - 8x) = 0$; $(x - 1)(x^2 - 7x + 1) = 0$.

1) $x - 1 = 0$; $x_1 = 1$.

2) $x^2 - 7x + 1 = 0$; $x_{2,3} = \dfrac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4}}{2} = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь. $x_1 = 1$; $x_{2,3} = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

3.3. Нехай AM — медіана $\triangle ABC$, а точка K така, що $AK : KB = 2 : 3$. Треба знайти відношення $CL : LK$.



Проведемо $KN \parallel AM$, позначимо $CM = MB = x$.

Оскільки $AM \parallel KN$, то, за теоремою Фалеса,

$\dfrac{MN}{NB} = \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{2}{3}$. Тоді $MN = \dfrac{2}{5}MB = \dfrac{2}{5}x$.

Знову використаємо той факт, що $KN \parallel AM$, і теорему Фалеса: $\dfrac{CL}{LK} = \dfrac{CM}{NM}$. Маємо: $\dfrac{CL}{LK} = \dfrac{x}{\frac{2}{5}x} = \dfrac{5}{2}$.

Відповідь. 5 : 2.

4.1ᵐ. Використаємо метод математичної індукції.

1) При $n = 1$ маємо $1^2 = 1$ і $\dfrac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$.

2) Припустимо, що при $n = k$ рівність виконується, тобто $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3) Доведемо, що рівність виконується при $n = k + 1$, тобто виконується рівність

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Маємо: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

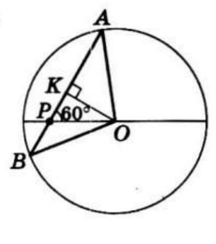
$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1) \cdot 2(k+1,5)(k+2)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

4) Рівність правильна для будь-якого n.

4.2ᵐ. На малюнку точка P належить діаметру кола, AB — хорда, $AP = 8$ см; $BP = 3$ см, тоді $AB = 3 + 8 = 11$ (см).



Проведемо перпендикуляр OK з точки O до хорди AB. Оскільки $\triangle AOB$ — рівнобедрений, то $AK = KB = \dfrac{11}{2} = 5,5$ (см).

$PK = AP - AK = 8 - 5,5 = 2,5$ (см).

У $\triangle OPK$: $OK = PK\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 2,5\sqrt{3}$ (см).

У $\triangle AOK$: $AO = \sqrt{AK^2 + KO^2} = \sqrt{5,5^2 + (2,5\sqrt{3})^2} = \sqrt{49} = 7$.

Отже, радіус кола дорівнює 7 см, а його довжина $l = 2\pi r = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$ (см).

Відповідь. 14π см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	В	А	Б	Б	Г	В	Б	А	Г	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
$\dfrac{3}{a+2}$	$-\dfrac{1}{3}(x+6) \times$ $\times (x-3)$	(1; 2), (−1; −2)	16 см

Варіант 39

3.1. Нехай швидкість течії річки, а тому й плота — x км/год, тоді швидкість човна, що рухався за течією, — $(18+x)$ км/год. Щоб подолати 20 км, пліт витратив $\frac{20}{x}$ год, а човен — $\frac{20}{18+x}$ год. Оскільки $18-9=9$ (год), то за умовою задачі маємо рівняння $\frac{20}{x}-\frac{20}{18+x}=9$.

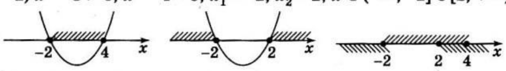
Розв'яжемо це рівняння: $\frac{360+20x-20x}{x(18+x)}=9$; $40=18x+x^2$; $x^2+18x-40=0$; $x_1=2$; $x_2=-20$.

Другий корінь не задовольняє умову. Отже, швидкість плота 2 км/год, був він у дорозі до того моменту, коли його наздогнав човен, $\frac{20}{2}=10$ (год), а тому це відбулося о 19 год.

Відповідь. О 19 годині.

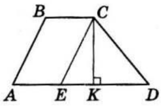
3.2. $\begin{cases} x^2-2x-8 \leqslant 0, \\ x^2-4 \geqslant 0, \end{cases}$

1) $x^2-2x-8 \leqslant 0$; $x^2-2x-8=0$; $x_1=-2$; $x_2=4$; $x \in [-2; 4]$.
2) $x^2-8 \geqslant 0$; $x^2-4=0$; $x_1=-2$; $x_2=2$; $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.



Отже, $x=-2$ або $x \in [2; 4]$.
Цілими розв'язками системи є числа -2; 2; 3; 4.
Відповідь. -2; 2; 3; 4.

3.3. Нехай $ABCD$ — задана в умові трапеція; $AD=14$ см і $BC=10$ см — основи трапеції; $AB=13$ см; $CD=15$ см.



Площа трапеції $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot CK$, де CK — висота трапеції.

Проведемо $CE \parallel AB$, де $E \in AD$. Тоді $ABCE$ — паралелограм (має дві пари паралельних сторін) і $CE=AB=13$ см; $AE=BC=10$ см.

Тоді $ED=AD-AE=14-10=4$ (см).

CK — висота $\triangle CED$: $CK=\frac{2S_{\triangle CED}}{ED}$.

$S_{\triangle CED}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p=\frac{13+15+4}{2}=16$ (см).

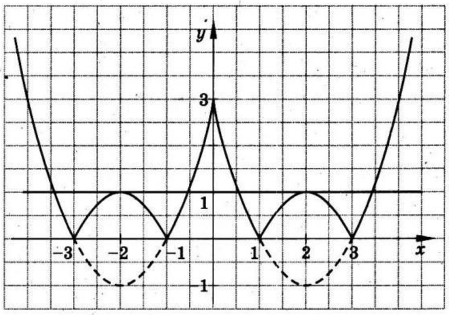
$S_{\triangle CED}=\sqrt{16(16-13)(16-15)(16-4)}=24$ (см^2).

Отже, $CK=\frac{2\cdot 24}{4}=12$ (см).

Тоді площа трапеції $S=\frac{14+10}{2}\cdot 12=144$ (см^2).

Відповідь. 144 см^2.

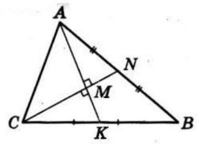
4.1^м. Використаємо графічний метод. Ураховуємо те, що функція $y=|x^2-4|x|+3|$ є парною, та будуємо за таким планом: $y=x^2-4x+3 \to y=x^2-4|x|+3 \to y=|x^2-4|x|+3|$ (див. мал.). Рівняння $|x^2-4|x|+3|=a$ має рівно шість розв'язків, коли графіки функцій $y=|x^2-4|x|+3|$ і $y=a$ мають шість точок перетину.



Пряма $y=a$ паралельна осі абсцис і перетинає графік функції $y=|x^2-4|x|+3|$ у шести точках при $a=1$.

Відповідь. $a=1$.

4.2^м. Нехай задано $\triangle ABC$; $AB=6$ см; $CB=8$ см; AK і CN — медіани; $AK \perp CN$, AK і CN перетинаються в точці M.



Позначимо $AK=m_a$; $CN=m_c$, тоді $AM=\frac{2}{3}m_a$; $MK=\frac{1}{3}m_a$; $CM=\frac{2}{3}m_c$; $MN=\frac{1}{3}m_c$.

У $\triangle CMK$: $\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2+\left(\frac{1}{3}m_a\right)^2=4^2$; у $\triangle AMN$: $\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2+\left(\frac{1}{3}m_c\right)^2=3^2$.

Додамо почленно: $\frac{5}{9}(m_a^2+m_c^2)=25$; $m_a^2+m_c^2=45$.

У $\triangle ACM$: $AC=\sqrt{AM^2+CM^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{m_a^2+m_c^2}=$
$=\frac{2}{3}\sqrt{45}=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$ (см).

Відповідь. $2\sqrt{5}$ см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	В	Б	Г	Г	Б	Г	В	В	Г	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
-2	$(-8; 16]$	$(-\infty; 8]$	9 см

Варіант 40

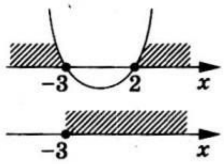
3.1. Нехай швидкість потяга до зупинки дорівнює x км/год, тоді його швидкість після зупинки $(x - 10)$ км/год.

До зупинки він проїхав $\frac{1}{3} \cdot 300 = 100$ (км) і витратив на це $\frac{100}{x}$ год. Після зупинки потяг проїхав $300 - 100 = 200$ (км) і витратив на це $\frac{200}{x-10}$ год. За умовою, $\frac{100}{x} + 1 + \frac{200}{x-10} = 8$. Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{100}{x} + \frac{200}{x-10} = 7$; $\frac{100x - 1000 + 200x}{x(x-10)} = 7$; $7(x^2 - 10x) = 300x - 1000$; $7x^2 - 370x + 1000 = 0$. Ураховуючи те, що $x > 10$, маємо $x = 50$.

Отже, швидкість потяга до зупинки дорівнює 50 км/год.

Відповідь. 50 км/год.

3.2. $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geqslant 0, \\ x(x-1) - (x+1)^2 \leqslant 8. \end{cases}$



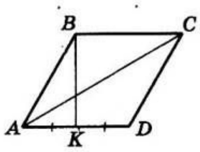
Рівняння, що відповідає першій нерівності $x^2 + x - 6 = 0$, має корені $x = 2$; $x = -3$. Розв'язками цієї нерівності є множина $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Розв'яжемо другу нерівність системи: $x^2 - x - x^2 - 2x - 1 \leqslant 8$; $-3x \leqslant 9$; $x \geqslant -3$.

Отримаємо розв'язки системи $x = -3$ і $x \in [2; +\infty)$.

Відповідь. $x = -3$; $x \in [2; +\infty)$.

3.3. Нехай $ABCD$ — заданий в умові ромб, BK — висота ромба. Нехай $AB = AD = a$, тоді, за умовою, $AK = KD = \frac{a}{2}$.



У $\triangle ABK$ ($\angle K = 90°$): $\cos A = \frac{AK}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$, тому $\angle A = 60°$. Тоді $\angle ABC = 120°$.

AC — більша діагональ ромба, $AC = 4\sqrt{3}$ см (за умовою).

У $\triangle ABC$, за теоремою косинусів,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos ABC$;

$(4\sqrt{3})^2 = a^2 + a^2 - 2^2\cos 120°$; $16 \cdot 3 = 3a^2$. Звідси, $a = 4$ см.

Тоді площа ромба

$S = AB \cdot AD \cdot \sin BAD = a^2 \sin 60° = 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь. $8\sqrt{3}$ см².

4.1м. $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Подамо $3x^2$ як $4x^2 - x^2$ і згрупуємо доданки:

$(4x^4 - 16x^3 + 4x^2) - (x^2 - 4x + 1) = 0$;

$4x^2(x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 4x + 1) = 0$;

$(x^2 - 4x + 1)(4x^2 - 1) = 0$.

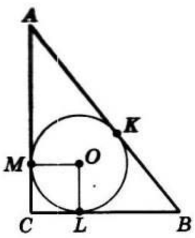
Маємо: $x^2 - 4x + 1 = 0$ або $4x^2 - 1 = 0$.

1) $x^2 - 4x + 1 = 0$; $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$;

2) $4x^2 - 1 = 0$; $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$.

Відповідь. $2 \pm \sqrt{3}$; $\pm\frac{1}{2}$.

4.2м. Нехай точка O — центр кола, вписаного у прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C, $CO = \sqrt{8}$ см (за умовою).



M, K, L — точки дотику кола відповідно до сторін AC, AB і BC. За умовою, $BK : KA = 2 : 3$.

Оскільки $OM \perp AC$, $OL \perp BC$, $MO = OL$ і $\angle C = 90°$, то $MOLC$ — квадрат, сторони якого дорівнюють радіусу r вписаного кола.

У $\triangle COL$: $CO^2 = CL^2 + LO^2$; $(\sqrt{8})^2 = r^2 + r^2$; $r = 2$ (см).

Позначимо $BK = 2x$; $AK = 3x$, тоді $AB = 5x$. За властивістю відрізків дотичних, $BL = BK = 2x$; $AM = AK = 3x$; $CM = CL = 2$. Тоді $CB = 2x + 2$; $AC = 3x + 2$.

За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + CB^2$;

$(5x)^2 = (3x + 2)^2 + (2x + 2)^2$; $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Ураховуючи, що $x > 0$, маємо $x = 2$. Тоді $AB = 10$ см, $AC = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ (см), $CB = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ (см).

Відповідь. 6 см, 8 см, 10 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	Г	В	В	А	Г	В	Б	Г	А	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
3	$-2a^3b^2$	$[-2; 0) \cup (0; 1]$	63 см

Варіант 41

3.1. Нехай x км/год — швидкість велосипедиста, тоді $(x+45)$ км/год — швидкість мотоцикліста. Від міста A до міста B велосипедист проїхав за $\frac{60}{x}$ год, а мотоцикліст — за $\frac{60}{x+45}$ год. За умовою $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+45}=3$, або $\frac{20}{x}-\frac{20}{x+45}=1$.

Розв'яжемо отримане рівняння:
$\frac{20x+900-20x}{x(x+45)}=1$; $x^2+45x-900=0$; $x_1=15$; $x_2=-60$.

Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість велосипедиста 15 км/год.

Відповідь. 15 км/год.

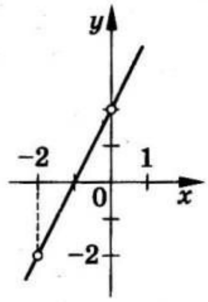
3.2. $y=\frac{x^2+6x+8}{x+2}-\frac{2x-x^2}{x}$. Областю допустимих значень є множина всіх чисел, крім -2 і 0. Спростимо функцію на ОДЗ:

$y=\frac{(x+2)(x+4)}{x+2}-\frac{x(2-x)}{x}$; $y=x+4-(2-x)$;

$y=2x+2$.

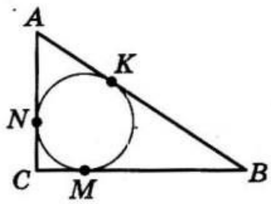
Отже, графіком функції є пряма $y=2x+2$ з «виколотими» точками (0; 2) і (–2; –2).

Графік зображено на малюнку.



3.3. Нехай коло вписано у прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB; K, N, M — точки дотику кола відповідно до сторін AB, AC і BC.

За умовою, $AK=4$ см, $KB=6$ см. За властивістю дотичних, $AN=AK=4$ см; $BM=BK=6$ см, а також $CN=CM$.



Позначимо $CN=CM=x$. За теоремою Піфагора, маємо:
$AB^2=AC^2+CB^2$; $10^2=(4+x)^2+(6+x)^2$;
$100=16+8x+x^2+36+12x+x^2$; $x^2+10x-24=0$.

Звідси $x_1=2$; $x_2=-12$. Другий корінь не задовольняє умову. Маємо: $AB=10$ см; $AC=4+2=6$ (см); $BC=6+2=8$ (см) і $P=10+6+8=24$ (см). *Відповідь.* 24 см.

4.1м. $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=13, \\ x^2+xy+y^2=91. \end{cases}$

Маємо $x+y=13-\sqrt{xy}$, піднесемо ліву і праву частини до квадрата (у кінці потрібно виконати перевірку):

$x^2+2xy+y^2=169-26\sqrt{xy}+xy$; $x^2+xy+y^2=169-26\sqrt{xy}$.

Але $x^2+xy+y^2=91$ (виходячи з другого рівняння), тому $91=169-26\sqrt{xy}$; $\sqrt{xy}=3$; $xy=9$. Маємо систему:

$\begin{cases} xy=9, \\ x+y+\sqrt{9}=13; \end{cases}$ $\begin{cases} xy=9, \\ x+y=10. \end{cases}$ Звідси $x_1=1$, $y_1=9$ або $x_2=9$, $y_2=1$.

Перевіркою переконуємося в тому, що ці пари задовольняють початкову систему.

Відповідь. (1; 9), (9; 1).

4.2м. Радіус кола дорівнює відстані від точки $O(1; -2)$ до прямої $3x-4y+9=0$. Отже, $r=\frac{|3\cdot1-4\cdot(-2)+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$.

Шукане рівняння кола
$(x-1)^2+(y+2)^2=4^2$, або $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

Відповідь. $(x-1)^2+(y+2)^2=16$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Б	В	Б	В	В	Г	В	Г	Г	Б	В	В

2.1	2.2	2.3	2.4
20	$a=2$; $c=-24$	0,675	3π см^2

Варіант 42

3.1. Оскільки турист плотом повернувся назад, то моторним човном він плив проти течії. Нехай x км/год — швидкість течії. Тоді швидкість човна проти течії дорівнює $(15-x)$ км/год. 18 км проти течії турист долає за $\frac{18}{15-x}$ год, а 18 км плотом — за $\frac{18}{x}$ год. За умовою $\frac{18}{x}-\frac{18}{15-x}=4,5$; $\frac{18}{x}-\frac{18}{15-x}=\frac{9}{2}$, або $\frac{2}{x}-\frac{2}{15-x}=\frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{30-2x-2x}{x(15-x)}=\frac{1}{2}$; $2(30-4x)=$ $=15x-x^2$; $x^2-23x+60=0$; $x_1=20$; $x_2=3$.

Перший корінь не задовольняє умову задачі. Отже, швидкість течії 3 км/год.

Відповідь. 3 км/год.

3.2. За теоремою Вієта, $x_1+x_2=-\frac{-3}{2}=1,5$; $x_1x_2=\frac{-4}{2}=-2$. Маємо $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1,5^2-2\cdot(-2)=2,25+4=6,25$.

Відповідь. 6,25.

3.3. Нехай $a=3$ см; $b=5$ см; $\gamma=120°$. Знайдемо третю сторону за теоремою косинусів:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$; $c=\sqrt{3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120°}=\sqrt{49}=7$ (см).

Периметр даного трикутника $P=3+5+7=15$ (см), а периметр подібного йому $P'=30$ (см). Тому коефіцієнт подібності $k=\frac{P'}{P}=\frac{30}{15}=2$, площа другого трикутника у $2^2=4$ рази більша за площу даного.

Площа даного трикутника $S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120°=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ (см^2).

Тоді площа подібного трикутника $S'=4S=15\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь. $15\sqrt{3}$ см^2.

4.1^м. $\sqrt{11-2\sqrt{28}}-\sqrt{11+2\sqrt{28}}=\sqrt{4-2\cdot2\sqrt{7}+7}-\sqrt{4+2\cdot2\sqrt{7}+7}=$ $=\sqrt{2^2-2\cdot2\cdot\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2}-\sqrt{2^2+2\cdot2\cdot\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2}=\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}-$ $-\sqrt{(2+\sqrt{7})^2}=|2-\sqrt{7}|-|2+\sqrt{7}|=-(2-\sqrt{7})-(2+\sqrt{7})=$ $=-2+\sqrt{7}-2-\sqrt{7}=-4$. Доведено.

4.2^м. Нехай $O(a;\ b)$ — центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола. Тоді $OA=OB=OC$ і $OA^2=OB^2=OC^2$; $OA^2=(2-a)^2+(9-b)^2$; $OB^2=(11-a)^2+(b-0)^2$; $OC^2=(-5-a)^2+(-4-b)^2$.

Маємо $OA^2=OB^2$; $OB^2=OC^2$, звідси система

$$\begin{cases}(2-a)^2+(9-b)^2=(11-a)^2+b^2,\\(11-a)^2+b^2=(5+a)^2+(4+b)^2;\end{cases}\quad\begin{cases}18a-18b=36,\\8b+32a=80;\end{cases}\quad\begin{cases}a-b=2,\\4a+b=10,\end{cases}$$

звідси $5a=12$; $a=2,4$, тоді $b=0,4$.

Отже, $O(2,4;\ 0,4)$ — центр описаного кола. Його радіус $OA=\sqrt{(2-2,4)^2+(9-0,4)^2}=\sqrt{0,4^2+8,6^2}=\sqrt{74,12}$.

Рівняння описаного кола $(x-2,4)^2+(y-0,4)^2=74,12$.

Відповідь. $(x-2,4)^2+(y-0,4)^2=74,12$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	В	Б	А	Г	В	Г	В	В	Б	Б	А

2.1	2.2	2.3	2.4
1; –1; –2	(2; 4)	$1\frac{63}{64}$	21 см

Варіант 43

3.1. Нехай перша бригада, працюючи самостійно, може виконати завдання за x год, тоді друга — за $(x + 6)$ год. За одну годину перша бригада виконає $\frac{1}{x}$ частину завдання, а

друга — $\frac{1}{x+6}$ частину завдання.

Перша бригада працювала 3 год і виконала $\frac{3}{x}$ частини завдання, а друга бригада працювала 5 год і виконала $\frac{5}{x+6}$ частини завдання.

За умовою, $\frac{3}{x}+\frac{5}{x+6}=\frac{2}{3}$. Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{3x+18+5x}{x(x+6)}=\frac{2}{3}$; $x^2 - 6x - 27 = 0$; $x_1 = 9$; $x_2 = -3$.

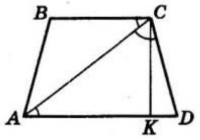
Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, перша бригада може виконати завдання, працюючи окремо, за 9 год, а друга — за 15 год.

Відповідь. 9 год і 15 год.

3.2. $\sqrt{7-\sqrt{|x|-5}}=2$. Тоді $7-\sqrt{|x|-5}=2^2$; $\sqrt{|x|-5}=3$. Звідси $|x| - 5 = 9$; $|x| = 14$.

Тому $x = 14$ або $x = -14$.

Відповідь. 14; –14.



3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція; $AD = 10$ см; $BC = 6$ см — основи трапеції; $\angle ACB = \angle ACD$ (за умовою). $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC).

Тому $\angle ACD = \angle CAD$ і $\triangle ACD$ — рівнобедрений. Звідси $CD = AD = 10$ см.

Проведемо висоту CK;

$KD=\frac{AD-BC}{2}=\frac{10-6}{2}=2$ (см); $AK = 10 - 2 = 8$ (см).

У $\triangle CKD$: $CK=\sqrt{CD^2-KD^2}=\sqrt{10^2-2^2}=\sqrt{96}$.

У $\triangle ACK$: $AC=\sqrt{CK^2+KA^2}=\sqrt{(\sqrt{96})^2+8^2}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$ (см).

Відповідь. $4\sqrt{10}$ см.

4.1м. Нехай $m \in N$, $n \in N$ і $m^3 - n^3 = 19$. Тоді

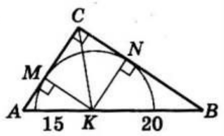
$19 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$. (*)

Оскільки $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, то $m^2 + mn + n^2 \geqslant 3$. Зазначимо, що множники $m^2 + mn + n^2$ і $m - n$ — натуральні числа і 19 — просте число. Тоді єдина можливість виконання рівності (*) така: $m - n = 1$ і $m^2 + mn + n^2 = 19$.

Маємо систему $\begin{cases} m=1+n, \\ (1+n)^2+(1+n)n+n^2=19. \end{cases}$

Звідси маємо $n^2 + n - 6 = 0$. Оскільки $n \in N$, то $n = 2$, тоді $m = 3$. Отже, $19 = 3^3 - 2^3$; подання єдине.

Відповідь. $19 = 3^3 - 2^3$.



4.2м. Нехай маємо $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, точка K — центр півкола, про який іде мова в задачі; KM і KN — радіуси, що проведені в точки дотику півкола з катетами AC і BC відповідно.

$\triangle KMC = \triangle KNC$ (за катетом і гіпотенузою), тому $\angle MCK = \angle NCK$ і CK — бісектриса $\triangle ACB$.

За властивістю бісектриси, $\frac{AC}{BC}=\frac{AK}{KB}$; $\frac{AC}{BC}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$. Можемо позначити $AC = 3x$; $BC = 4x$.

Тоді $(3x)^2 + (4x)^2 = 35^2$; $25x^2 = 35^2$; $5x = 35$; $x = 7$.

Маємо $AC = 3 \cdot 7 = 21$ (см), $BC = 4 \cdot 7 = 28$ (см);

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 28=294$ (см²).

Розглянемо $MK = KN = 2$. Маємо $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AKC} + S_{\triangle KCB}$;

$294=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot BC\cdot 2$; $r=\frac{2\cdot 294}{21+28}=12$ (см).

Зрозуміло, що $\angle MKN = 360° - 3 \cdot 90° = 90°$, тому дуга MN — чверть кола, її довжина $l=\frac{2\pi r}{4}=\frac{\pi\cdot 12}{2}=6\pi$ (см).

Відповідь. 6π см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	В	В	Б	В	Б	В	Г	Г	В	А	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{a+b}{b}$	1000	(6; –1), (–2,25; 1,75)	24 см

Варіант 44

3.1. Нехай планувалося використати x машин, тоді на кожну повинні були навантажити $\frac{60}{x}$ т вантажу. Але використали $(x-2)$ машини і на кожну навантажили $\frac{60}{x-2}$ т вантажу. За умовою $\frac{60}{x-2}-\frac{60}{x}=1$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$\frac{60x-60x+120}{x(x-2)}=1$; $x^2-2x-120=0$; $x_1=12$; $x_2=-10$.

Другий корінь не задовольняє умову. Отже, планували використати 12 машин, а використали 10.

Відповідь. 10 машин.

3.2. Оскільки $b_5=b_3q^2$, то маємо $q^2=\frac{b_5}{b_3}=\frac{81}{9}=9$, $q=3$ або $q=-3$.

1) $q=3$, тоді $b_1=\frac{b_3}{q^2}=\frac{9}{3^2}=1$; $S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{1\cdot(3^6-1)}{3-1}=364$.

2) $q=-3$, тоді

$b_1=\frac{b_3}{q^2}=\frac{9}{(-3)^2}=1$; $S_6=\frac{b_1(q^6-1)}{q-1}=\frac{1\cdot((-3)^6-1)}{-3-1}=-182$.

Відповідь. 364 або –182.

3.3. Нехай a і b — катети даного трикутника, c — його гіпотенуза; S — площа, а a', b', c' і S' — відповідно катети, гіпотенуза і площа подібного йому трикутника.

За умовою $c=5$ см; $a=3$ см. Тоді $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (см) і $a'=3x$ (см), $b'=4x$ (см), $c'=5x$ (см).

За умовою, $S'=54$ (см^2), тобто $\frac{1}{2}\cdot3x\cdot4x=54$, $x^2=9$, $x=3$.

Тоді $c'=5\cdot3=15$ (см).

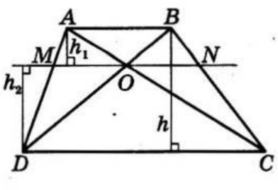
Відповідь. 15 см.

4.1м. *Доведення.* За нерівністю Коші для середнього арифметичного і середнього геометричного двох чисел, ураховуючи $x>0$, $y>0$, $z>0$, маємо: $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$; $\frac{y+z}{2}\geqslant\sqrt{yz}$; $\frac{z+x}{2}\geqslant\sqrt{zx}$. Ліві і праві частини нерівностей додатні, можемо почленно перемножити: $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\geqslant\sqrt{x^2y^2z^2}$.

Ураховуючи $x>0$, $y>0$, $z>0$, маємо: $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\geqslant8$;

$\left(\frac{x+y}{x}\right)\left(\frac{y+z}{y}\right)\left(\frac{z+x}{z}\right)\geqslant8$; $\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\geqslant8$, що й треба було довести.

4.2м. Нехай точка O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$; $AB=3$ см і $DC=7$ см — основи трапеції.



Пряма MN паралельна основам трапеції і проходить через точку O. Знайдемо спочатку довжину відрізка MO. Позначимо $MO=x$.

$\triangle AMO \backsim \triangle ADC$ (за двома кутами), тоді $\frac{MO}{DC}=\frac{h_1}{h}$; $\frac{x}{7}=\frac{h_1}{h}$, де h — висота трапеції і $\triangle DBC$, h_1 — висота $\triangle AMO$.

Аналогічно $\triangle DMO \backsim \triangle DAB$, тоді $\frac{MO}{AB}=\frac{h_2}{h}$; $\frac{x}{3}=\frac{h_2}{h}$, де h_2 — висота $\triangle DMO$, h — висота трапеції і $\triangle DAB$. Додамо почленно рівності $\frac{x}{7}=\frac{h_1}{h}$ і $\frac{x}{3}=\frac{h_2}{h}$, маємо $\frac{x}{7}+\frac{x}{3}=\frac{h_1+h_2}{h}$. Але $h_1+h_2=h$, тому $\frac{x}{7}+\frac{x}{3}=1$; $x\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\right)=1$; $x=\frac{21}{10}=2{,}1$ (см).

Аналогічно можна довести, що $ON=2{,}1$ см.

Тому $MN=2\cdot2{,}1=4{,}2$ (см).

Відповідь. 4,2 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Б	Б	В	Б	В	В	Г	Б	А	Г	Г

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{3}{x-1}$	$[6;+\infty)$	$[4;+\infty)$	$K(1;-2)$

Варіант 45

3.1. Нехай $\overline{ab} = 10a + b$ – шукане двоцифрове натуральне число. За умовою, $10a + b = 4(a + b)$ і $10a + b = 3ab$.

Після спрощення першого рівняння отримаємо $6a = 3b$, тобто $b = 2a$.

Підставимо у друге рівняння замість b вираз $2a$. Отримаємо $10a + 2a = 3a \cdot 2a$; $6a^2 - 12a = 0$; $6a(a - 2) = 0$. Оскільки a — цифра і $a \neq 0$, то $a = 2$. Тоді $b = 4$. Шукане число — 24.

Відповідь. 24.

3.2. *Доведення.* Оскільки a, b і c — три послідовних члени арифметичної прогресії, то $\frac{a+c}{2} = b$.

Розглянемо різницю лівої і правої частин умовної тотожності, яку треба довести.

$$(a+2b)^2 - (8ab + c^2) = \left(a + 2\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(8a \cdot \frac{a+c}{2} + c^2\right) =$$

$$= (2a+c)^2 - (4a(a+c) + c^2) = 4a^2 + 4ac + c^2 - 4a^2 - 4ac - c^2 = 0.$$

Отже, $(a + 2b)^2 = 8ab + c^2$, що й треба було довести.

3.3. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. За умовою $a:b = 20:21$. Позначимо $a = 20x$ см, $b = 21x$ см. Тоді $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(20x)^2 + (21x)^2} = 29x$.

Нехай R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного. За умовою $R - r = 17$ (см). Використовуючи відомі формули, маємо:

$$R - r = \frac{c}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{2c-(a+b)}{2} = \frac{2 \cdot 29x - (20x + 21x)}{2} = \frac{17x}{2}.$$

Отже, $\frac{17x}{2} = 17$; $x = 2$. Тоді гіпотенуза $c = 29 \cdot 2 = 58$ (см).

Відповідь. 58 см.

4.1ᵐ. Задане рівняння є однорідним. Число 0 не є коренем рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на x^2. Маємо:

$$\left(\frac{x^2+2x-2}{x}\right)^2 + \frac{x^2+2x-2}{x} = 2.$$

Заміна $\frac{x^2+2x-2}{x} = t$. Тоді маємо $t^2 + t - 2 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = -2$.

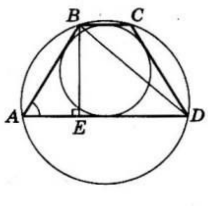
1) $t_1 = 1$; $\frac{x^2+2x-2}{x} = 1$; $x^2 + 2x - 2 = x$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -2$.

2) $t_2 = -2$; $\frac{x^2+2x-2}{x} = -2$; $x^2 + 2x - 2 = -2x$; $x^2 + 4x - 2 = 0$;

$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2}$; $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}$.

Відповідь. $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}$.

4.2ᵐ. Оскільки задана в умові трапеція вписана в коло, то вона є рівнобічною. На малюнку зображено рівнобічну трапецію $ABCD$, у якої $AD = 8$ см і $BC = 2$ см — основи.



Оскільки трапеція вписана в коло, то $AB + CD = AD + BC$, тому

$$AB = CD = \frac{8+2}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

$$AE = \frac{AD - BC}{2} = \frac{8-2}{2} = 3 \text{ (см)}.$$

У $\triangle ABE$: $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

Тоді радіус вписаного кола $r = \frac{BE}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (см).

Знайдемо радіус R кола, описаного навколо трапеції як радіус кола, описаного навколо $\triangle ABD$, а саме: $2R = \frac{BD}{\sin BAD}$.

У $\triangle BAE$: $\sin BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{4}{5}$. $ED = DA - AE = 8 - 3 = 5$ (см).

У $\triangle BED$: $BD = \sqrt{BE^2 + ED^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ (см).

Тоді $R = \frac{\sqrt{41}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{41}}{8}$ (см).

Відповідь. 2 см; $\frac{5\sqrt{41}}{8}$ см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	В	Б	Б	А	Б	В	А	Б	Г	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
b^{-7}	$\frac{\sqrt{13}+\sqrt{5}}{2}$	[−2; 2)	5

Варіант 46

3.1. Нехай перше з п'яти невідомих послідовних парних натуральних чисел дорівнює x, тоді друге — $x + 2$, третє — $x + 4$, четверте — $x + 6$, п'яте — $x + 8$. За умовою, $x^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)^2 = (x + 6)^2 + (x + 8)^2$. Розв'яжемо отримане рівняння: $x^2 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 8x + 16 = x^2 + 12x + 36 + x^2 + 16x + 64$; $x^2 - 16x - 80 = 0$; $x_1 = 20$; $x_2 = -4$.

Оскільки задані в умові числа є натуральними, то перше із чисел дорівнює 20, друге — 22, третє — 24, четверте — 26, п'яте — 28.

Відповідь. 20; 22; 24; 26; 28.

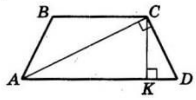
3.2. $\begin{cases} x + xy + 3y = 3, \\ 2x - xy - y = -2. \end{cases}$ Додамо рівняння системи. Маємо: $3x + 2y = 1$. Звідси $y = 0{,}5 - 1{,}5x$. Підставляємо у друге рівняння: $2x - x(0{,}5 - 1{,}5x) - (0{,}5 - 1{,}5x) = -2$;

$2x - 0{,}5x + 1{,}5x^2 - 0{,}5 + 1{,}5x = -2$; $1{,}5x^2 + 3x + 1{,}5 = 0$; $x = -1$.

Тоді $y = 0{,}5 - 1{,}5 \cdot (-1)$; $y = 2$.

Відповідь. $(-1; 2)$.

3.3. Нехай $ABCD$ — задана в умові рівнобічна трапеція; $BC = 12$ см; $AD = 20$ см; $AC \perp CD$.



Проведемо висоту трапеції CK. Маємо:

$$KD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{20 - 12}{2} = 4 \text{ (см)}.$$

$AK = AD - KD = 20 - 4 = 16$ (см).

У прямокутному трикутнику ACD відрізок CK — висота, що проведена до гіпотенузи. Маємо: $CK^2 = AK \cdot KD$. Тоді $CK = \sqrt{4 \cdot 16} = 8$ (см).

Площа трапеції $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot CK = \dfrac{20 + 12}{2} \cdot 8 = 128$ (см^2).

Відповідь. 128 см^2.

4.1^м. Маємо

$$\sqrt{x^2 \pm 4x\sqrt{2} + 8} = \sqrt{x^2 \pm 2x \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{(x \pm 2\sqrt{2})^2} = \left|(x \pm 2\sqrt{2})^2\right|.$$

Тоді $\dfrac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + 8}} - \dfrac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + 8}} = \dfrac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\left|x - 2\sqrt{2}\right|} - \dfrac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\left|x + 2\sqrt{2}\right|}$.

Оскільки $x = 3$, то $x + 2\sqrt{2} > 0$ і $x - 2\sqrt{2} > 0$.

Тому $\left|x + 2\sqrt{2}\right| = x + 2\sqrt{2}$ і $\left|x - 2\sqrt{2}\right| = x - 2\sqrt{2}$.

Маємо $\dfrac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{x - 2\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{x + 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}} =$

$$= \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}} - \sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - (2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}} - \sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 8}}.$$

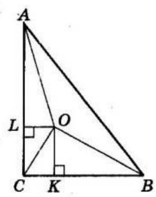
Якщо $x = 3$, то

$$\sqrt{x \pm 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 \pm 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} \pm 1)^2} = \left|\sqrt{2} \pm 1\right| = \sqrt{2} \pm 1.$$

Тоді $\dfrac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}} - \sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 8}} = \dfrac{\sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{3^2 - 8}} = 2$.

Відповідь. 2.

4.2^м. Нехай OK — висота $\triangle OBC$, а OL — висота $\triangle AOC$. Позначимо $AC = b$; $BC = a$.



$S_{\triangle OBC} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, тому $OK = \dfrac{1}{3} AC$; $OK = \dfrac{1}{3} b$.

$S_{\triangle COA} = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, тому $OL = \dfrac{1}{3} BC$; $OL = \dfrac{1}{3} a$.

Тоді $AL = AC - LC = \dfrac{2}{3} b$;

$KB = CB - CK = \dfrac{2}{3} a$.

У $\triangle OCK$ $\left(CK = OL = \dfrac{1}{3} a\right)$: $OC^2 = OK^2 + KB^2 = \dfrac{1}{9}(a^2 + b^2)$; (*)

у $\triangle OKB$: $OB^2 = OK^2 + KB^2 = \dfrac{1}{9} b^2 + \dfrac{4}{9} a^2$;

у $\triangle AOL$: $OA^2 = AL^2 + LO^2 = \dfrac{4}{9} b^2 + \dfrac{1}{9} a^2$.

Додавши два останніх рівняння і врахувавши умову $OA^2 + OB^2 = d^2$, маємо: $d^2 = OB^2 + OA^2 = \dfrac{5}{9}(b^2 + a^2)$. Звідси $a^2 + b^2 = \dfrac{9}{5} d^2$.

Підставимо це в (*), отримаємо $OC^2 = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{9}{5} d^2 = \dfrac{d^2}{5}$. Тому $OC = \dfrac{d}{\sqrt{5}}$.

Відповідь. $\dfrac{d}{\sqrt{5}}$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	В	Г	Б	Г	В	Г	Г	Б	Г	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
$x = 1$	8	$\frac{1}{3}$	88 см^2

Варіант 47

3.1. Нехай x км/год — власна швидкість човна, тоді його швидкість за течією $(x+3)$ км/год, а проти течії — $(x-3)$ км/год. 45 км за течією човен долає за $\frac{45}{x+3}$ год, а проти течії — за $\frac{45}{x-3}$ год. За умовою $\frac{45}{x+3}+\frac{45}{x-3}=8$.

Розв'яжемо отримане рівняння: $\frac{45x-135+45x+135}{x^2-9}=8$;

$8(x^2-9)=90x$; $8x^2-90x-72=0$; $x_1=12$; $x_2=-0{,}75$.

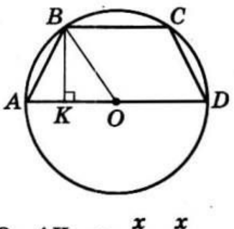
Другий корінь не задовольняє умову. Отже, власна швидкість човна — 12 км/год.

Відповідь. 12 км/год.

3.2. Маємо $S_1=a_1=2\cdot 1^2+1=3$; $S_2=2\cdot 2^2+2=10$. Але $S_2=a_1+a_2$, тому $a_2=S_2-a_1$; $a_2=10-3$; $a_2=7$. Тоді $d=a_2-a_1$; $d=7-3$; $d=4$.

Відповідь. $a_1=3$; $d=4$.

3.3. Оскільки навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна. $BC:AD=1:2$ (за умовою), нехай точка O — центр кола; $O\in AD$.



Позначимо $BC=x$, тоді $AD=2x$ і $AO=OD=x$. У $\triangle AOB$: $AO=OB=x$ (як радіуси кола). Проведемо висоту трапеції BK.

$AK=\frac{AD-BC}{2}=\frac{2x-x}{2}=\frac{x}{2}$, тоді $KO=AO-AK=x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$.

У $\triangle BKO(\angle K=90^\circ)$: $KO=\frac{1}{2}BO$, тому $\angle KBO=30^\circ$ і $\angle BOK=60^\circ$.

У $\triangle AOB$: $AO=OB$, тому $\angle BAO=\angle ABO=\frac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$. Отже, у трапеції $\angle A=\angle D=60^\circ$; $\angle ABC=\angle C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

Відповідь. 60°; 60°; 120°; 120°.

4.1ᵐ. Оскільки a^2 і b — числа додатні, то, за нерівністю Коші для середнього арифметичного і середнього геометричного, отримаємо:

$$\frac{a^2+b}{2}\geqslant\sqrt{a^2b},\text{ або } a^2+b\geqslant 2\sqrt{a^2b}. \qquad (*)$$

Аналогічно, застосувавши нерівність Коші до чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b^2}$, які додатні, отримаємо:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}},\text{ або } \frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}}. \qquad (**)$$

Перемноживши почленно нерівності (*) і (**), маємо:

$$(a^2+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)\geqslant 4\sqrt{a^2b\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}};\ (a^2+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)\geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}},$$

що й треба було довести.

4.2ᵐ. Нехай a і b — катети трикутника, c — його гіпотенуза, $h=24$ см — висота, що проведена до гіпотенузи. Площа трикутника $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch$, тому $ab=ch$; $ab=24c$. Крім того, $a^2+b^2=c^2$ і $a+b+c=120$. Маємо систему:

$$\begin{cases}a^2+b^2=c^2,\\ a+b=120-c,\\ ab=24c;\end{cases}\quad \begin{cases}(a+b)^2-2ab=c^2,\\ a+b=120-c,\\ ab=24c;\end{cases}\quad \begin{cases}(120-c)^2-2\cdot 24c=c^2,\\ a+b=120-c,\\ ab=24c.\end{cases}$$

З першого рівняння маємо: $120^2-240c+c^2-48c=c^2$; $288c=120^2$; $c=50$. Тоді $\begin{cases}a+b=70,\\ ab=1200,\end{cases}$ тому $a_1=30$, $b_1=40$ або $a_2=40$, $b_2=30$. Отже, сторони трикутника — 30 см; 40 см; 50 см.

Відповідь. 30 см; 40 см; 50 см.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	А	Б	Б	А	Г	Б	Б	А	Г	В

2.1	2.2	2.3	2.4
$x=3$	$0\leqslant x<9$	$\frac{1}{4}$	$\sqrt{10}$ см

Варіант 48

3.1. Нехай x — перше із шуканих послідовних непарних натуральних чисел, тоді друге — $(x+2)$, третє — $(x+4)$, четверте — $(x+6)$. За умовою, $(x+2)(x+4)-111=3(x+x+6)$.

Розв'яжемо це рівняння: $x^2+2x+4x+8-111=6x+18$; $x^2=121$.

Оскільки x — натуральне число, то $x=11$. Отже, шукані числа 11; 13; 15; 17.

Відповідь. 11; 13; 15; 17.

3.2. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5, \\ x+y=6. \end{cases}$ Позначимо $\dfrac{x}{y}=t$, тоді $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{t}$ і з першого рівняння системи маємо:

$t+\dfrac{1}{t}=2{,}5$; $\begin{cases} 2t^2-5t+2=0, \\ t\neq 0; \end{cases}$ $t_1=2$; $t_2=\dfrac{1}{2}$.

1) $t_1=2$; $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=2, \\ x+y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y, \\ y\neq 0, \\ 2y+y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2, \\ x=4. \end{cases}$

2) $t_2=\dfrac{1}{2}$; $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ x+y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x, \\ y\neq 0, \\ 2x+x=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases}$

Відповідь. (4; 2), (2; 4).

3.3. Нехай точка O — середина діагоналі AC, тоді $O\left(\dfrac{0+4}{2};\dfrac{6+2}{2}\right)$, тобто $O(2;\ 4)$. Нехай точка Q — середина діагоналі BD, тоді $Q\left(\dfrac{5+(-1)}{2};\dfrac{7+1}{2}\right)$, тобто $Q(2;\ 4)$.

Отже, середини діагоналей чотирикутника $ABCD$ збігаються, тобто його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Тому $ABCD$ — паралелограм. Маємо:

$AB=\sqrt{(5-0)^2+(7-6)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$;

$AD=\sqrt{(-1-0)^2+(1-6)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$.

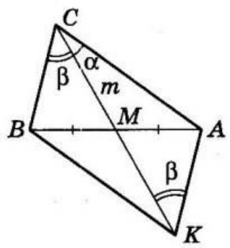
Отже, $AB=AD$, а тому $ABCD$ — ромб, що й треба було довести.

4.1м. $p=\dfrac{m}{n}$. $n=C_{30}^3=\dfrac{30!}{3!\cdot 27!}=\dfrac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3}$;

$m=C_{12}^2\cdot C_{18}^1=\dfrac{12!}{2!\cdot 10!}\cdot\dfrac{18!}{1!\cdot 17!}=\dfrac{12\cdot 11}{2}\cdot 18=12\cdot 11\cdot 9.$

Тоді $p=\dfrac{12\cdot 11\cdot 9}{\dfrac{30\cdot 29\cdot 28}{6}}=\dfrac{6\cdot 12\cdot 11\cdot 9}{30\cdot 29\cdot 28}=\dfrac{297}{1015}$. *Відповідь.* $\dfrac{297}{1015}$.

4.2м. Нехай $CM=m$ — медіана $\triangle ABC$; $\angle ACM=\alpha$; $\angle BCM=\beta$. Продовжимо CM за точку M і відкладемо на цьому промені точку K таку, що $CM=MK$.



Чотирикутник $ACBK$ — паралелограм, $CK=2m$; $\angle CKA=\beta$; $AK=CB$.

У $\triangle CKA$:

$$\frac{CK}{\sin CAK}=\frac{CA}{\sin CKA}=\frac{AK}{\sin KCA};$$

$$\frac{2m}{\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}=\frac{CA}{\sin\beta}=\frac{AK}{\sin\alpha}.$$

Ураховуючи, що $\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)$ і $CB=AK$, маємо: $CA=\dfrac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $CB=\dfrac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Відповідь. $CA=\dfrac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $CB=\dfrac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Г	А	Г	В	Г	В	Б	В	Б	Г	Б

2.1	2.2	2.3	2.4
–45	24	(2; 6), $\left(\frac{1}{4}; -1\right)$	96°

Варіант 49

3.1. Нехай перший робітник виконує задану роботу за x год, а другий — за y год. Третину роботи перший робітник виконає за $\frac{x}{3}$ год, а другий робітник четверту частину роботи виконає за $\frac{y}{4}$ год. За умовою, $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 5$.

За одну годину перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а другий — $\frac{1}{y}$ частину роботи. Працюючи разом, за одну годину вони виконають $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ частину роботи. За умовою, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$.

Маємо систему $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 5, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}. \end{cases}$

З першого рівняння цієї системи отримаємо $x = 15 + 0,75y$. Підставимо значення x у друге рівняння: $\frac{1}{15 + 0,75y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$.

Маємо: $\frac{y + 15 + 0,75y}{y(15 + 0,75y)} = \frac{1}{8}$; $8(1,75y + 15) = 15y + 0,75y^2$;

$0,75y^2 + y - 120 = 0$. Ураховуючи, що $y > 0$, маємо $y = 12$. Тоді $x = 15 + 0,75 \cdot 12$; $x = 24$.

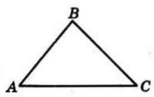
Отже, перший робітник, працюючи самостійно, виконає роботу за 24 год, а другий — за 12 год.

Відповідь. 24 год; 12 год.

3.2. Оскільки парабола перетинає вісь ординат у точці $B(0; 7)$, то $7 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, тому $c = 7$. Оскільки точка $A(1; 5)$ є вершиною параболи, то $1 = -\frac{b}{2a}$, тобто $b = -2a$, і $5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$. Звідси маємо: $5 = a - 2a + 7$; $a = 2$. Тоді $b = -2 \cdot 2 = -4$.

Відповідь. $a = 2$; $b = -4$; $c = 7$.

3.3. Нехай задано $\triangle ABC$, у якого $AB = \sqrt{3}$ см, $BC = 2$ см; $AC = R$, де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.



За відомою формулою, $2R = \frac{AC}{\sin B}$, тому $2R = \frac{R}{\sin B}$; $\sin B = \frac{1}{2}$, тому $\angle B = 30°$ або $\angle B = 150°$.

У кожному із цих випадків, за теоремою синусів, можна знайти AC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos ABC$.

1) $\angle B = 30°$; $AC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{1} = 1$ (см).

2) $\angle B = 150°$; $AC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{13}$ (см).

Відповідь. 1 см або $\sqrt{13}$ см.

4.1м. Маємо: $\frac{a^2 - 1}{ax - 1} + \frac{a}{a} - \frac{x}{a} = 1$; $\frac{a^2 - 1}{ax - 1} = \frac{x}{a}$. Це рівняння рівносильне системі

$\begin{cases} x(ax - 1) = a(a^2 - 1), \\ a \neq 0, \\ x \neq \frac{1}{a}; \end{cases}$ $\begin{cases} ax^2 - x - (a^3 - a) = 0, \\ a \neq 0, \\ x \neq \frac{1}{a}. \end{cases}$

Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 - x - (a^3 - a) = 0$ для всіх значень параметра a є квадратним.

$D = 1 + 4a(a^3 - a) = 4a^4 - 4a^2 + 1 = (2a^2 - 1)^2$;

$x_1 = \frac{1 + (2a^2 - 1)}{2a} = a$; $x_2 = \frac{1 - (2a^2 - 1)}{2a} = \frac{1 - a^2}{a}$.

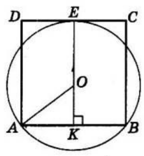
Проте повинна виконуватися умова $x \neq \frac{1}{a}$.

1) $x_1 = \frac{1}{a}$, тобто $a = \frac{1}{a}$. Це виконується, якщо $a = \pm 1$, тоді маємо лише другий корінь $x_2 = \frac{1 - 1}{\pm 1} = 0$.

2) $x_2 = \frac{1}{a}$, тобто $\frac{1 - a^2}{a} = \frac{1}{a}$. Це рівняння коренів не має.

Відповідь. Якщо $a = 1$ або $a = -1$, то $x = 0$; якщо $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, то $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1 - a^2}{a}$.

4.2м. Квадрат $ABCD$ такий, що задано в умові. Проведемо через центр кола — точку O — перпендикуляр EK до сторін квадрата AB і CD.



Позначимо $AB = x$, тоді $AK = \frac{x}{2}$.

У $\triangle AOK$ ($\angle K = 90°$):

$AK = \frac{x}{2}$; $OK = EK - EO = x - R$; $AO = R$.

За теоремою Піфагора, $AO^2 = AK^2 + KO^2$; $R^2 = \frac{x^2}{4} + (x - R)^2$.

Звідси $\frac{5x^2}{4} - 2xR = 0$; $x\left(\frac{5x}{4} - 2R\right) = 0$; $x = \frac{8}{5}R$.

Тоді площа квадрата $S = x^2 = \frac{64}{25}R^2$.

Відповідь. $\frac{64}{25}R^2$.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
Г	Б	В	Б	Б	В	А	Г	Б	В	В	В

2.1	2.2	2.3	2.4
−1	0; 1	$a = 3$; $b = -2$	9 см

Варіант 50

3.1. Нехай швидкість першого пішохода x км/год, а другого — y км/год.

Перший подолав половину шляху, тобто 12 км, за $\frac{12}{x}$ год, а другий свою половину шляху — за $\frac{12}{y}$ год. Оскільки перший вийшов на годину раніше, то $\frac{12}{x}-1=\frac{12}{y}$. Крім того, за умовою задачі, $2\frac{24}{60}(x+y)=24$, тобто $x+y=10$.

Маємо систему рівнянь $\begin{cases}\frac{12}{x}-1=\frac{12}{y},\\ x+y=10.\end{cases}$

З другого рівняння отримаємо $y=10-x$ і підставимо в перше рівняння.

Маємо: $\frac{12}{x}-1-\frac{12}{10-x}=0$; $\frac{12(10-x)-x(10-x)-12x}{x(10-x)}=0$;

$\frac{120-12x-10x+x^2-12x}{x(10-x)}=0$; $x^2-34x+120=0$; $x_1=30$; $x_2=4$.

Перший корінь не підходить, бо тоді $y_1=10-30<0$. Отже, швидкість першого пішохода дорівнює 4 км/год, а другого $10-4=6$ (км/год).

Відповідь. 4 км/год; 6 км/год.

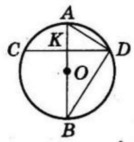
3.2. $x^2+y^2+2x-4y=(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)-1-4=$
$=(x+1)^2+(y-2)^2-5$.

Оскільки $(x+1)^2\geqslant 0$ і $(y-2)^2\geqslant 0$, то найменшим значенням виразу є число -5 (коли $x=-1$ і $y=2$).

Відповідь. -5.

3.3. Нехай AB — діаметр кола; CD — хорда, $CD\perp AB$.

За властивістю хорди, що перпендикулярна до діаметра, $CK=KD$, де K — точка перетину AB і CD.



Оскільки $CD=12$ см, то $CK=KD=\frac{12}{2}=6$ (см).

$\angle ADB=90°$ (як вписаний кут, що спирається на діаметр), тому DK — висота прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи.

За властивістю висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, $DK^2=AK\cdot KB$.

За умовою, $BK-KA=9$ (см).

Позначимо $KA=x$ см, тоді $BK=x+9$ (см).

Маємо: $6^2=x(x+9)$; $x^2+9x-36=0$. Ураховуючи те, що $x>0$, маємо $x=3$. Отже, $KA=3$ см; $BK=12$ см. Тоді $AB=d=15$ см — діаметр кола.

Довжина кола $l=\pi d=15\pi$ (см).

Відповідь. 15π см.

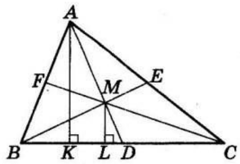
4.1ᵐ. Оскільки x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2-8x+3=0$, то, за теоремою Вієта, $x_1+x_2=-\frac{-8}{2}=4$ і $x_1x_2=\frac{3}{2}=1{,}5$.

Маємо: $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}=$
$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4^2-4\cdot 1{,}5}=\sqrt{10}$.

Відповідь. $\sqrt{10}$.

4.2ᵐ. Проведемо третю медіану AD і доведемо лему.

Лема. Трикутники, на які розбивають даний трикутник медіани, мають рівні площі.



Доведення леми. $S_{\triangle CMD}=S_{\triangle DMB}$ (у цих трикутниках рівні відповідні основи і висоти). Проведемо висоти AK — трикутника ABC і ML — трикутника CMB. $\triangle AKD\sim\triangle MLD$ (за двома кутами). Тоді $\frac{AK}{ML}=\frac{AD}{MD}=\frac{3}{1}$ (оскільки M — точка перетину медіан).

Тоді $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CMB}}=\frac{3}{1}$ (у трикутниках рівні основи, а тому їхні площі відносяться так, як висоти).

Отже, $S_{\triangle CMB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$, а тому $S_{\triangle CMD}=S_{\triangle DBM}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

Аналогічно $S_{\triangle CME}=S_{\triangle EMA}=S_{\triangle AMF}=S_{\triangle MFB}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

Лему доведено.

Оскільки

$S_{\triangle BMC}=2S_{\triangle BMD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ і $S_{AEMF}=2S_{\triangle AFM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$, то $S_{\triangle BMC}=S_{AEMF}$, що й треба було довести.

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10	1.11	1.12
В	Б	В	В	А	Б	Б	В	В	А	Б	В

2.1	2.2	2.3	2.4
$\frac{13}{27}$	$-\frac{a}{2x}$	(–1; 4)	5 см