
2021
ОСВІТА
ВИДАВНИЧИЙ ДІМ
В. Г. Бевз, Д. В. Васильєва
ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
З МАТЕМАТИКИ
Д
П
А
10 контрольних робіт у двох варіан
контрольні роботи складаються з т
2021
ОСВІТА
ВИДАВНИЧИЙ ДІМ
ВІДПОВІДІ ДО ЗБІРНИКА
ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ
Д
П
А
9
КЛАС

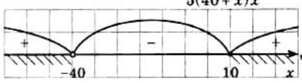
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	А	Б	Г	В	В	В	Б	Б	А

11. $-11 = 5x^2 - 7x$; $5x^2 - 7x + 11 = 0$ — це квадратне рівняння.
Оскільки $D = 49 - 4 \cdot 5 \cdot 11 = 49 - 220 = -171 < 0$, то рівняння не має розв'язків.
Відповідь. Жодного.

12. Оскільки $b_5 = b_1q^4$, то за умовою задачі $b_4 \cdot b_6 = 441$. Звідси $b_1q^3 \cdot b_1q^5 = 441$ або $b_1^2q^8 = 441$. Тоді $(b_1q^4)^2 = 441$. Звідси $b_1q^4 = 21$ або $b_1q^4 = -21$.
Отже, $b_5 = 21$; $b_5 = -21$.
Відповідь. 21 або -21.

13. $\begin{cases} \dfrac{x}{40+x} \ge \dfrac{1}{5}, \\ x + 45 < 60; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{5x-40-x}{5(40+x)} \ge 0, \\ x < 60-45; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{4(x-10)}{5(40+x)} \ge 0, \\ x < 15. \end{cases}$

Розв'яжемо нерівність $\dfrac{4(x-10)}{5(40+x)x} \ge 0$ методом інтервалів:

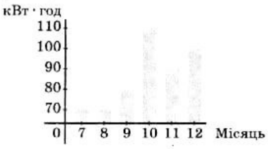


, тоді $x \in (-\infty; -40) \cup [10; +\infty)$.

Знайдемо спільні розв'язки нерівностей системи $\begin{cases} \dfrac{4(x-10)}{5(40+x)} \ge 0, \\ x < 15: \end{cases}$

Отже, $x \in (-\infty; -40) \cup [10; 15)$.
Відповідь. $(-\infty; -40) \cup [10; 15)$.

14.

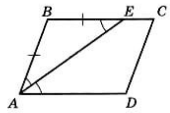


15. Оскільки $\angle C = 100°$, то з трикутника ABC маємо: $\angle BAC + \angle ABC = 180° - 100° = 80°$. Оскільки в трикутник ABC вписано коло, то AO і BO — бісектриси кутів BAC і ABC, тоді

$$\angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 80° = 40°.$$

Із трикутника ABO маємо: $\angle AOB = 180° - (\angle BAO + \angle ABO) = 180° - 40° = 140°$.
Відповідь. 140°.

16. Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то $BC \parallel AD$, AE — січна при прямих BC і AD. $\angle DAE = \angle BAE$. $BE = 8$ см, $EC = 4$ см.



$\angle DAE = \angle BEA$, як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній. Тоді трикутник ABE — рівнобедрений з основою AE, оскільки $\angle ABE = \angle BEA$. Тоді $AB = BE = 8$ см, $BC = 8 + 4 = 12$ (см). Враховуючи те, що в паралелограмі протилежні сторони рівні, маємо: $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $CD = 8$ см, $AD = 12$ см.
Відповідь: 8 см, 12 см, 8 см, 12 см.

17. $(x^2 + 4x)^2 + (x + 2)^2 = 4$; $(x^2 + 4x)^2 + x^2 + 4x + 4 = 4$; $(x^2 + 4x)^2 + (x^2 + 4x) = 0$.
Нехай $x^2 + 4x = a$, тоді $a^2 + a = 0$. Звідси $a(a + 1) = 0$; $a = 0$, $a = -1$. Тоді:
1) $x^2 + 4x = 0$, звідси $x(x + 4) = 0$; $x = 0$, $x = -4$;
2) $x^2 + 4x = -1$, звідси $x^2 + 4x + 1 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$.
Відповідь. 0; -4; $-2 \pm \sqrt{3}$.

18. $\left(\dfrac{x+10}{5x+25} - \dfrac{1}{x+5}\right) \cdot \dfrac{5}{x-5} - \dfrac{10}{x^2-25} = \left(\dfrac{x+10}{5(x+5)} - \dfrac{1}{x+5}\right) \cdot \dfrac{5}{x-5} - \dfrac{10}{x^2-25} =$
$= \dfrac{x+10-5}{5(x+5)} \cdot \dfrac{5}{x-5} - \dfrac{10}{x^2-25} = \dfrac{x+5}{5(x+5)} \cdot \dfrac{5}{x-5} - \dfrac{10}{x^2-25} =$
$= \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{10}{x^2-25} = \dfrac{x+5-10}{x^2-25} = \dfrac{x-5}{x^2-25} = \dfrac{x-5}{(x-5)(x+5)} = \dfrac{1}{x+5}$.
Відповідь. $\dfrac{1}{x+5}$.

19. Нехай швидкість течії річки x км/год. Систематизуємо дані задачі у вигляді таблиці.

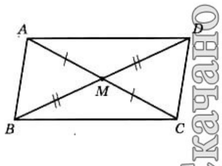
Катер	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
За течією	$12+x$	24	$\dfrac{24}{12+x}$
Проти течії	$12-x$	24	$\dfrac{24}{12-x}$

За умовою задачі маємо рівняння: $\dfrac{24}{12-x} - \dfrac{24}{12+x} = 1\dfrac{4}{60}$.
Розв'яжемо його:
$\dfrac{24}{12-x} - \dfrac{24}{12+x} = 1\dfrac{4}{60}$; $\dfrac{24}{12-x} - \dfrac{24}{12+x} = 1\dfrac{1}{15}$; $\dfrac{24}{12-x} - \dfrac{24}{12+x} = \dfrac{16}{15}$; $\dfrac{3}{12-x} - \dfrac{3}{12+x} = \dfrac{2}{15}$;
$\begin{cases} 45(12+x) - 45(12-x) = 2(12^2 - x^2), \\ x \ne \pm 12; \end{cases}$ $\begin{cases} 540 + 45x - 540 + 45x = 2(144 - x^2), \\ x \ne \pm 12; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2 + 90x - 288 = 0, \\ x \ne \pm 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 45x - 144 = 0, \\ x \ne \pm 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-45 \pm \sqrt{2025+576}}{2}, \\ x \ne \pm 12; \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-45 \pm 51}{2}, \\ x \ne \pm 12; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -48, x_2 = 3, \\ x \ne \pm 12. \end{cases}$
Корінь $x = -48$ умову задачі не задовольняє. Отже, швидкість течії річки 3 км/год.
Відповідь. 3 км/год.

20. Нехай у трикутнику ABC BM — медіана, $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см. Продовжимо медіану BM так, щоб $MD = BM$, тоді $ABCD$ — паралелограм (за ознакою).



Нехай $BM = x$ см, тоді за властивістю сторін паралелограма маємо: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, тоді $10^2 + (2x)^2 = 2(5^2 + 7^2)$. Звідси $100 + (2x)^2 = 2(25 + 49)$; $100 + 4x^2 = 148$; $4x^2 = 48$; $x^2 = 12$; $x = \pm 2\sqrt{3}$.
$x = -2\sqrt{3}$ — не задовольняє умову задачі. Отже, $BM = 2\sqrt{3}$ см.
Відповідь. $2\sqrt{3}$ см.

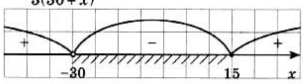
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	Г	В	А	Г	А	А	Б	Б	В

11. $-5x^2 - 7x = 13$; $5x^2 + 7x + 13 = 0$ — це квадратне рівняння.
Оскільки $D = 49 - 4 \cdot 5 \cdot 13 = 49 - 260 = -211 < 0$, то рівняння не має розв'язків.
Відповідь. Жодного.

12. Оскільки $b_9 = b_1q^8$, то за умовою задачі $b_8 \cdot b_{10} = 144$. Звідси $b_1q^7 \cdot b_1q^9 = 144$ або $b_1^2q^{16} = 144$. Тоді $(b_1q^8)^2 = 144$. Звідси $b_1q^8 = 12$ або $b_1q^8 = -12$.
Отже, $b_9 = 12$; $b_9 = -12$.
Відповідь. 12 або −12.

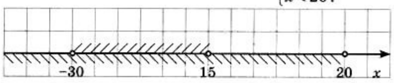
13. $\begin{cases} \frac{x}{30+x} \le \frac{1}{3}, \\ x + 30 < 50; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3x - 30 - x}{3(30+x)} \le 0, \\ x < 50 - 30; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2(x-15)}{3(30+x)} \le 0, \\ x < 20. \end{cases}$

Розв'яжемо нерівність $\frac{2(x-15)}{3(30+x)} \le 0$ методом інтервалів:



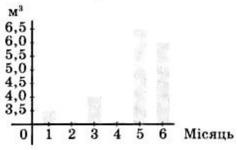
Тоді $x \in (-30; 15]$.

Знайдемо спільні розв'язки нерівностей системи $\begin{cases} \frac{2(x-15)}{3(30+x)} \le 0, \\ x < 20: \end{cases}$



Отже, $x \in (-30; 15]$.
Відповідь. $(-30; 15]$.

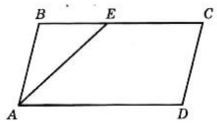
14.



15. Оскільки в трикутник KMN вписано коло, то KO і NO — бісектриси кутів MKN і MNK. Оскільки $\angle KON = 120°$, то із трикутника KON маємо:

$$\angle OKN + \angle ONK = 180° - 120° = 60°,$$

тоді $\angle MKN + \angle MNK = 2(\angle OKN + \angle ONK) = 2 \cdot 60° = 120°$. Із трикутника KMN маємо: $\angle KMN = 180° - (\angle MKN + \angle MNK) = 180° - 120° = 60°$.
Відповідь. 60°.



16. Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то $BC \parallel AD$, AE — січна при прямих BC і AD. $\angle DAE = \angle BAE$, $BE = 6$ см, $EC = 8$ см.
Отже, $\angle DAE = \angle BEA$, як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній. Тоді трикутник ABE — рівнобедрений з основою AE, оскільки $\angle ABE = \angle BEA$. Тоді $AB = BE = 6$ см, $BC = 8 + 6 = 14$ (см).
Враховуючи те, що в паралелограмі протилежні сторони рівні, його периметр дорівнює: $2(AB + BC) = 2(6 + 14) = 40$ (см).
Відповідь. 40 см.

17. $(x^2 + 2x)^2 + (x + 1)^2 = 1$; $(x^2 + 2x)^2 + x^2 + 2x + 1 = 1$; $(x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x) = 0$.
Нехай $x^2 + 2x = a$, тоді $a^2 + a = 0$. Звідси $a(a + 1) = 0$; $a = 0$, $a = -1$. Тоді:
1) $x^2 + 2x = 0$, звідси $x(x + 2) = 0$; $x = 0$; $x = -2$;
2) $x^2 + 2x = -1$, звідси $x^2 + 2x = -1$; $x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x + 1)^2 = 0$; $x + 1 = 0$; $x = -1$.
Відповідь. 0; −1; −2.

18. $\left(\frac{x+4}{3x+3} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x+1}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \left(\frac{x+4}{3(x+1)} - \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x+1}{3} + \frac{2}{x^2-1} =$

$= \frac{x+4-3}{3(x+1)} : \frac{x+1}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1}{3(x+1)} \cdot \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} =$

$= \frac{x-1+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}.$

Відповідь. $\frac{1}{x-1}$.

19. Нехай власна швидкість катера x км/год. Систематизуємо дані задачі у вигляді таблиці.

Катер	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
За течією	$x + 3$	24	$\frac{24}{x+3}$
Проти течії	$x - 3$	24	$\frac{24}{x-3}$

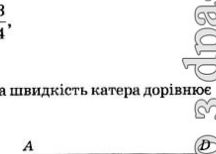
За умовою задачі маємо рівняння: $\frac{24}{x+3} + \frac{24}{x-3} = 4\frac{4}{15}$.

Розв'яжемо його:
$\frac{24}{x+3} + \frac{24}{x-3} = 4\frac{4}{15}$; $\frac{24}{x+3} + \frac{24}{x-3} = \frac{64}{15}$; $\frac{3}{x+3} + \frac{3}{x-3} = \frac{8}{15}$;

$\begin{cases} 45(x-3) + 45(x+3) = 8(x^2 - 9), \\ x \ne 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 8x^2 - 90x - 72 = 0, \\ x \ne \pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2 - 45x - 36 = 0, \\ x \ne \pm 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{45 \pm \sqrt{2025 + 576}}{8}, \\ x \ne \pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = \frac{45 \pm 51}{8}, \\ x \ne \pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 12, x_2 = -\frac{3}{4}, \\ x \ne \pm 3. \end{cases}$

Корінь $x = -\frac{3}{4}$ умову задачі не задовольняє. Отже, власна швидкість катера дорівнює 12 км/год.
Відповідь. 12 км/год.



20. Нехай у трикутнику ABC BM — медіана, $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $BM = \frac{\sqrt{22}}{2}$ см. Продовжимо медіану BM так, щоб $MD = BM$, тоді $ABCD$ — паралелограм (за ознакою).
Нехай $AC = 2x$ см, тоді за властивістю сторін паралелограма маємо: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, тоді $\left(2 \cdot \frac{\sqrt{22}}{2}\right)^2 + (2x)^2 = 2(5^2 + 6^2)$, звідси $(2x)^2 + 22 = 2(25 + 36)$; $(2x)^2 + 22 = 122$; $(2x)^2 = 100$; $2x = \pm 10$.
$2x = -10$ — не задовольняє умову задачі. Отже, $AC = 10$ см.
Відповідь. 10 см.

Варіант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	Г	Б	Г	В	А	В	Б	Г	В

11. $\begin{cases} 2x - y = 4, \mid \cdot 3 \\ 6x - 3y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 3y = 12, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$ Оскільки $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має безліч розв'язків.

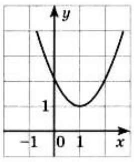
Відповідь. Безліч.

12. Оскільки $a_5 = a_1 + 4d$, тоді за умовою задачі $a_4 + a_6 = 52$. Звідси $a_1 + 3d + a_1 + 5d = 52$ або $2a_1 + 8d = 52$; $2(a_1 + 4d) = 52$; $a_1 + 4d = \frac{52}{2}$; $a_1 + 4d = 26$. Отже, $a_5 = 26$.

Відповідь. 26.

13. Оскільки підтверджені запаси нікелю у світі становлять 47,5 мільйона тонн, а в Україні — 0,4 % від світових запасів, то запаси нікелю в Україні становлять $47{,}5 \times 0{,}004 = 0{,}19$ (мільйона тонн) = 190 000 тонн.

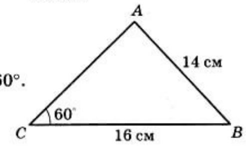
Відповідь: 190 000 тонн.



14. $y = x^2 - 2x + 2$; $y = (x - 1)^2 + 1$. Графіком функції $y = x^2 - 2x + 2$ є парабола, вершина якої знаходиться в точці (1; 1) і вітки якої напрямлені вгору.

15. $\triangle NMO = \triangle NPO$ (за трьома сторонами). Із рівності трикутників маємо: $\angle MNO = \angle PNO = \frac{60°}{2} = 30°$. Із прямокутного трикутника MNO маємо: $OM = \frac{1}{2}ON = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$ (см).

Відповідь. 8 см.



16. Нехай $AB = 14$ см, $BC = 16$ см, $\angle C = 60°$.
За теоремою косинусів маємо:
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$;
Тоді $14^2 = 16^2 + AC^2 - 2 \cdot 16 \cdot AC \cdot \cos 60°$;
$196 = 256 + AC^2 - 2 \cdot 16 \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$; $AC^2 - 16AC + 60 = 0$;
$AC = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2}$;
$AC = 10$ або $AC = 6$. Отже, $AC = 10$ см або $AC = 6$ см.

Відповідь. 10 см або 6 см.

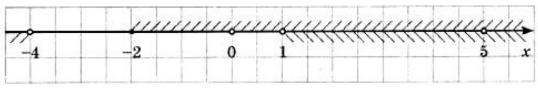
17. $\frac{2}{x-7} = \frac{x}{x-2} + \frac{10}{(x-2)(x-7)}$; $\frac{2}{x-7} - \frac{x}{x-2} - \frac{10}{(x-2)(x-7)} = 0$;
$\frac{2x - 4 - x^2 + 7x - 10}{(x-2)(x-7)} = 0$; $\frac{-x^2 + 9x - 14}{(x-2)(x-7)} = 0$; $\frac{x^2 - 9x + 14}{(x-2)(x-7)} = 0$;

$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \text{ або } x = 7, \\ x \neq 2, \\ x \neq 7; \end{cases}$ $x \in \varnothing$.

Відповідь. $x \in \varnothing$.

18. Враховуючи, що дріб існує, коли знаменник не дорівнює нулю, а арифметичний квадратний корінь існує, коли підкореневий вираз є невід'ємним, маємо систему обмежень: $\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 5x \neq 0, \\ x^2 + 3x - 4 > 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \neq 0, x \neq 5, \\ (x+4)(x-1) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \neq 0, \ x \neq 5, \\ x < -4 \text{ або } x > 1. \end{cases}$

Знайдемо спільні розв'язки системи:



$x \in (1; 5) \cup (5; +\infty)$. Отже, область визначення функції $(1; 5) \cup (5; +\infty)$.

Відповідь. $(1; 5) \cup (5; +\infty)$.

19.

Відстань	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
Від X до Y	x	40	$\frac{40}{x}$
Від Y до X	$x - 10$	40	$\frac{40}{x-10}$

За умовою задачі маємо рівняння: $\frac{40}{x-10} - \frac{40}{x} = \frac{20}{60}$.

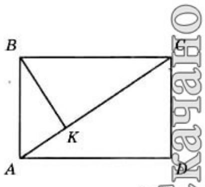
Розв'яжемо його:
$\frac{40}{x-10} - \frac{40}{x} = \frac{1}{3}$; $\frac{120x - 120x + 1200 - x^2 + 10x}{3x(x-10)} = 0$;

$\frac{-x^2 + 10x + 1200}{3x(x-10)} = 0$; $\begin{cases} -x^2 + 10x + 1200 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 10x - 1200 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 10; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4800}}{2}, \\ x \neq 0, \\ x \neq 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{10 \pm 70}{2}, \\ x \neq 0, \\ x \neq 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 40, \\ x_2 = -30. \end{cases}$

Корінь $x = -30$ умову задачі не задовольняє.
Отже, на шлях від X до Y швидкість трактора становила 40 км/год.

Відповідь. 40 км/год.



20. Нехай $ABCD$ — прямокутник, BK — бісектриса, $AK = 15$ см, $KC = 20$ см.

За властивістю бісектриси трикутника ABC маємо: $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Нехай $AB = 3x$ см, $BC = 4x$ см, тоді із трикутника ABC за теоремою Піфагора маємо: $(3x)^2 + (4x)^2 = (15 + 20)^2$, тоді $9x^2 + 16x^2 = 1225$; $25x^2 = 1225$; $x^2 = 49$; $x = 7$ або $x = -7$ — не задовольняє умову задачі. Тоді $AB = 3 \cdot 7 = 21$ (см), $BC = 4 \cdot 7 = 28$ (см). $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 21 \cdot 28 = 588$ (см^2).

Відповідь. 588 см^2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	В	В	В	Б	Б	Г	В	А	Г

11. $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 6x - 3y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 3y = 18, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$ Оскільки $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система розв'язків не має.

Відповідь. Жодного.

12. Оскільки $a_9 = a_1 + 8d$. Тоді за умовою задачі $a_8 + a_{10} = 15$. Звідси $a_1 + 7d + a_1 + 9d = 15$ або $2a_1 + 16d = 15$, або $2(a_1 + 8d) = 15$; $a_1 + 8d = \frac{15}{2}$; $a_1 + 8d = 7{,}5$.

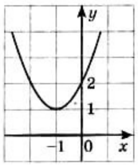
Отже, $a_9 = 7{,}5$.

Відповідь. 7,5.

13. Оскільки 22 мільярди становить близько 11 % від усіх покладів планети, то запас усіх покладів марганцевої руди планети дорівнює:

$\frac{0{,}22}{0{,}11} = \frac{220}{11} = 20$ (мільярдів тонн).

Відповідь. 20 000 000 000 тонн.



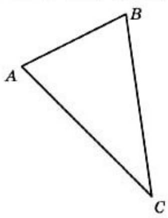
14. $y = x^2 + 2x + 2$; $y = (x + 1)^2 + 1$. Графіком функції $y = x^2 + 2x + 2$ є парабола, вершина якої знаходиться в точці $(-1; 1)$ і вітки якої напрямлені вгору.

15. Оскільки $MN = NK$ за властивістю дотичних, проведених з точки N до кола з центром O, тоді $\angle NMK = \angle NKP = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

$\triangle NMO = \triangle NKO$, тоді $\angle MNO = \angle KNO = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

$\triangle MPN = \triangle KPN$, тоді $MP = KP = NP$. Оскільки $NP = 3$ см, то $MK = 2MP = 2NP = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

Відповідь. 6 см.



16. Нехай $AB = 35$ см, $AC = 40$ см, $\angle C = 60^\circ$.

За теоремою косинусів маємо:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$.

Тоді $35^2 = 40^2 + BC^2 - 2 \cdot 40 \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$;

$1225 = 1600 + BC^2 - 2 \cdot 40 \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$; $-1600 + 1225 = -40 \cdot BC + BC^2$;

$BC^2 - 40BC + 375 = 0$; $BC = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1500}}{2} = \frac{40 \pm 10}{2}$;

$BC = 25$ або $BC = 15$. Отже, $BC = 25$ см або $BC = 15$ см.

Відповідь. 25 см або 15 см.

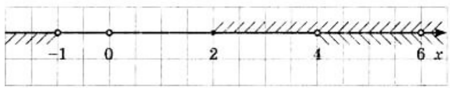
17. $\frac{x}{x-2} + \frac{6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5}$; $\frac{x}{x-2} + \frac{6}{(x-2)(x-5)} - \frac{2}{x-5} = 0$;

$\frac{x^2 - 5x + 6 - 2x + 4}{(x-2)(x-5)} = 0$; $\frac{x^2 - 7x + 10}{(x-2)(x-5)} = 0$; $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \text{ або } x = 5, \\ x \neq 2, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $x \in \varnothing$.

Відповідь. $x \in \varnothing$.

18. Враховуючи, що дріб існує, коли знаменник не дорівнює нулю, а арифметичний квадратний корінь існує, коли підкореневий вираз є невід'ємним, маємо систему обмежень: $\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 6x \neq 0, \\ x^2 - 3x - 4 > 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \neq 0, x \neq 6, \\ (x+1)(x-4) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \neq 0, \ x \neq 6, \\ x < -1 \text{ або } x > 4. \end{cases}$

Знайдемо спільні розв'язки системи:



$x \in (4; 6) \cup (6; +\infty)$. Отже, область визначення функції $(4; 6) \cup (6; +\infty)$.

Відповідь. $(4; 6) \cup (6; +\infty)$.

19.

Відстань	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
Від M до H	$x + 1$	32	$\frac{32}{x+1}$
Від H до M	x	32	$\frac{32}{x}$

За умовою задачі маємо рівняння: $\frac{32}{x} - \frac{32}{x+1} = \frac{8}{60}$.

Розв'яжемо його:

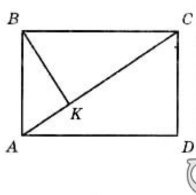
$\frac{32}{x} - \frac{32}{x+1} = \frac{2}{15}$; $\frac{32 \cdot 15(x+1) - 32 \cdot 15x - 2x(x+1)}{x(x+1) \cdot 15} = 0$; $\frac{480x + 480 - 480x - 2x^2 - 2x}{15x(x+1)} = 0$;

$\frac{-2x^2 - 2x + 480}{15x(x+1)} = 0$; $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 480 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x - 240 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 960}}{2}, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{-1 \pm 31}{2}, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 15, \\ x_2 = -16. \end{cases}$ Корінь $x = -16$ умову задачі не задовольняє.

Отже, на зворотному шляху велосипедист їхав зі швидкістю 15 км/год.

Відповідь. 15 км/год.



20. Нехай $ABCD$ — прямокутник, $P_{ABCD} = 70$ см. BK — бісектриса. $AK : KC = 3 : 4$.

Оскільки $P_{ABCD} = 70$, то $AB + BC = \frac{P_{ABCD}}{2} = \frac{70}{2} = 35$ (см).

За властивістю бісектриси трикутника ABC маємо: $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$ або $\frac{AB}{35 - AB} = \frac{3}{4}$, тоді $4AB = 105 - 3AB$; $7AB = 105$; $AB = 15$. Оскільки $AB = 15$ см, то

$BC = 35 - 15 = 20$ (см). $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 15 \cdot 20 = 300$ (см^2).

Відповідь. 300 см^2.

Варіант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	Г	Б	Б	Г	Г	В	Б	В	В

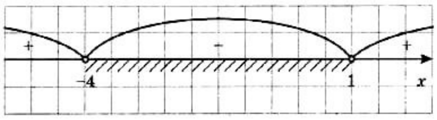
11. Відстань від Землі до Місяця — 384 400 000 = $3,844 \cdot 10^8$ (м); відстань від Землі до Сонця — 1 496 000 000 000 = $1,496 \cdot 10^{12}$ (м).

Відповідь. $3,844 \cdot 10^8$ м, $1,496 \cdot 10^{12}$ м.

12. Мода вибірки дорівнює 7.

Відповідь. 7.

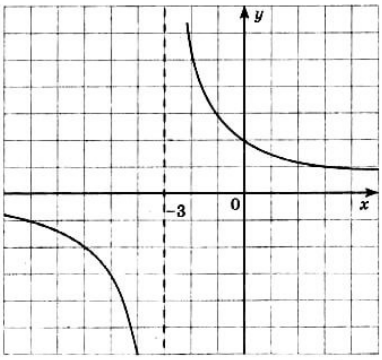
13. $(2x-3)(3x-1) < (x-6)(3x-2)+3$; $6x^2-2x-9x+3 < 3x^2-2x-18x+12+3$; $6x^2-11x+3-3x^2+20x-15<0$; $3x^2+9x-12<0$; $x^2+3x-4<0$; $(x+4)(x-1)<0$;



$x \in (-4; 1)$.

Відповідь. $(-4; 1)$.

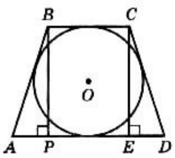
14. Графіком функції $y = \dfrac{6}{x+3}$ є гіпербола, причому $x \neq -3$.



15. Якщо в трикутнику ABC через точку M проведено пряму, паралельну AC, то $\triangle ABC \sim \triangle MBN$. Звідси $\dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BC}{BN}$, або $\dfrac{AC}{MN} = \dfrac{BC}{BC-NC}$. Тоді $\dfrac{14}{5} = \dfrac{7}{7-NC}$, звідси $\dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{7-NC}$; $14-2NC=5$; $2NC=9$; $NC=4,5$. Отже, $NC = 4,5$ см.

Відповідь. 4,5 см.

16. $ABCD$ — рівнобічна трапеція, у якій $AD \parallel BC$, $BC = 4$ см і $AD = 16$ см. За властивістю кола, вписаного в чотирикутник, маємо: $2AB = AD + BC$; $AB = \dfrac{AD+BC}{2} = \dfrac{16+4}{2} = 10$ (см). Проведемо $BP \perp AD$, $CE \perp AD$, тоді $AP = ED = \dfrac{AD-BC}{2} = \dfrac{16-4}{2} = 6$ (см). Із прямокутного трикутника APB маємо: $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{10^2-6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ (см). Отже, висота трапеції дорівнює 8 см.



Відповідь. 8 см.

17. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x - y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 19, \\ x - y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 19, \\ x - y = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 19, \\ y = x - 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 19, \\ y = x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x^2 - x + x^2 - 2x + 1 = 19, \\ y = x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2 - 3x - 18 = 0, \\ y = x-1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ y = x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2; x = 3, \\ y = x-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2, \\ y = -3 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$

Відповідь. $(-2; -3)$, $(3; 2)$.

18. $\dfrac{27^3 \cdot 9^{-4}}{100^5 \cdot 10^{-12}} - 0,3^{-4} \cdot 0,81 = \dfrac{(3^3)^3 \cdot (3^2)^{-4}}{(10^2)^5 \cdot 10^{-12}} - \left(\dfrac{3}{10}\right)^{-4} \cdot \dfrac{81}{100} =$

$= \dfrac{3^9 \cdot 3^{-8}}{10^{10} \cdot 10^{-12}} - \dfrac{3^{-4}}{10^{-4}} \cdot \dfrac{3^4}{10^2} = \dfrac{3^1}{10^{-2}} - \dfrac{3^0}{10^{-2}} = \dfrac{3-1}{10^{-2}} = 2 \cdot 10^2 = 200.$

Відповідь. 200.

19. Нехай швидкість течії річки x км/год. Систематизуємо дані задачі у вигляді таблиці.

Катер	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
За течією	$18 + x$	44	$\dfrac{44}{18+x}$
Проти течії	$18 - x$	28	$\dfrac{28}{18-x}$

За умовою задачі маємо рівняння: $\dfrac{44}{18+x} + \dfrac{28}{18-x} = 4$.

Розв'яжемо його:

$\dfrac{44}{18+x} + \dfrac{28}{18-x} = 4$; $\dfrac{44(18-x) + 28(18+x)}{(18+x)(18-x)} = 4$; $\dfrac{792 - 44x + 504 + 28x}{(18+x)(18-x)} = 4$;

$\dfrac{1296 - 16x}{(18+x)(18-x)} = 4$; $\begin{cases} 1296 - 16x = 1296 - 4x^2, \\ x \neq 18, x \neq -18; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2 - 16x = 0, \\ x \neq 18, x \neq -18; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, x = 0; \\ x \neq 18, x \neq -18. \end{cases}$

Корінь $x = 0$ умову задачі не задовольняє. Отже, швидкість течії річки дорівнює 4 км/год.

Відповідь. 4 км/год.

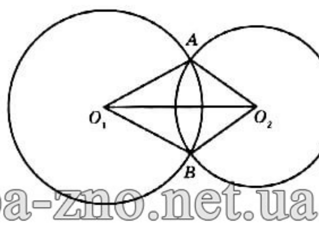
20. Нехай $O_1A = 15$ см, $O_2A = 13$ см, $AB = 24$ см, тоді

$O_1O_2 = \sqrt{(AO_1)^2 - \left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2} + \sqrt{(AO_2)^2 - \left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2} =$

$= \sqrt{15^2 - 12^2} + \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{225-144} + \sqrt{169-144} = 9 + 5 = 14.$

Отже, $O_1O_2 = 14$ см.

Відповідь. 14 см.

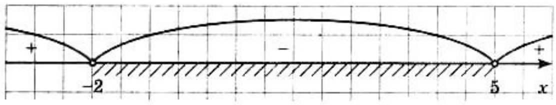


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	В	Г	Г	В	В	В	Г	В	Г

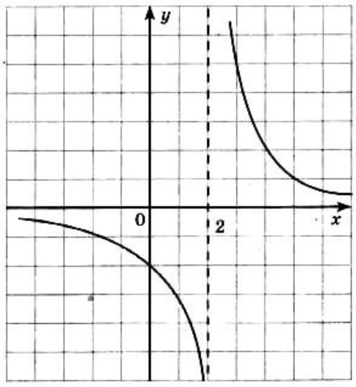
11. Площа найбільшої в Європі пустелі Олешківські піски — $150\,000 = 1{,}5\cdot10^5$ (га), а площа найбільшої пустелі планети Сахари — $906\,500\,000 = 9{,}065\cdot10^8$ (га).
Відповідь. $1{,}5\cdot10^5$ га, $9{,}065\cdot10^8$ га.

12. Медіана вибірки дорівнює 5. *Відповідь.* 5.

13. $(x-4)(3x-1)<(2x-6)(x-2)+2$; $3x^2-x-12x+4<2x^2-4x-6x+12+2$;
$x^2-3x-10<0$;
$(x-5)(x+2)<0$;
$x\in(-2;5)$.
Відповідь. $(-2;5)$.

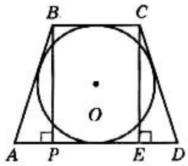


14. Графіком функції $y=\dfrac{4}{x-2}$ є гіпербола, причому $x\neq2$.



15. Якщо в трикутнику ABC через точку M проведено пряму, паралельну AC, то $\triangle ABC\sim\triangle MBN$. Звідси $\dfrac{AC}{MN}=\dfrac{AB}{MB}$, або $\dfrac{AC}{MN}=\dfrac{MB+MA}{MB}$. Тоді $\dfrac{AC}{6}=\dfrac{5+3}{5}$, звідси $AC=9{,}6$. Отже, $AC=9{,}6$ см.
Відповідь. 9,6 см.

16. $ABCD$ — рівнобічна трапеція, у якій $AD\parallel BC$, $BC=8$ см і $AD=18$ см. За властивістю кола, вписаного в чотирикутник, маємо: $2AB=$ $=AD+BC$; $AB=\dfrac{AD+BC}{2}=\dfrac{18+8}{2}=13$ (см). Проведемо $BP\perp AD$, $CE\perp AD$, тоді $AP=ED=\dfrac{AD-BC}{2}=\dfrac{18-8}{2}=5$ (см).
Із прямокутного трикутника APB маємо: $BP=\sqrt{AB^2-AP^2}=$ $=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ (см). Тоді радіус кола, вписаного в трапецію $ABCD$, дорівнює $\dfrac{BP}{2}=\dfrac{12}{2}=6$ (см).
Відповідь. 6 см.



17. $\begin{cases}x^3+y^3=28,\\x+y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=28,\\x+y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}4(x^2-xy+y^2)=28,\\x+y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\y=4-x;\end{cases}$
$\begin{cases}x^2-x(4-x)+(4-x)^2=7,\\y=4-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-4x+x^2+16-8x+x^2=7,\\y=4-x;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2-12x+9=0,\\y=4-x;\end{cases}$
$\begin{cases}x^2-4x+3=0,\\y=4-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-4x+3=0,\\y=4-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1;x=3,\\y=4-x;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$ або $\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$
Відповідь. (1; 3), (3; 1).

18. $\dfrac{0{,}8^7\cdot0{,}16^{-4}}{0{,}64^3\cdot0{,}4^{-7}}+(-2)^{-3}\cdot(-2)^5=\dfrac{(0{,}4\cdot2)^7\cdot(0{,}4^2)^{-4}}{(0{,}4^2\cdot4)^3\cdot0{,}4^{-7}}+(-2)^2=$
$=\dfrac{0{,}4^7\cdot2^7\cdot0{,}4^{-8}}{0{,}4^6\cdot4^3\cdot0{,}4^{-7}}+(-2)^2=\dfrac{0{,}4^{-1}\cdot2^7}{2^6\cdot0{,}4^{-1}}+4=2+4=6.$
Відповідь. 6.

19. Нехай власна швидкість човна x км/год. Систематизуємо дані задачі у вигляді таблиці.

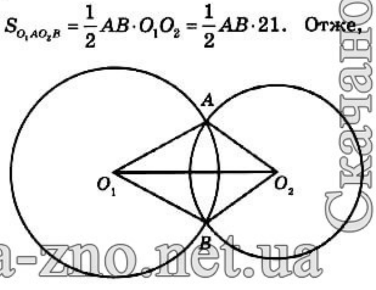
Човен	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
За течією	$x+5$	45	$\dfrac{45}{x+5}$
Проти течії	$x-5$	10	$\dfrac{10}{x-5}$

За умовою задачі маємо рівняння: $\dfrac{45}{x+5}+\dfrac{10}{x-5}=5$.

Розв'яжемо його: $\dfrac{45}{x+5}+\dfrac{10}{x-5}=5$; $\dfrac{45x-225+10x+50}{x^2-25}=5$; $\dfrac{55x-175}{x^2-25}=5$;
$\begin{cases}55x-175=5x^2-125,\\x\neq5,x\neq-5;\end{cases}$ $\begin{cases}5x^2-55x+50=0,\\x\neq5,x\neq-5;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-11x+10=0,\\x\neq5,x\neq-5;\end{cases}$ $\begin{cases}x=10,x=1;\\x\neq5,x\neq-5.\end{cases}$ Корінь $x=1$ умову задачі не задовольняє. Отже, власна швидкість човна дорівнює 10 км/год.
Відповідь. 10 км/год.

20. Нехай $O_1A=17$ см, $O_2A=10$ см, $O_1O_2=21$ см,
тоді $S_{O_1AO_2}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}=$
$=\sqrt{24\cdot14\cdot7\cdot3}=14\cdot6=84$ (см²). $S_{O_1AO_2B}=2S_{O_1AO_2}=2\cdot84=168$ (см²).

З іншого боку, оскільки $O_1O_2\perp AB$, то $S_{O_1AO_2B}=\dfrac{1}{2}AB\cdot O_1O_2=\dfrac{1}{2}AB\cdot21$. Отже, $\dfrac{1}{2}AB\cdot21=168$, тоді $21AB=336$, $AB=16$ (см).
Відповідь. 16 см.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	В	Г	Г	Б	Г	А	Б	Б	Б

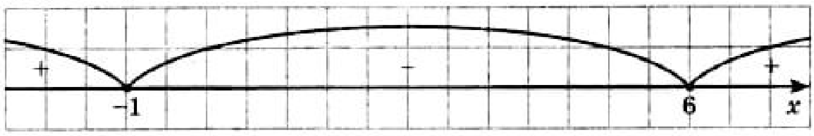
11. Координати вершини параболи $y = x^2 - 4x + 3$ знайдемо за формулами:

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$; $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$. Отже, вершина параболи $y = x^2 - 4x + 3$ розташована в точці $(2; -1)$.

Відповідь. $(2; -1)$.

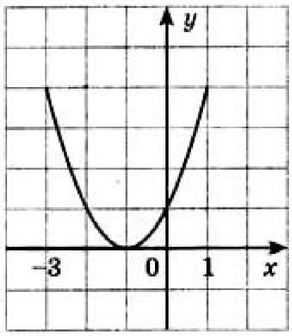
12. $\frac{2}{a-3} - \frac{2+a}{a-3} = \frac{2-2-a}{a-3} = \frac{-a}{a-3} = \frac{a}{3-a}$. *Відповідь.* $\frac{a}{3-a}$.

13. $2x^2 - 10x + x - 5 - x^2 + 7x - 1 - 3x \geq 0$; $x^2 - 5x - 6 \geq 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 6$; $(x+1)(x-6) \geq 0$.
$x \in (-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$.



Відповідь. $(-\infty; -1] \cup [6; +\infty)$.

14. Графіком функції $y = (x + 1)^2$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору, яку отримаємо, змістивши графік функції $y = x^2$ на одиницю вліво по осі Ox.



15. $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ за двома сторонами і кутом між ними ($AB = 2AD$, $AC = 2AE$, кут A — спільний). $k = 2$ — коефіцієнт подібності $\triangle ABC$ і $\triangle ADE$. Площі подібних трикутників відносяться як квадрат коефіцієнта подібності:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2; \quad S_{\triangle ADE} = \frac{S_{\triangle ABC}}{k^2} = \frac{16}{4} = 4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь. 4 см^2.

16. $\vec{y} = \overrightarrow{3a} - \vec{b}; \vec{y} = (5; -12)$; $|\vec{y}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Відповідь. 13.

17. $\frac{2}{x-7} = \frac{x}{x-2} + \frac{10}{(x-2)(x-7)}$; $\frac{2(x-2) - x(x-7) - 10}{(x-7)(x-2)} = 0$; $\frac{2x - 4 - x^2 + 7x - 10}{(x-7)(x-2)} = 0$;

$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2; x_2 = 7, \\ x \neq 2, \\ x \neq 7; \end{cases}$ $x \in \varnothing$.

Відповідь. $\varnothing$.

18. $(4\sqrt{150} - 6\sqrt{54} - \sqrt{96})^2 - 20 = (20\sqrt{6} - 18\sqrt{6} - 4\sqrt{6})^2 - 20 = (-2\sqrt{6})^2 - 20 = 24 - 20 = 4$.

Відповідь. 4.

19. Оскільки периметр прямокутника дорівнює 30 см, то сума суміжних сторін прямокутника дорівнює $30 : 2 = 15$ (см).

Нехай довжина прямокутника дорівнює x см, тоді ширина прямокутника дорівнює $(15 - x)$ см. Зменшена довжина прямокутника дорівнює $(x - 3)$ см, а збільшена ширина прямокутника — $(15 - x + 5) = (20 - x)$ см.

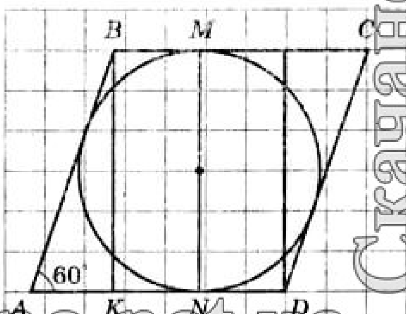
Маємо рівняння: $(x - 3)(20 - x) = x(15 - x) + 4$; $20x - x^2 - 60 + 3x = 15x - x^2 + 4$; $8x = 24$; $x = 8$. Отже, довжина прямокутника дорівнює 8 см, а ширина — $15 - 8 = 7$ см. Тоді площа дорівнює $8 \cdot 7 = 56$ (см^2).

Відповідь. 56 см^2.

20. Нехай у ромбі $ABCD$ $AB = 8$ см, $\angle ABC = 120°$, $\angle BAD = 180° - 120° = 60°$.

Проведемо $BK \perp AD$, $MN \perp AD$. З $\triangle ABK$: $\angle ABK = 30°$; $AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (см). Нехай $KN = ND = x$, $AD = AK + KN + ND$; $8 = 4 + 2x$; $x = 2$ (см). Отже, $KN = ND = 2$ (см). $AN = AK + KN = 4 + 2 = 6$ (см).

Відповідь. 2 см, 6 см.



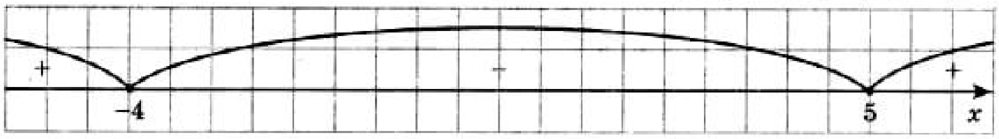
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	В	Б	Б	В	В	Г	А	Г	В

11. Координати вершини параболи $y = x^2 + 6x - 7$ знайдемо за формулами: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3$; $y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 7 = 9 - 18 - 7 = -16$. Отже, вершина параболи $y = x^2 + 6x - 7$ знаходиться в точці $(-3; -16)$.

Відповідь. $(-3; -16)$.

12. $\dfrac{x}{x+7} - \dfrac{2+x}{x+7} = \dfrac{x-2-x}{x+7} = \dfrac{-2}{x+7}$. *Відповідь.* $\dfrac{-2}{x+7}$.

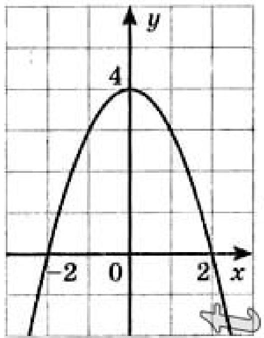
13. $3x^2 - 12x + x - 4 - 2x^2 + 4x - 16 + 6x \le 0$; $x^2 - x - 20 \le 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 5$; $(x+4)(x-5) \le 0$.



$x \in [-4;\ 5]$.

Відповідь. $[-4;\ 5]$.

14. Графіком функції $y = -x^2 + 4$ є парабола, вітки якої напрямлені донизу, яку отримаємо, змістивши графік функції $y = -x^2$ на 4 одиниці вгору по осі Oy.



15. $\triangle ABC \sim \triangle MBH$ за двома сторонами і кутом між ними ($AB = 2MB$, $BC = 2BH$, кут A — спільний). $k = 2$ — коефіцієнт подібності $\triangle ABC$ і $\triangle MBH$. Площі подібних трикутників відносяться як квадрат коефіцієнта подібності:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBH}} = k^2;\ S_{\triangle ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle MBH} = 4 \cdot 6 = 24\ (\text{см}^2).$$

Відповідь. 24 см².

16. $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{x} = (4+4; -5-10) = (8; -15)$; $|\vec{x}| = \sqrt{8^2 + (-15)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$.

Відповідь. 17.

17. $\dfrac{y}{y-2} + \dfrac{4}{(y-2)(y-4)} = \dfrac{2}{y-4}$; $\dfrac{y(y-4)+4-2(y-2)}{(y-2)(y-4)} = 0$; $\dfrac{y^2-4y+4-2y+4}{(y-2)(y-4)} = 0$;

$$\begin{cases} y^2 - 6y + 8 = 0, \\ y \ne 2, \\ y \ne 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 2; y_2 = 4, \\ y \ne 2, \\ y \ne 4; \end{cases} \quad y \in \varnothing.$$

Відповідь. $\varnothing$.

18. $\left(2\sqrt{320} - 7\sqrt{20} - \sqrt{45}\right)^2 + 20 = \left(16\sqrt{5} - 14\sqrt{5} - 3\sqrt{5}\right)^2 + 20 = \left(-\sqrt{5}\right)^2 + 20 = 5 + 20 = 25$.

Відповідь. 25.

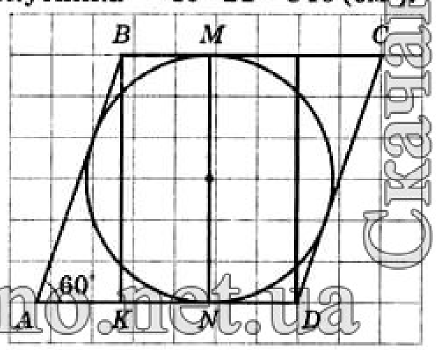
19. Нехай основа другого прямокутника дорівнює x см, тоді основа першого прямокутника дорівнює $(x + 5)$ см. Оскільки периметри прямокутників дорівнюють по 122 см, то сума суміжних сторін прямокутників дорівнює $122 : 2 = 61$ (см). Друга сторона першого прямокутника дорівнює $(61 - x - 5) = (56 - x)$ см, друга сторона другого прямокутника дорівнює $(61 - x)$ см. Маємо рівняння: $(61 - x) \cdot x - (56 - x)(x + 5) = 120$; $61x - x^2 - 51x + x^2 - 280 = 120$; $10x = 400$; $x = 40$. Отже, сторони другого прямокутника дорівнюють 40 см і 21 см, а першого — 45 см і 16 см. Тоді площа першого прямокутника дорівнює $45 \cdot 16 = 720$ (см²), площа другого прямокутника — $40 \cdot 21 = 840$ (см²).

Відповідь. 720 см² і 840 см².

20. Нехай у ромбі $ABCD$ $AB = 12$ см, $\angle BAD = 60°$. Проведемо $BK \perp AD$, $MN \perp AD$. З $\triangle ABK$: $\angle ABK = 30°$; $AK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см). Нехай $KN = ND = x$, $AD = AK + KN + ND$; $12 = 6 + 2x$; $x = 3$ (см). Отже, $KN = ND = 3$ (см).

$AN = AK + KN = 6 + 3 = 9$ (см).

Відповідь. 3 см, 9 см.



Варіант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	В	В	Г	Б	А	В	Г	Б	А

11. 3000 м = 3 км. Блискавка рухається до землі $\frac{3}{100}=0,03$ с. *Відповідь.* 0,03 с.

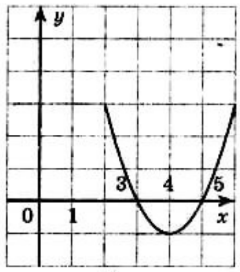
12. Нерівність $-1 \le x \le 1$ має цілі розв'язки −1; 0; 1.
Отже, нерівність має три цілі розв'язки. *Відповідь.* 3.

13. Сума членів геометричної прогресії обчислюється за формулою: $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Тоді $S_8 = 3 \cdot \frac{1-2^8}{1-2} = 3 \cdot \frac{-255}{-1} = 765$.

Відповідь. 765.

14. $y=(x-4)^2-1$. Графіком функції $y=(x-4)^2-1$ є парабола, вершина якої знаходиться в точці (4; −1) і вітки якої напрямлені вгору.



15. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, тоді

$a = 18 \cdot \sin 60° = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ (см); $b = 18 \cdot \cos 60° = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9$ (см);

$S = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} 9\sqrt{3} \cdot 9 = \frac{81\sqrt{3}}{2} = 40,5\sqrt{3}$ (см²).

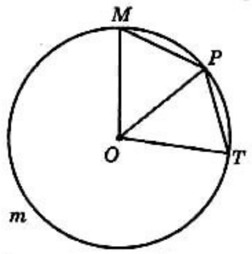
Відповідь. $40,5\sqrt{3}$ см².

16. Кутова міра дуги MPT дорівнює:

$\overset{\frown}{MPT} = \overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{PT} = 68° + 47° = 115°$;

$\overset{\frown}{MmT} = 360° - \overset{\frown}{MPT} = 360° - 115° = 245°$;

$\angle MPT = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MmT} = \frac{245°}{2} = 122,5°$, оскільки $\angle MPT$ — вписаний кут і вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. *Відповідь.* 122,5°.



17. $\left(x - \frac{x+y}{x-y} + y\right) : \left(1 - \frac{2y+1}{x^2-y^2}\right) = \left(\frac{x(x-y) - x - y + y(x-y)}{x-y}\right) : \left(\frac{x^2-y^2-2y-1}{x^2-y^2}\right) =$

$= \frac{x^2 - xy - x - y + yx - y^2}{x-y} : \frac{x^2-y^2-2y-1}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2-y^2-x-y}{x-y} : \frac{x^2-y^2-2y-1}{(x-y)(x+y)} =$

$= \frac{(x-y)(x+y)-(x+y)}{x-y} : \frac{x^2-(y+1)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x+y)(x-y-1)}{x-y} : \frac{(x-y-1)(x+y+1)}{(x-y)(x+y)} =$

$= \frac{(x+y)(x-y-1)\cdot(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-y-1)(x+y+1)} = \frac{(x+y)^2}{x+y+1}$.

Відповідь. $\frac{(x+y)^2}{x+y+1}$.

18. Враховуючи, що дріб існує, коли знаменник не дорівнює нулю, а арифметичний квадратний корінь існує, коли підкореневий вираз є невід'ємним, маємо систему обмежень: $\begin{cases} x+2 \ge 0, \\ x^2+2x+1 \ne 0, \\ -x^2+3x+4>0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \ge -2, \\ x \ne -1, \\ (x+1)(x-4)<0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -2, \\ x \ne -1, \\ -1<x<4. \end{cases}$ Знайдемо спільні розв'язки системи: $x \in (-1; 4)$. Отже, область визначення функції (−1; 4).

Відповідь. (−1; 4).

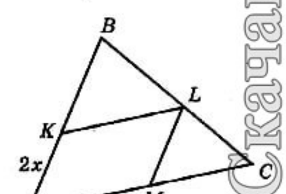
19.

Яблука	Кількість яблук	Продали, %	Продали, кг
1 сорт	x	60	$0,6x$
2 сорт	$1800-x$	70	$(1800-x)\cdot 0,7$

За умовою задачі маємо рівняння: $1800 - 0,6x - (1800-x)\cdot 0,7 = 640$.
Розв'яжемо його:
$1800 - 0,6x - 1260 + 0,7x = 640$; $0,1x = 100$; $x = 1000$ кг яблук першого сорту привезли в магазин; $1800 - 1000 = 800$ кг яблук другого сорту привезли в магазин.

Відповідь. 1000 кг; 800 кг.

20. Нехай $AKLM$ — паралелограм, вписаний у трикутник ABC, $AK : AM = 2 : 3$.
Нехай $AK = LM = 2x$; $AM = KL = 3x$. $\triangle ABC \sim \triangle KBL$ за двома кутами ($\angle B$ — спільний, $\angle A = \angle BKL$, як відповідні кути при паралельних прямих AC і KL та січній AB).
З подібності трикутників маємо:
$\frac{KB}{AB} = \frac{KL}{AC}$; $\frac{8-2x}{8} = \frac{3x}{12}$; $96 - 24x = 24x$; $48x = 96$; $x = 2$.
Отже, $AK = LM = 2 \cdot 2 = 4$ (см); $AM = KL = 3 \cdot 2 = 6$ (см).
$P_{AKLM} = 2(AK + AM) = 2 \cdot (4+6) = 2 \cdot 10 = 20$ (см).
Відповідь. 20 см.



Скачано з dpa-zno.net.ua

Варіант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	В	Г	В	Г	В	Б	Б	В	Г

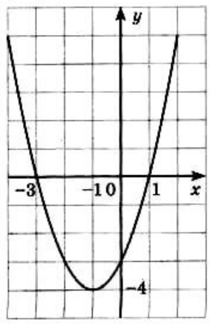
11. 7 км = 7000 м. Трембіту почули в селищі через $\frac{7000}{350}=20$ с.

Відповідь. 20 с.

12. Нерівність $|x|<5$ має цілі розв'язки $-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

Отже, нерівність має дев'ять цілих розв'язків.

Відповідь. 9.



13. Сума членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою: $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$. Тоді $S_{10}=\frac{6+9\cdot 2}{2}\cdot 10=\frac{24}{2}\cdot 10=120$.

Відповідь. 120.

14. Графіком функції $y=(x+1)^2-4$ є парабола, вершина якої знаходиться в точці $(-1;-4)$ і вітки якої напрямлені вгору.

15. Нехай a і b — сторони прямокутника, тоді $a=10\cdot\sin 60°=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ (см); $b=10\cdot\cos 60°=10\cdot\frac{1}{2}=5$ (см); $S=a\cdot b=5\sqrt{3}\cdot 5=25\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь. $25\sqrt{3}$ см².

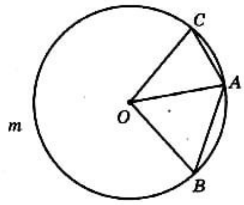
16. Кутова міра дуги CAB дорівнює:

$\overset{\frown}{CAB}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}=39°+72°=111°$;

$\overset{\frown}{CmB}=360°-\overset{\frown}{CAB}=360°-111°=249°$;

$\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CmB}=\frac{249°}{2}=124{,}5°$, оскільки $\angle BAC$ — вписаний кут і вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

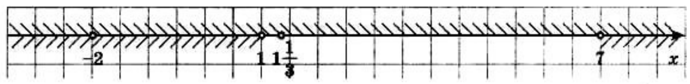
Відповідь. 124,5°.



17. $$\left(a+\frac{a-b}{a+b}-b\right):\left(\frac{2a+1}{a^2-b^2}+1\right)=\frac{a^2+ab+a-b-ab-b^2}{a+b}:\frac{2a+1+a^2-b^2}{(a-b)(a+b)}=$$
$$=\frac{a^2-b^2+a-b}{a+b}:\frac{2a+1+a^2-b^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)(a+b)+(a-b)}{a+b}:\frac{2a+1+a^2-b^2}{(a-b)(a+b)}=$$
$$=\frac{(a-b)(a+b+1)\cdot(a-b)(a+b)}{(a+b)(2a+1+a^2-b^2)}=\frac{(a-b)^2(a+b+1)}{(a+1)^2-b^2}=\frac{(a-b)^2(a+b+1)}{(a+1-b)(a+1+b)}=\frac{(a-b)^2}{a-b+1}.$$

Відповідь. $\frac{(a-b)^2}{a-b+1}$.

18. Враховуючи, що дріб існує, коли знаменник не дорівнює нулю, а арифметичний квадратний корінь існує, коли підкореневий вираз є невід'ємним, маємо систему обмежень: $\begin{cases}x+2\neq 0,\\ x^2-8x+7>0,\\ 16-24x+9x^2\geq 0.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x\neq -2,\\ (x-1)(x-7)>0,\\ \left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)\geq 0.\end{cases}$ Знайдемо спільні розв'язки системи: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(7;+\infty)$.



Отже, область визначення функції: $(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(7;+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(7;+\infty)$.

19.

Помідори	Кількість помідорів	Продали, %	Продали, кг
1 сорт	x	40	$0{,}4x$
2 сорт	$1200-x$	60	$(1200-x)\cdot 0{,}6$

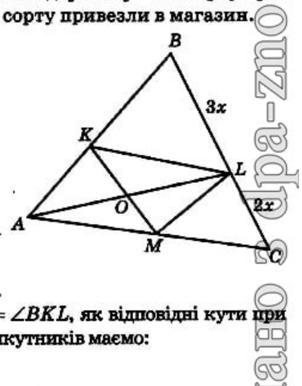
За умовою задачі маємо рівняння: $1200-0{,}4x-(1200-x)\cdot 0{,}6=640$.

Розв'яжемо його:

$1800-0{,}4x-720+0{,}6x=640$; $0{,}2x=160$; $x=800$ кг помідорів першого сорту привезли в магазин; $1200-800=400$ кг помідорів другого сорту привезли в магазин.

Відповідь. 800 кг; 400 кг.

20. Нехай $AKLM$ — ромб, вписаний у трикутник ABC, $BL:LC=3:2$.



За властивістю діагоналей ромба маємо:

$KO=OM=\frac{KM}{2}=\frac{12}{2}=6$ см, $AO=OL=\frac{AL}{2}=\frac{16}{2}=8$ см.

Оскільки діагоналі ромба перпендикулярні, то $\triangle AOM$ — прямокутний. Тоді за теоремою Піфагора маємо: $AM^2=AO^2+OM^2$;

$AM=\sqrt{AO^2+OM^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ (см). Оскільки всі сторони ромба рівні, то кожна з них дорівнює по 10 см.

$\triangle ABC\sim\triangle KBL$ за двома кутами ($\angle B$ — спільний, $\angle A=\angle BKL$, як відповідні кути при паралельних прямих AC і KL та січній AB). З подібності трикутників маємо:

$\frac{KL}{AC}=\frac{BL}{BC}$; $\frac{10}{AC}=\frac{3}{5}$; $3AC=50$; $AC=16\frac{2}{3}$ (см).

$\Delta BCA\sim\Delta LCM$ за двома кутами ($\angle C$ — спільний, $\angle A=\angle CML$, як відповідні кути при паралельних прямих AB і ML та січній AC). З подібності трикутників маємо:

$\frac{ML}{AB}=\frac{LC}{BC}$; $\frac{10}{AB}=\frac{2}{5}$; $2AB=50$; $AB=25$ (см).

Відповідь. $16\frac{2}{3}$ см; 25 см.

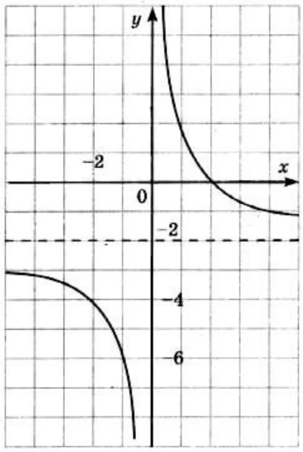
Варіант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	В	Г	Б	В	В	Г	Б	Г	В

11. *Відповідь.* 6-ма способами.

12. Напишемо рівняння у вигляді $x^2-5x-6=0$. Тоді за теоремою Вієта сума коренів рівняння дорівнює другому члену з протилежним знаком, тобто 5.

Відповідь. 5.



13. $\frac{1-x}{2}\le 1-\frac{2+x}{7}$; $\frac{1-x}{2}\le\frac{7-2-x}{7}$; $\frac{1-x}{2}\ge\frac{5-x}{7}$;

$\frac{7-7x-10+2x}{14}\le 0$; $\frac{-5x-3}{14}\le 0$; $5x+3\ge 0$;

$x\ge-\frac{3}{5}$ або $\left[-\frac{3}{5};+\infty\right)$. *Відповідь.* $\left[-\frac{3}{5};+\infty\right)$.

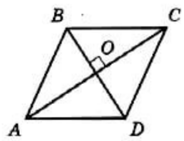
14. Графіком функції $y=\frac{4}{x}-2$ є гіпербола, яку отримаємо, змістивши графік функції $y=\frac{4}{x}$ на 2 одиниці вниз по осі Oy.

15. Нехай $OO_1=26$ см, $BO=x$ см, тоді $O_1A=3x$ см. Тоді маємо: $OO_1=O_1A+AB+BO$; $26=3x+6+x$; $26=4x+6$; $4x=20$; $x=5$. Отже, $BO=5$ см; $O_1A=3\cdot5=15$ см.

Відповідь. 5 см, 15 см.

16. Нехай $AC=16$ см, $BD=12$ см.

За властивістю діагоналей ромба маємо: $BO=OD=\frac{BD}{2}=\frac{12}{2}=6$ см, $AO=OC=\frac{AC}{2}=\frac{16}{2}=8$ см. Оскільки діагоналі ромба перпендикулярні, то $\triangle BOC$ — прямокутний, тоді за теоремою Піфагора маємо: $BC^2=BO^2+OC^2$; $BC=\sqrt{BO^2+OC^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ (см). Оскільки всі сторони ромба рівні, то кожна з них дорівнює 10 см.



Відповідь. 10 см.

17. $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}.\end{cases}$ Зробимо заміну $\frac{x}{y}=t$, тоді маємо рівняння: $t-\frac{1}{t}=\frac{5}{6}$;

$6t^2-5t-6=0$; $t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{169}}{12}=\frac{5\pm13}{12}$; $t_1=\frac{3}{2}$; $t_2=-\frac{2}{3}$.

Отже, отримуємо дві системи рівнянь: 1) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ \frac{x}{y}=\frac{3}{2}\end{cases}$ і 2) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ \frac{x}{y}=-\frac{2}{3}.\end{cases}$

Розв'яжемо кожну з них:

1) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ x=\frac{3y}{2};\end{cases}$ $\frac{9y^2}{4}+y^2=13$; $13y^2=13\cdot4$; $y^2=4$; $y=\pm2$, $x=\pm3$. Отже, маємо розв'язки: $(-3;-2)$ і $(3;2)$.

2) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ x=-\frac{2y}{3};\end{cases}$ $\frac{4y^2}{9}+y^2=13$; $4y^2+9y^2=13\cdot9$; $13y^2=13\cdot9$; $y^2=9$; $y=\pm3$, $x=\pm2$.

Перевіркою встановлюємо, що $(-2;-3)$ і $(2;3)$ не задовольняють систему.

Відповідь. $(-3;-2)$, $(3;2)$, $(-2;-3)$, $(2;3)$.

18. $\left(x+\frac{3-x^2}{1+x}\right)\cdot\frac{1-x^2}{x^2+6x+9}=\left(\frac{x+x^2+3-x^2}{1+x}\right)\cdot\frac{1-x^2}{(x+3)^2}=$

$=\left(\frac{x+3}{1+x}\right)\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{(x+3)^2}=\frac{1-x}{x+3}$.

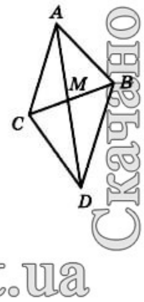
Відповідь. $\frac{1-x}{x+3}$.

19. У 4000 т коксу міститься $4000\cdot0{,}98=3920$ т вуглецю.

Нехай потрібно x т кам'яного вугілля, з якого отримали 3920 т коксу, тоді $\frac{3920}{x}=0{,}8$; $0{,}8x=3920$, $x=4900$ (т). Отже, із 4900 т кам'яного вугілля отримують 4000 т коксу.

Відповідь. 4900 т.

20. Подовжимо медіану AM трикутника ABC за точку M на відстань $MD=AM$, з'єднаємо точки C і D та B і D й отримаємо паралелограм $ABDC$.



За теоремою про властивість діагоналей паралелограма маємо: $AD^2+CB^2=2(AC^2+AB^2)$; $196+CB^2=2(108+16)$; $196+CB^2=248$; $CB^2=52$.

З $\triangle ABC$ за теоремою косинусів маємо:

$CB^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC$;

$52=108+16-2\cdot6\sqrt{3}\cdot4\cdot\cos\angle BAC$; $48\sqrt{3}\cos\angle BAC=72$;

$\cos\angle BAC=\frac{72}{48\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\angle BAC=30°$.

Відповідь. 30°.

Варіант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	В	Б	В	В	В	В	Б	В	В

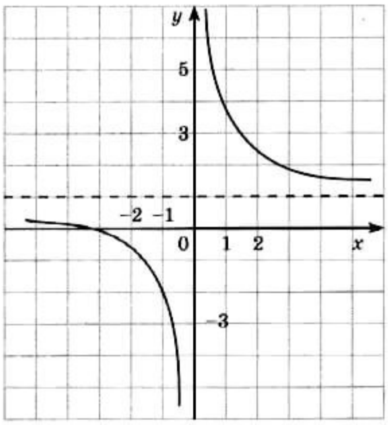
11. *Відповідь.* 5-ма способами.

12. Запишемо рівняння у вигляді $x^2 + 2x - 3 = 0$. Тоді за теоремою Вієта добуток коренів рівняння дорівнює вільному члену, тобто -3.

Відповідь. -3.

13. $\frac{1-x}{3} \le 1 - \frac{x+2}{5}$; $\frac{1-x}{3} \le \frac{5-x-2}{5}$; $\frac{1-x}{3} - \frac{3-x}{5} \le 0$; $\frac{5-5x-9+3x}{15} \le 0$; $\frac{-2x-4}{15} \le 0$; $\frac{2x+4}{15} \ge 0$; $2x \ge -4$; $x \ge -2$ або $[-2; +\infty)$.

Відповідь. $[-2; +\infty)$.



14. Графіком функції $y = \frac{4}{x} + 1$ є гіпербола, яку отримаємо, змістивши графік функції $y = \frac{4}{x}$ на одиницю вгору по осі Oy.

15. Нехай $OO_1 = 17$ см, $OP = x$ см, тоді $O_1M = x + 5$ см. Звідси маємо: $OO_1 = O_1M + MP + OP$; $17 = x + 5 + 2 + x$; $2x + 7 = 17$; $2x = 10$; $x = 5$. Отже, $OP = 5$ см; $O_1M = 5 + 5 = 10$ см.

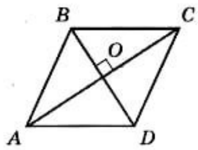
Відповідь. 5 см, 10 см.

16. Нехай $AC = 40$ см, $BD = 30$ см.

За властивістю діагоналей ромба маємо:

$BO = OD = \frac{BD}{2} = \frac{30}{2} = 15$ см,

$AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{40}{2} = 20$ см.



Оскільки діагоналі ромба перпендикулярні, то $\triangle BOC$ — прямокутний, тоді за теоремою Піфагора маємо:

$BC^2 = BO^2 + OC^2$; $BC = \sqrt{BO^2 + OC^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$ (см). Оскільки всі сторони ромба рівні, то довжина кожної з них — 25 см.

Відповідь. 25 см.

17. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{26}{5}. \end{cases}$ Зробимо заміну $\frac{x}{y} = t$, тоді маємо рівняння: $t + \frac{1}{t} = \frac{26}{5}$; $5t^2 - 26t + 5 = 0$; $t_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{10} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10}$; $t_1 = 5$; $t_2 = \frac{1}{5}$.

Отже, отримуємо дві системи рівнянь: 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ \frac{x}{y} = 5 \end{cases}$ і 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{5}. \end{cases}$

Розв'яжемо кожну з них:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x = 5y; \end{cases}$ $25y^2 - y^2 = 24$; $24y^2 = 24$; $y^2 = 1$; $y = \pm 1$, $x = \pm 5$. Отже, маємо розв'язки: $(-5; -1)$ і $(5; 1)$.

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ y = 5x; \end{cases}$ $x^2 - 25x^2 = 24$; $-24x^2 = 24$; $x^2 = -1$. Система розв'язків не має.

Відповідь. $(-5; -1)$ і $(5; 1)$.

18. $\left(y + \frac{6-y^2}{y-3}\right)\frac{y^2-6y+9}{2-y} = \left(\frac{y^2-3y+6-y^2}{y-3}\right)\frac{(y-3)^2}{2-y} = \left(\frac{6-3y}{y-3}\right)\frac{(y-3)^2}{2-y} = \frac{3(2-y)}{y-3} \cdot \frac{(y-3)^2}{2-y} = 3(y-3)$.

Відповідь. $3(y - 3)$.

19. У 3000 т чавуну міститься $3000 \cdot 0{,}98 = 2940$ т заліза. Нехай потрібно x т руди, з якої добули 2940 т заліза, тоді $\frac{2940}{x} = 0{,}6$, $0{,}6x = 2940$, $x = 4900$ (т). Отже, із 4900 т руди виплавляють 3000 т чавуну.

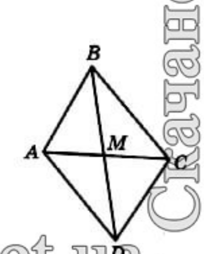
Відповідь. 4900 т.

20. Подовжимо медіану BM трикутника ABC за точку M на відстань $MD = BM$, з'єднаємо точки A і D та C і D й отримаємо паралелограм $ABCD$.

З $\triangle ABC$ за теоремою косинусів маємо:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$;

$AC^2 = 32 + 16 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 48 - 32 = 16$.



За теоремою про властивість діагоналей паралелограма маємо: $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + BC^2)$; $BD^2 + 16 = 2(32 + 16)$; $BD^2 = 96 - 16$; $BD^2 = 80$; $BD = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $BM = \frac{BD}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$.

Відповідь. $2\sqrt{5}$ (см).

Варіант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	Б	В	Г	Б	В	В	Б	Г	А

11. Підрахувати всі «і» і поділити на кількість символів.

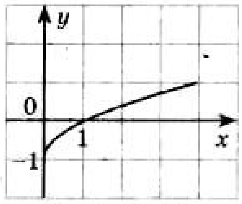
12. $y^3 - 2y^2 + y = y(y^2 - 2y + 1) = y(y - 1)(y - 1)$.

Відповідь. $y(y - 1)(y - 1)$.

13. $(4x - 1)(x - 3) - 5x(x - 2) = 6x - x^2$;

$4x^2 - 12x - x + 3 - 5x^2 + 10x = 6x - x^2$; $9x = 3$; $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

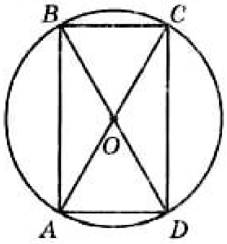


14. Графік функції $y = \sqrt{x} - 1$ отримаємо, змістивши графік функції $y = \sqrt{x}$ на одиницю вниз по осі Oy.

15. З $\triangle AEB$: $\angle EBA = 90° - 60° = 30°$. За властивістю трикутника з кутом 30° маємо: $AB = 2AE = 2 \cdot 8 = 16$ (см).

З $\triangle ABC$: $\angle ACB = 90° - 60° = 30°$. За властивістю трикутника з кутом 30° маємо: $AC = 2AB = 2 \cdot 16 = 32$ (см).

Відповідь. 32 см.



16. Нехай навколо прямокутника $ABCD$ описано круг з центром у точці O, $AB = 40$ см, $BC = 30$ см.

З $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50$ (см).

$R = AO = OC = AC : 2 = 50 : 2 = 25$ (см).

$S = \pi R^2 = \pi \cdot 625 = 625\pi$ (см²).

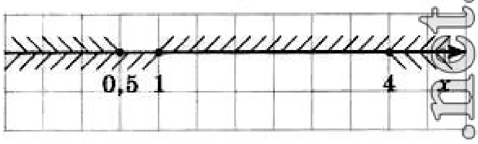
Відповідь. 625π см².

17. $$\frac{1}{(1+\sqrt{x})} + \frac{1}{(1-\sqrt{x})} - \frac{2x^2+4}{1-x^3} = \frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{1-x} - \frac{2x^2+4}{1-x^3} = \frac{2}{1-x} - \frac{2x^2+4}{1-x^3} =$$
$$= \frac{2+2x+2x^2-2x^2-4}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{2(x-1)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{2}{1+x+x^2}.$$

Відповідь. $-\frac{2}{1+x+x^2}$.

18. $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \ge 0, \\ (2-x)(3-x) \ge 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \ge 0, \\ x^2 - 5x + 4 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (2x-1)(x-1) \ge 0, \\ (x-4)(x-1) \ge 0. \end{cases}$

Знайдемо спільні розв'язки рівнянь системи:



Отже, маємо: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$.

Відповідь. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$.

19. Полтавські рушники становлять 30 % · 0,75 = 22,5 %, тоді рушники з Поділля становлять 100 % − 30 % − 22,5 % = 47,5 %, що дорівнює 38 рушників.

Нехай разом було x рушників. Складемо пропорцію:

47,5 % — 38,

100 % — x. Звідси маємо: $x = \frac{100\% \cdot 38}{47{,}5\%} = 80$ (рушників).

Отже, всього на виставці було представлено 80 рушників.

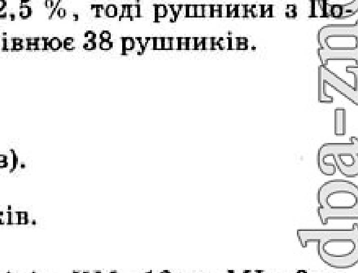
Відповідь. 80 рушників.

20. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, KL — середня лінія, $KM = 12$ см; $ML = 6$ см.

$BC = 2ML = 2 \cdot 6 = 12$ (см), оскільки ML — середня лінія $\triangle BCD$. $AD = 2KM = 2 \cdot 12 = 24$ (см), оскільки KM — середня лінія $\triangle ABD$.

$\angle CBD = \angle ABD$, оскільки BD — бісектриса кута CBA. $\angle CBD = \angle BDA$, як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній BD, тоді $\angle ABD = \angle ADB$. Отже, $\triangle ABD$ — рівнобедрений, $CD = AB = AD = 24$ см.

$AN = \frac{AD - BC}{2} = \frac{24 - 12}{2} = 6$ (см).



З $\triangle ABN$: $BN = \sqrt{AB^2 - AN^2} = \sqrt{576 - 36} = 6\sqrt{15}$ (см).

$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BN = \frac{12 + 24}{2} \cdot 6\sqrt{15} = 108\sqrt{15}$ (см²). *Відповідь.* $108\sqrt{15}$ см².

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Г	Г	В	Б	Б	Б	В	А	В	Г

11. Підрахувати всі «й» та поділити на кількість символів.

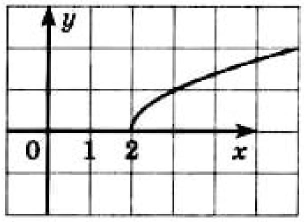
12. $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)(x+1)$.

Відповідь. $x(x+1)(x+1)$.

13. $(x-5)(2x+1)-2x(x-7)=1-x^2$; $2x^2+x-10x-5-2x^2+14x=1-x^2$; $x^2+5x-6=0$; $x_1=-6$; $x_2=1$.

Відповідь. -6; 1.

14. Графік функції $y=\sqrt{x-2}$ отримаємо, змістивши графік функції $y=\sqrt{x}$ на дві одиниці вправо по осі Ox.



15. З $\triangle CMA$: $\angle MCA=90°-60°=30°$. За властивістю трикутника з кутом $30°$ маємо: $CA=2AM=2\cdot 6=12$ (см).

З $\triangle BCA$: $\angle CBA=90°-60°=30°$. За властивістю трикутника з кутом $30°$ маємо: $AB=2CA=2\cdot 12=24$ (см).

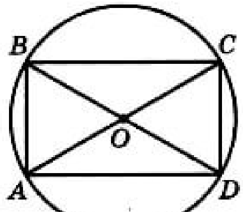
Відповідь. 24 см.

16. Нехай навколо прямокутника $ABCD$ описане коло з центром у точці O, $AB=60$ см, $BC=80$ см.

З $\triangle ABC$: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3600+6400}=\sqrt{10\,000}=100$ (см).

$R=AO=OC=AC:2=100:2=50$ (см). $C=2\pi R=2\pi\cdot 50=100\pi$ (см).

Відповідь. 100π см.

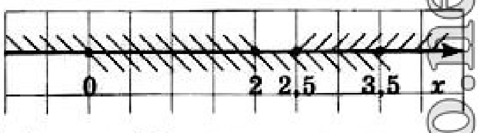


17. $$\frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2(1-a)}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=$$
$$=\frac{2}{2(1-a)}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=\frac{1}{1-a}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=\frac{1+a+a^2-a^2-2}{(1-a)(1+a+a^2)}=\frac{a-1}{(1-a)(1+a+a^2)}=-\frac{1}{1+a+a^2}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{1+a+a^2}$.

18. $\begin{cases}2x^2-9x+10\ge 0,\\(3-x)(1-2x)\le 3;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-9x+10\ge 0,\\2x^2-7x\le 0;\end{cases}$ $\begin{cases}(2x-5)(x-2)\ge 0,\\x(2x-7)\le 0.\end{cases}$

Знайдемо спільні розв'язки рівнянь системи:



Отже, маємо: $x\in[0;2]\cup[2{,}5;3{,}5]$.

Відповідь. $x\in[0;2]\cup[2{,}5;3{,}5]$.

19. Решта становить $100\ \%-45\ \%=55\ \%$. Тоді чоловічі сорочки становлять $55\ \%\cdot 0{,}6=33\ \%$, а дитячі $55\ \%-33\ \%=22\ \%$, що становить 44 вишиванки.

Нехай у магазин завезли x вишиванок. Складемо пропорцію:

$22\ \%$ — 44,

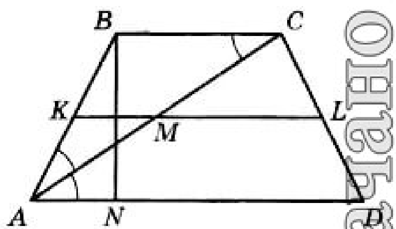
$100\ \%$ — x. Звідси маємо: $x=\frac{100\ \%\cdot 44}{22\ \%}=200$ (вишиванок).

Відповідь. 200 вишиванок.

20. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, KL — середня лінія, $KM=4$ см; $ML=8$ см.

$BC=2KM=2\cdot 4=8$ (см), оскільки KM — середня лінія $\triangle BAC$. $AD=2ML=2\cdot 8=16$ (см), оскільки ML — середня лінія $\triangle CAD$.

$\angle BAC=\angle DAC$, оскільки AC — бісектриса кута BAD. $\angle BCA=\angle DAC$, як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній AC, тоді $\angle BAC=\angle BCA$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений, $AB=BC=8$ см.



$AN=\frac{AD-BC}{2}=\frac{16-8}{2}=4$ (см).

З $\triangle ABN$: $BN=\sqrt{AB^2-AN^2}=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$ (см).

$S=\frac{BC+AD}{2}\cdot BN=\frac{8+16}{2}\cdot 4\sqrt{3}=48\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь. $48\sqrt{3}$ см^2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	Г	В	А	Г	В	А	Б	Б	В

11. Областю значень функції $y(x) = -x^4 + 2$ є $(-\infty; 2]$.

Відповідь. $(-\infty; 2]$.

12. 1 кг = 1000 г. Нехай 1 кг печива коштує x грн. Складемо пропорцію:

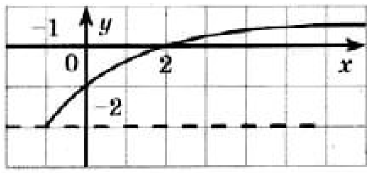
160 г — 8,64 грн,

1000 г — x грн. Звідси $x = \dfrac{1000 \cdot 8{,}64}{160} = 54$. Отже, 1 кг печива коштує 54 грн.

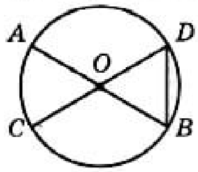
Відповідь. 28 грн.

13. $4x^2 - 12x - x + 3 - 5x^2 + 10x + 7 - 1 + x^2 < 0$; $-3x + 9 < 0$; $3x > 9$; $x > 3$, або $x \in (3; +\infty)$.

Відповідь. $(3; +\infty)$.

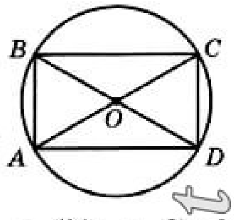


14. Графік функції $y = \sqrt{x+1} - 2$ отримаємо з графіка функції $y = \sqrt{x}$, змістивши його на одиницю вліво по осі Ox і на дві одиниці вниз по осі Oy.



15. $\angle COB = \angle AOD = 100°$. $\angle COB$ — центральний кут, $\angle CDB$ — вписаний кут, який спирається на дугу CB. $\angle CDB = \dfrac{1}{2}\angle COB = \dfrac{1}{2} \cdot 100° = 50°$.

Відповідь. 50°.



16. Нехай $AB = 7x$, $BC = 24x$.

З $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{49x^2 + 576x^2} = \sqrt{625x^2} = 25x$.

$R = AO = OC = AC : 2 = 25x : 2 = 12{,}5x$. $C = 2\pi R$; $25\pi = 2\pi \cdot 12{,}5x$; $25\pi = 25\pi x$; $x = 1$. Отже, $AB = 7$, $BC = 24$, $P = 2(AB + BC) = 2 \cdot 31 = 62$.

Відповідь. 62.

17. Нехай $x^2 + 3x = y$, тоді маємо: $y^2 - 2y - 8 = (y - 4)(y + 2) = (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) = (x + 4)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

Відповідь. $(x + 4)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

18. $\left(\dfrac{3}{2a} - \dfrac{2a}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2a-3} + \dfrac{1}{2a+3}\right) = 1 - 5a$; $\dfrac{9-4a^2}{6a} \cdot \dfrac{4a}{4a^2-9} = 1 - 5a$; $\dfrac{-2}{3} = 1 - 5a$;

$-2 = 3 - 15a$; $5 = 15a$; $a = \dfrac{1}{3}$.

Відповідь. $\dfrac{1}{3}$.

19. Нехай x — час, за який токар мав виготовити 264 деталі.

$\dfrac{264}{x}$ — деталі, які мав виготовляти токар за день. Тоді маємо рівняння:

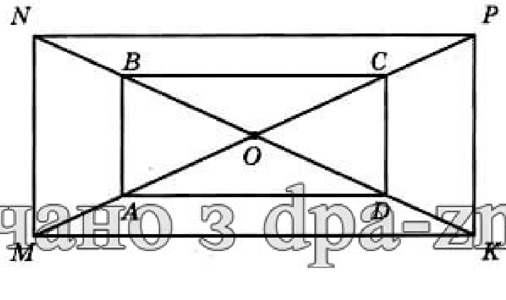
$3 \cdot \dfrac{264}{x} + (x-3)\left(\dfrac{264}{x} + 7\right) = 320$; $\dfrac{792}{x} + (x-3)\left(\dfrac{264}{x} + 7\right) = 320$; $\dfrac{792}{x} + 264 + 7x - \dfrac{792}{x} - 21 = 320$;

$7x = 77$; $x = 11$. Отже, $\dfrac{264}{11} = 24$ — деталі мав виготовляти токар за день.

$24 + 7 = 31$ — стільки деталей виготовляв токар за день на новому верстаті.

Відповідь. 31 деталь.

20. $ABCD$ — прямокутник, тоді діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і точкою перетину діляться пополам і $AC = BD$. Оскільки $AM = BN = CP = DK$, то $MP = NK$ і діагоналі MP і NK перетинаються в точці O і точкою перетину діляться пополам. Отже, за ознакою прямокутника $MNPK$ — прямокутник.



Варіант 2

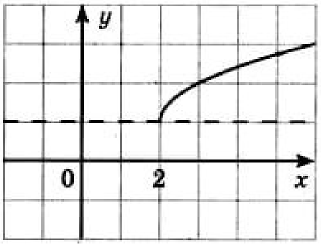
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	В	Г	А	Б	В	В	В	Б	Г

11. Областю значень функції $y(x) = x^4 + 1$ є $[1; +\infty)$. *Відповідь.* $[1; +\infty)$.

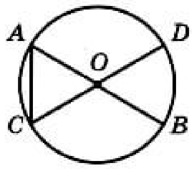
12. 1 кг = 1000 г. Нехай 1 кг вафель коштує x грн. Складемо пропорцію:
170 г — 11,73 грн,
1000 г — x грн. Звідси $x = \dfrac{1000 \cdot 11{,}73}{170} = 69$. Отже, 1 кг вафель коштує 69 грн.
Відповідь. 45 грн.

13. $2x^2 + x - 10x - 5 - 2x^2 + 14x - 1 + x < 0$; $6x - 6 < 0$; $6x < 6$; $x < 1$, або $x \in (-\infty; 1)$.
Відповідь. $(-\infty; 1)$.

14. Графік функції $y = \sqrt{x-2} + 1$ отримаємо з графіка функції $y = \sqrt{x}$, змістивши його на дві одиниці вправо по осі Ox і на одну одиницю вгору по осі Oy.

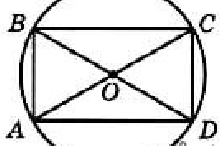


15. $\angle AOD = \angle COB = 120°$. $\angle AOD$ — центральний кут, $\angle ACD$ — вписаний кут, який спирається на дугу AD.
$\angle ACD = \dfrac{1}{2}\angle AOD = \dfrac{1}{2} \cdot 120° = 60°$.



Відповідь. 60°.

16. Нехай $AB = 5x$, $BC = 12x$.
З $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25x^2 + 144x^2} = \sqrt{169x^2} = 13x$.
$R = AO = OC = AC : 2 = 13x : 2 = 6{,}5x$. $S = \pi R^2$; $676\pi = \pi \cdot 42{,}25x^2$; $676\pi = 42{,}25\pi x^2$; $x^2 = 16$; $x = 4$. Отже, $AB = 20$, $BC = 48$, $S = AB \cdot BC = 20 \cdot 48 = 960$.
Відповідь. 960.



17. Нехай $x^2 + 2x = y$, тоді маємо: $y^2 - 2y - 3 = (y - 3)(y + 1) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1) = (x + 3)(x - 1)(x + 1)^2$.
Відповідь. $(x + 3)(x - 1)(x + 1)^2$.

18. $\left(\dfrac{5}{a} - \dfrac{a}{5}\right)\left(\dfrac{1}{a-5} + \dfrac{1}{a+5}\right) = 2a - 3$; $\dfrac{25 - a^2}{5a} \cdot \dfrac{2a}{a^2 - 25} = 2a - 3$; $\dfrac{-2}{5} = 2a - 3$; $-2 = 10a - 15$; $13 = 10a$; $a = 1{,}3$.
Відповідь. 1,3.

19.

Автомат	Кількість деталей	Загальна кількість виготовлених деталей	Час виготовлення однієї деталі, хв
Звичайний режим	x	720	$\dfrac{720}{x}$
Прискорений режим	$x + 1$	720	$\dfrac{720}{x+1}$

За умовою задачі маємо рівняння: $\dfrac{720}{x} - \dfrac{720}{x+1} = 60$.

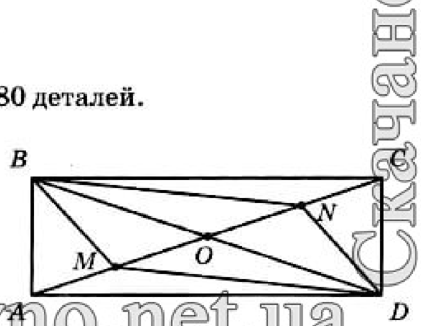
Розв'яжемо його:

$$\frac{720x + 720 - 720x - 60x^2 - 60x}{x(x+1)} = 0;\quad \frac{-60x^2 - 60x + 720}{x(x+1)} = 0;\quad \frac{x^2 + x - 12}{x(x+1)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3,\ x_2 = -4 \\ x \neq 0, \\ x \neq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

Корінь $x = -4$ умову задачі не задовольняє.
Отже, автомат виготовляє за одну годину $3 \cdot 60 = 180$ деталей.
Відповідь. 180 деталей.

20. $ABCD$ — прямокутник, тоді діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і точкою перетину діляться пополам і $AC = BD$. Оскільки $AM = CN$, то $MO = ON$ і діагоналі BD і MN перетинаються в точці O і точкою перетину діляться пополам. Отже, за ознакою паралелограма $MBND$ — паралелограм.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	Г	В	В	В	В	В	Г	А	Б

11. Парк створювали $1802 - 1796 = 6$ (років).
Відповідь. 6 років.

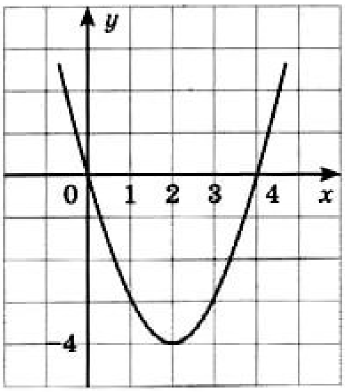
12. Враховуючи, що дріб існує, коли знаменник не дорівнює нулю, маємо: $x^2 - 4 \ne 0$; $x \ne \pm 2$. Отже, областю визначення функції $y = \frac{5x}{x^2 - 4}$ є всі числа, окрім $x = \pm 2$.

Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

13. $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 3x + y = 13; \end{cases} \Big| \, 3 \quad \begin{cases} x - 3y = 1, \\ 9x + 3y = 39. \end{cases}$ Додамо перше і друге рівняння системи:

$$\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 10x = 40; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ x = 4. \end{cases}$$

Відповідь. (4; 1).



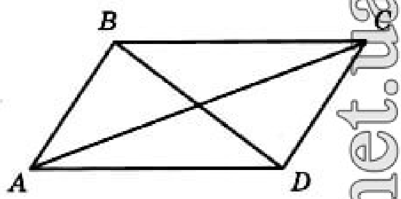
14. Графіком функції $y = x^2 - 4x$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо координати вершини параболи: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$; $y = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$. Отже, точка $(2; -4)$ — вершина параболи. Знайдемо нулі функції: $x^2 - 4x = 0$; $x(x - 4) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

15. Нехай $\angle ABC = \angle DCM = x°$; $\angle BCD = 180° - x°$, як суміжний кут до $\angle DCM$.
Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360°, то маємо:

$$\angle ADC = 360° - (\angle BAD + \angle ABC + \angle BCD) =$$
$$= 360° - (121° + x° + 180° - x°) = 360° - 301° = 59°.$$

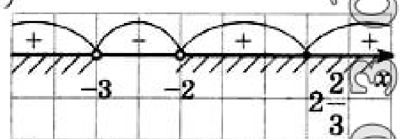
Відповідь. 59°.

16. Нехай $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $BD = 12$ см.
За властивістю діагоналей паралелограма маємо: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$; $AC^2 + 144 = 2(49 + 121)$; $AC^2 = 340 - 144$; $AC^2 = 196$; $AC = 14$ (см).
Відповідь. 14 см.



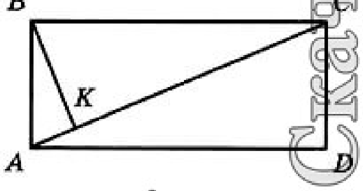
17. $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right) = \left(\frac{3 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}}\right) : \left(\frac{3 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x}} =$ $= \sqrt{1-x}$. *Відповідь.* $\sqrt{1-x}$.

18. $\frac{8 - 3x}{3x^2 - 2x - 16} \le 1$. Розкладемо квадратний тричлен $3x^2 - 2x - 16$ на множники: $3x^2 - 2x - 16 = (3x - 8)(x + 2)$. Отже, маємо: $\frac{8 - 3x}{(3x - 8)(x + 2)} \le 1$; $-\frac{1}{x+2} \le 1$, $x \ne 2\frac{2}{3}$; $\frac{1}{x+2} \ge -1$, $x \ne 2\frac{2}{3}$; $\frac{3 + x}{x + 2} \ge 0$, $x \ne 2\frac{2}{3}$. $x \in (-\infty; -3] \cup \left(-2; 2\frac{2}{3}\right) \cup \left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$.



Відповідь. $(-\infty; -3] \cup \left(-2; \frac{2}{3}\right) \cup \left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

19. Нехай S — загальна площа полів обох фермерів. S_1 — площа поля першого фермера, тоді $S - S_1$ — площа поля другого фермера.
Маємо рівняння: $S_1 \cdot 0{,}65 + (S - S_1) \cdot 0{,}45 - 0{,}53S$; $0{,}65S_1 + (0{,}45S - 0{,}45S_1) = 0{,}53S$; $0{,}2S_1 = 0{,}08S$; $S_1 = 0{,}4S$. Отже, поле першого фермера становить 40 % всієї засіяної площі. *Відповідь.* 40 %.



20. Нехай $ABCD$ — прямокутник.
$BK \perp AC$; $AK = 9$ см; $KC = 16$ см. За теоремою про пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику маємо: $BK^2 = AK \cdot KC$; $BK = \sqrt{AK \cdot KC} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12$ (см).
$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BK = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 300$ (см²). *Відповідь.* 300 см².

Варіант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*
В	А	Г	В	Б	Г	А	Б	В	Г

11. Андрію було $2004 - 1976 = 28$ (років).

Відповідь. 28 років.

12. Враховуючи, що дріб існує, коли знаменник не дорівнює нулю, маємо: $x^2 - 9 \neq 0$; $x \neq \pm 3$. Отже, областю визначення функції $y = \dfrac{5+x}{x^2-9}$ є всі числа, окрім $x = \pm 3$.

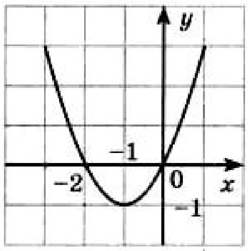
Відповідь. $(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

13. $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x + 2y = 5; \end{cases} \Big| -2 \quad \begin{cases} 2x + y = 4, \\ -2x - 4y = -10. \end{cases}$

Додамо перше і друге рівняння системи:

$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ -3y = -6; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

Відповідь. (1; 2).

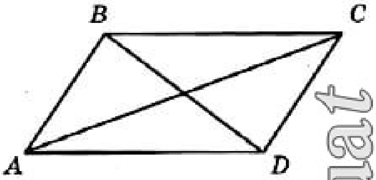


14. Графіком функції $y = x^2 + 2x$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Знайдемо координати вершини параболи: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2} = -1$; $y = 1^2 + 2 \cdot (-1) = -1$. Отже, точка $(-1; -1)$ — вершина параболи. Знайдемо нулі функції: $x^2 + 2x = 0$; $x(x + 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

15. Нехай $\angle ACD = \angle C = x^\circ$, як вертикальні кути, $\angle BAC = 180^\circ - x^\circ$, як суміжний кут до $\angle A$.

Оскільки сума кутів чотирикутника дорівнює 360°, то маємо: $\angle BDC = 360^\circ - (\angle ABD + \angle BAC + \angle ACD) = 360^\circ - (91^\circ + 180^\circ - x^\circ + x^\circ) = 360^\circ - 271^\circ = 89^\circ$.

Відповідь. 89°.



16. Нехай $AC = 13$ см, $BD = 11$ см, $AB = 12$ см.

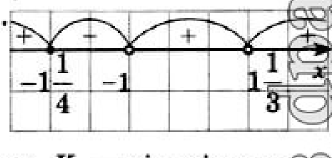
За властивістю діагоналей паралелограма маємо: $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$; $169 + 121 = 2AB^2 + 2BC^2$; $290 = 128 + 2BC^2$; $2BC^2 = 162$; $BC^2 = 81$; $BC = 9$ (см).

Відповідь. 9 см.

17. $\left(\dfrac{5}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(1 + \dfrac{5}{\sqrt{1-a^2}}\right) = \left(\dfrac{5 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{1-a^2} + 5}{\sqrt{1-a^2}}\right) =$

$= \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} = \sqrt{\dfrac{1-a^2}{1+a}} = \sqrt{1-a}$. *Відповідь*. $\sqrt{1-a}$.

18. $\dfrac{4-3x}{3x^2-x-4} \leq 4$. Розкладемо квадратний тричлен $3x^2 - x - 4$ на множники: $3x^2 - x - 4 = (3x-4)(x+1)$. Отже, маємо: $\dfrac{4-3x}{(3x-4)(x+1)} \leq 4$; $-\dfrac{1}{x+1} \leq 4$, $x \neq 1\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{x+1} \geq -4$, $x \neq 1\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{4x+5}{x+1} \geq 0$, $x \neq 1\dfrac{1}{3}$; $x \in \left(-\infty; -1\dfrac{1}{4}\right] \cup \left(-1; 1\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(1\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

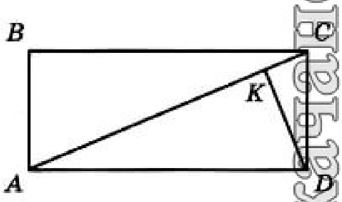


Відповідь. $\left(-\infty; -1\dfrac{1}{4}\right] \cup \left(-1; 1\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(1\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

19. Нехай K — загальна кількість квартир у двох будинках. K_1 — кількість квартир у першому будинку, тоді $K - K_1$ — кількість квартир у другому будинку.

Маємо рівняння: $0{,}2K_1 + 0{,}15(K - K_1) = 0{,}18K$; $0{,}05K_1 = 0{,}03K$; $K_1 = 0{,}6K$. Отже, квартири першого будинку складають 60 % квартир обох будинків.

Відповідь. 60 %.



20. Нехай $ABCD$ — прямокутник.

$DK \perp AC$; $AK = 25$ см; $KC = 16$ см. За теоремою про пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику маємо:

$DK^2 = AK \cdot KC$; $DK = \sqrt{AK \cdot KC} = \sqrt{25 \cdot 16} = 5 \cdot 4 = 20$ (см).

$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ACD} = 2 \cdot \dfrac{1}{2} AC \cdot DK = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 41 \cdot 20 = 820$ (см²).

Відповідь. 820 см².

Варіант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	В	Г	Б	Г	Б	В	Г	Г	В

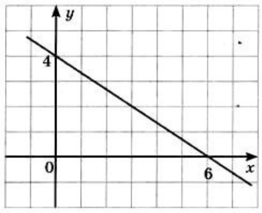
11. $5x^2-20=0$; $5x^2=20$; $x^2=4$; $x=\pm2$. *Відповідь.* ±2.

12. $\sqrt{49x^4y^7}=\sqrt{7^2(x^2)^2y(y^3)^2}=7x^2y^3\sqrt{y}$. *Відповідь.* $7x^2y^3\sqrt{y}$.

13. $\frac{981}{2201}\cdot100\,\%\approx44{,}57\,\%\approx44{,}6\,\%$. *Відповідь.* $\approx44{,}6\,\%$.

14. Графіком функції $y=-\frac{2}{3}x+4$ є пряма. Побудуємо графік, склавши таблицю.

x	0	6
y	4	0



15. Нехай $a\parallel b\parallel c$, тоді кути 2 і 3 є внутрішніми односторонніми. Оскільки за умовою задачі $\angle2:\angle3=1:5$, а сума цих кутів дорівнює $180°$, то $\angle3=\frac{180°}{1+5}\cdot5=150°$.

Кути 1 і 3 є зовнішніми різносторонніми при паралельних прямих a і b, тобто вони рівні. Отже, $\angle1=\angle3=150°$.

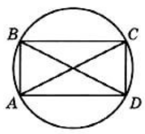
Відповідь. $150°$.

16. $ABCD$ — прямокутник, у якого $\angle BCA=18°$, тоді $\angle ACD=90°-18°=72°$. За властивістю вписаних кутів маємо:

$\breve{AB}=2\angle BCA=2\cdot18°=36°$, $\breve{AD}=2\angle ACD=2\cdot72°=144°$.

Оскільки $\breve{AB}=\breve{CD}$, $\breve{BC}=\breve{AD}$, то $\breve{CD}=36°$, $\breve{BC}=144°$.

Відповідь. $\breve{AB}=36°$, $\breve{AD}=144°$, $\breve{CD}=36°$, $\breve{BC}=144°$.



17. $\frac{m+2}{m+3}:\frac{5m+10}{9-m^2}-\frac{2m-1}{15}=\frac{m+2}{m+3}:\frac{5(m+2)}{(3-m)(3+m)}-\frac{2m-1}{15}=$

$=\frac{m+2}{m+3}\cdot\frac{(3-m)(3+m)}{5(m+2)}-\frac{2m-1}{15}=\frac{3-m}{5}-\frac{2m-1}{15}=$

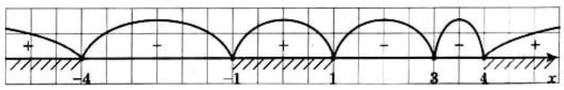
$=\frac{9-3m}{15}-\frac{2m-1}{15}=\frac{9-3m-2m+1}{15}=\frac{10-5m}{15}=\frac{5(2-m)}{15}=\frac{2-m}{3}$.

Відповідь. $\frac{2-m}{3}$.

18. $(x^2-6x+9)(x^2-1)(x^2-16)\ge0$; $(x-3)^2(x-1)(x+1)(x-4)(x+4)\ge0$. Скористаємося методом інтервалів розв'язування нерівностей:

Отже, $x\in(-\infty;-4]\cup[-1;1]\cup\{3\}\cup[4;+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;-4]\cup[-1;1]\cup\{3\}\cup[4;+\infty)$.



19. Систематизуємо дані задачі у вигляді таблиці.

Велосипедисти	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
Із міста A в місто B	x	80	$\frac{80}{x+y}+1\frac{1}{3}$
Із міста B у місто A	y	80	$\frac{80}{x+y}+3$

За умовою задачі маємо систему рівнянь: $\begin{cases}x\left(\frac{80}{x+y}+1\frac{1}{3}\right)=80,\\ y\left(\frac{80}{x+y}+3\right)=80.\end{cases}$

Розв'яжемо її:

$\begin{cases}x\left(\frac{80}{x+y}+1\frac{1}{3}\right)=80,\\ y\left(\frac{80}{x+y}+3\right)=80;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{80}{x+y}+\frac{4}{3}=\frac{80}{x},\\ \frac{80}{x+y}+3=\frac{80}{y};\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{80}{x+y}+\frac{4}{3}-\frac{80}{x+y}-3=\frac{80}{x}-\frac{80}{y},\\ \frac{80}{x+y}+3=\frac{80}{y};\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{80}{y}-\frac{80}{x}=\frac{5}{3},\\ \frac{80}{x+y}+3=\frac{80}{y};\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{16}{y}-\frac{16}{x}=\frac{1}{3},\\ 80y+3xy+3y^2=80x+80y;\end{cases}$ $\begin{cases}48x-48y=xy,\\ 3xy+3y^2=80x;\end{cases}$ $\begin{cases}-48y=-x(48-y),\\ 3y^2=x(-3y+80);\end{cases}$

$\begin{cases}48y=x(48-y),\\ \frac{3y^2}{-48y}=\frac{x(-3y+80)}{-x(48-y)};\end{cases}$ $\begin{cases}48y=x(48-y),\\ \frac{y}{16}=\frac{-3y+80}{48-y};\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{48y}{48-y},\\ 48y-y^2=-48y+1280;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{48y}{48-y},\\ y^2-96y+1280=0.\end{cases}$

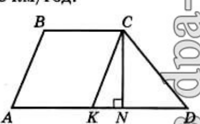
$y^2-96y+1280=0$; $y=48\pm\sqrt{48^2-1280}$; $y=48\pm\sqrt{1024}$; $y=48\pm32$; $y=80$ або $y=16$.

Корінь $y=80$ умову задачі не задовольняє. Отже, $y=16$, тоді $x=\frac{48\cdot16}{48-16}=\frac{48\cdot16}{32}=24$.

Отже, швидкості велосипедистів дорівнюють 24 км/год і 16 км/год.

Відповідь. 24 км/год і 16 км/год.

20. $ABCD$ — трапеція, $AB=13$ см, $BC=16$ см, $CD=15$ см, $AD=30$ см, CN — висота трапеції. Площа трапеції обчислюється за формулою: $S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot CN$. Проведемо $CK\parallel AB$. Отримаємо паралелограм $ABCK$, у якого $CK=AB=13$ см, $AK=BC=16$ см.



Розглянемо трикутник CKD: $CK=13$ см, $CD=16$ см, $KD=AD-AK=30-16=14$ (см), CN — висота трикутника.

Площа трикутника: $S=\frac{1}{2}KD\cdot CN$, тоді $CN=\frac{2S}{KD}$.

За формулою Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\frac{a+b+c}{2}$, тоді $p=\frac{13+15+14}{2}=\frac{42}{2}=21$ (см) і $S=\sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)}=\sqrt{21\cdot18\cdot6\cdot7}=14\cdot9=126$ (см²).

Тоді $CN=\frac{2\cdot126}{14}=18$ (см), $S_{ABCD}=\frac{16+30}{2}\cdot18=414$ (см²). *Відповідь.* 414 см².

Скачано з dpa-zno.net.ua

Варіант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	Г	Б	Г	Г	Г	Г	А	В	В

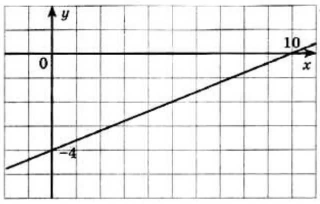
11. $3x^2-27=0$; $3x^2=27$; $x^2=9$; $x=\pm3$. *Відповідь.* ±3.

12. $\sqrt{64x^7y^4}=\sqrt{8^2\left(x^3\right)^2x\left(y^2\right)^2}=8x^3y^2\sqrt{x}$. *Відповідь.* $8x^3y^2\sqrt{x}$.

13. $\dfrac{806}{2201}\cdot100\,\%\approx36{,}61\,\%\approx36{,}6\,\%$. *Відповідь.* $36{,}6\,\%$.

14. Графіком функції $y=\dfrac{2}{5}x-4$ є пряма. Побудуємо графік, склавши таблицю.

x	0	10
y	-4	0

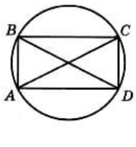


15. Нехай $a\parallel b\parallel c$, тоді кути 2 і 3 є внутрішніми односторонніми при паралельних прямих a і b. Оскільки за умовою задачі $\angle3:\angle2=5:4$, а сума цих кутів дорівнює $180°$, то $\angle3=\dfrac{180°}{4+5}\cdot5=100°$.

Кути 1 і 3 є відповідними кутами при паралельних прямих a і c, тобто вони рівні. Отже, $\angle1=\angle3=100°$.

Відповідь. 100°.

16. $ABCD$ — прямокутник, у якого $\angle ACD=48°$, тоді $\angle BCA=90°-48°=42°$. За властивістю вписаних кутів маємо:



$\overset{\frown}{AB}=2\angle BCA=2\cdot42°=84°$, $\overset{\frown}{AD}=2\angle ACD=2\cdot48°=96°$.

Оскільки $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$, то $\overset{\frown}{CD}=84°$, $\overset{\frown}{BC}=96°$.

Відповідь. $\overset{\frown}{AB}=84°$, $\overset{\frown}{AD}=96°$, $\overset{\frown}{CD}=84°$, $\overset{\frown}{BC}=96°$.

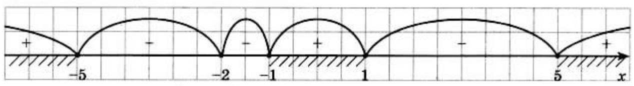
17. $\dfrac{x^2-25}{4x+4}\cdot\dfrac{x+1}{x-5}-\dfrac{x-7}{6}=\dfrac{(x-5)(x+5)}{4(x+1)}\cdot\dfrac{x+1}{x-5}-\dfrac{x-7}{6}=$
$=\dfrac{x+5}{4}-\dfrac{x-7}{6}=\dfrac{3x+15-2x+14}{12}=\dfrac{x+29}{12}$.

Відповідь. $\dfrac{x+29}{12}$.

18. $(x^2-1)(x^2-25)(x^2+4x+4)\ge0$; $(x-1)(x+1)(x-5)(x+5)(x+2)^2\ge0$. Скористаємося методом інтервалів розв'язування нерівностей:

Отже, $x\in(-\infty;-5]\cup\{-2\}\cup[-1;1]\cup[5;+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;-5]\cup\{-2\}\cup[-1;1]\cup[5;+\infty)$.



19. Систематизуємо дані задачі у вигляді таблиці.

Мопеди	Швидкість, км/год	Шлях, км	Час, год
Із міста A в місто B	x	90	$\dfrac{90}{x+y}+1\dfrac{1}{4}$
Із міста B у місто A	y	90	$\dfrac{90}{x+y}+\dfrac{4}{5}$

За умовою задачі маємо систему рівнянь: $\begin{cases}x\left(\dfrac{90}{x+y}+1\dfrac{1}{4}\right)=90,\\ y\left(\dfrac{90}{x+y}+\dfrac{4}{5}\right)=90.\end{cases}$

Розв'яжемо її:

$\begin{cases}x\left(\dfrac{90}{x+y}+1\dfrac{1}{4}\right)=90,\\ y\left(\dfrac{90}{x+y}+\dfrac{4}{5}\right)=90;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{90}{x+y}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{90}{x},\\ \dfrac{90}{x+y}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{90}{y};\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{90}{x+y}+1\dfrac{1}{4}-\dfrac{90}{x+y}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{90}{x}-\dfrac{90}{y},\\ \dfrac{90}{x+y}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{90}{y};\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{90}{x}-\dfrac{90}{y}=\dfrac{9}{20},\\ \dfrac{45}{x+y}+\dfrac{2}{5}=\dfrac{45}{y};\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{10}{x}-\dfrac{10}{y}=\dfrac{1}{20},\\ 225y+2xy+2y^2=225x+225y;\end{cases}$ $\begin{cases}200y-200x=xy,\\ 2xy+2y^2=225x;\end{cases}$

$\begin{cases}200y=x(200+y),\\ 2y^2=x(225-2y);\end{cases}$ $\begin{cases}200y=x(200+y),\\ \dfrac{2y^2}{200y}=\dfrac{x(225-2y)}{x(200+y)};\end{cases}$ $\begin{cases}200y=x(200+y),\\ \dfrac{y}{100}=\dfrac{225-2y}{200+y};\end{cases}$

$\begin{cases}x=\dfrac{200y}{200+y},\\ 200y+y^2=-200y+22\,500;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\dfrac{200y}{200+y},\\ y^2+400y-22\,500=0.\end{cases}$ $y^2+400y-22\,500=0;$

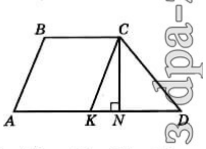
$y=-200\pm\sqrt{200^2+22\,500}$; $y=-200\pm\sqrt{40\,000+22\,500}$; $y=-200\pm\sqrt{62\,500}$;
$y=-200\pm250$; $y=-450$ або $y=50$.

Корінь $y=-450$ умову задачі не задовольняє. Отже, $y=50$, тоді $x=\dfrac{200\cdot50}{200+50}=\dfrac{200\cdot50}{250}=40$.

Отже, швидкості мопедів дорівнюють 40 км/год і 50 км/год.

Відповідь. 40 км/год і 50 км/год.

20. $ABCD$ — трапеція, $AB=13$ см, $BC=15$ см, $CD=20$ см, $AD=36$ см, CN — висота трапеції. Площа трапеції обчислюється за формулою: $S_{ABCD}=\dfrac{BC+AD}{2}\cdot CN$. Проведемо $CK\parallel AB$. Отримаємо паралелограм $ABCK$, у якого $CK=AB=13$ см, $AK=BC=15$ см.



Розглянемо трикутник CKD: $CK=13$ см, $CD=15$ см, $KD=AD-AK=36-15=21$ (см), CN — висота трикутника.

Площа трикутника: $S=\dfrac{1}{2}KD\cdot CN$, тоді $CN=\dfrac{2S}{KD}$.

За формулою Герона:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, тоді $p=\dfrac{13+20+21}{2}=\dfrac{54}{2}=27$ (см).

$S=\sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)}=\sqrt{27\cdot14\cdot7\cdot6}=14\cdot9=126$ (см²).

Тоді $CN=\dfrac{2\cdot126}{21}=12$ (см). $S_{ABCD}=\dfrac{15+36}{2}\cdot12=306$ (см²).

Відповідь. 306 см².

Скачано з dpa-zno.net.ua