ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ

II етап

9 листопада 2019 р.

Розв'язки. 6-11 класи

6 клас

1. Сума 2019 натуральних чисел рівна 2020. Якою стане сума, якщо самий більший доданок збільшити в десять разів? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 2038.

Так як кожний доданок числа не менше одиниці, то така сума може бути отримана в результаті додавання 2018 одиниць і однієї двійки. Якщо двійку збільшити в десять разів, то вийде 20. Якщо в початковій сумі 2 замінити на 20, то сума збільшиться на 18 і буде рівна 2020+18=2038.

2. Робінзон Крузо кожного другого дня поповнює запаси води з джерела, кожний третій день збирає фрукти і кожний п'ятий день ходить на полювання. Сьогодні 13 вересня. У Робінзона важкий день: він повинен зробити всі три справи. Коли у Робінзона буде наступний важкий день?

Відповідь: 13 жовтня.

Порахуємо скільки днів пройшло з початку «важкого». Якщо це число ділиться на 2, то Робінзон повинен поповнити запаси води. Якщо ділиться на 3, то поповнити запаси фруктів, а якщо ділиться на 5, то піти на полювання. Якщо він робить ці три справи в один день, то, кількість днів що минули, ділиться на 2, 3 та 5. Вперше це відбудеться через НСК(2;3;5)=30 днів. Так як у вересні 30 днів, то наступний важкий день буде 13 жовтня.

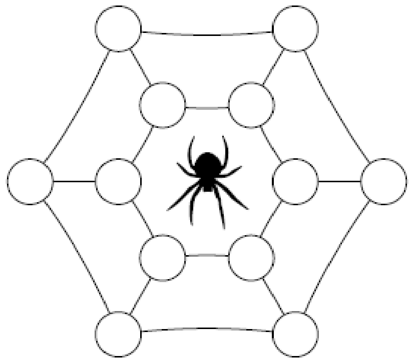
3. Кульбабка зранку розпускається. Два дні цвіте жовтим, на третій день зранку стає білою, а ввечері облітає. Вчора вдень на галявині було 20 жовтих і 14 білих кульбабок, а сьогодні 15 жовтих і 11 білих.
   а) Скільки жовтих кульбабок було на галявині позавчора?
   б) Скільки білих кульбабок буде на галявині завтра?

Відповідь: а) 25 жовтих кульбабок; б) 9 білих кульбабок.

а) Всі кульбабки, які позавчора були жовтими, стали білими вчора або сьогодні. Тому їх було 14+11=25.

б) З вчорашніх жовтих кульбабок 11 побіліли сьогодні, а решта 20-11=9 побіліють завтра.

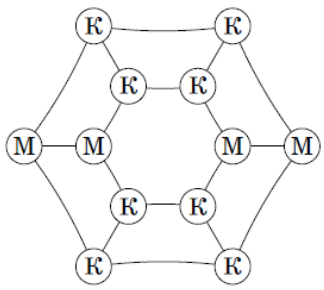
4. Павук сплів павутиння, і в кожний з його 12 вузликів потрапили по одній мушці або одному комару. При цьому, кожна комаха виявилась сполученою відрізком павутиння рівно з двома комарами.

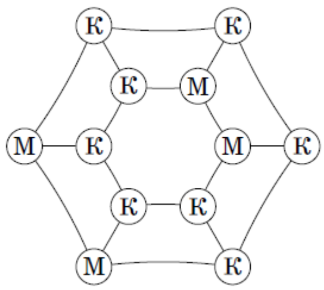


а) Намалюйте приклад, як це могло б бути (записавши всередині вузликів літери М і К).

б) Скільки мушок і скільки комарів попалися в павутиння? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 8 комарів і 4 мушки.





Перебором можна переконатися, що можливі лише наведені приклади (з точністю до поворотів павутиння).

Не спираючись на рисунок, можна показати, що комарів буде завжди 8. Маємо 12 комах, у кожної з якої є по два сусіди комара, тобто комарів – 24. Але кожного комара ми порахували тричі, так як він для трьох комах є сусідом. Отже, комарів 24:3=8. А мушок тоді 4.

5. Василь та Петро живуть у горах і полюбляють ходити один до одного у гості. При цьому у гору вони піднімаються із швидкістю 3 км/год, а з гори спускаються із швидкістю 6 км/год (горизонтальних ділянок дороги немає). Василь порахував, що до Петра він йде 2 години 30 хвилин, а назад 3 години 30 хвилин. Яка відстань між будинками Василя і Петра?

Відповідь: 12 км.

Дорога від Петра до Василя і назад займає 6 годин, при цьому, так як вгору він йде вдвічі повільніше чим згори, на всі підйоми витрачається часу вдвічі більше ніж на спуски. Таким чином, якщо йти до Петра і назад, то на всі спуски буде витрачено 2 години, а на підйоми 4 години. Отже довжина маршруту $(6\cdot 2+4\cdot 3)=24$*. Тому відстань між будинками 12 км.*

7 клас

1. Ньют хоче перевезти дев'ять фантастичних звірів вагою 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 і 10 кг в трьох валізах по три звіра у кожній. Кожна валіза повинна важити менше 20 кг. Якщо вага якогось звіра буде ділитися на вагу іншого звіра з тієї ж валізи, то вони поб'ються. Як Ньюту розподілити звірів по валізах, щоб ніхто не побився?

Відповідь: в першу валізу посадити звірів вагою 10, 4 і 3 кг; в другу – 9, 7, 2 кг; в третю – 8, 6, 5 кг.

Звірів вагою 10, 9 і 8 кг необхідно розмістити в різні валізи (інакше одна валіза буде заважкою). Потім, щоб ніхто не побився, звіра вагою 2 кг необхідно помістити у другу з цих валіз, а тоді звіра вагою 4 кг – у першу. Після цього неважко розподілити тих, хто залишився.

2. Знайти останні дві цифри числа $21^{2019} - 11^{2020}$.

Відповідь: 80.

Якщо підносити 21 до степеня, то 21, 41, 61, 81, 01, 21, … – можливі останні дві цифри. Аналогічно, якщо підности 11 до степеня, то 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 01, 11,… – можливі останні дві цифри. Отже, число 21^{2019} *буде закінчуватись на 81, а число* 11^{2020} *на 01. Тому число* $21^{2019} - 11^{2019}$ *буде закінчуватись на 80.*

3. Чотири сьомих класи поїхали на екскурсію. Коли 7А і 7Б пішли в музей, а 7В і 7Г – обідати в кафе, Марія Петрівна порахувала, що у музеї на 15 семикласників більше, ніж у кафе. А коли вечором 7А і 7В пішли у парк, а 7Б і 7Г – у театр, Марія Петрівна нарахувала у парку на 8 семикласників менше, ніж у театрі. Чи вміє Марія Петрівна рахувати?

Відповідь: не вміє.

Нехай в кафе пішли k школярів, тоді у музеї було k+15 школярів. Отже, всього семикласників k+ (k+15)=2 k+15.

Якщо у парк пішли p семикласників, то в театрі було p+8 семикласників, а всього їх було

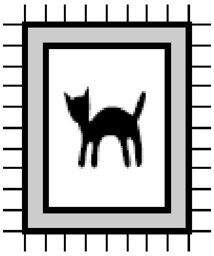
p+(p+8)=2 p+8.

В перший раз кількість семикласників виявилася непарною, а другого разу парною. Отримане протиріччя показує, що Марія Петрівна помилилась.

4. Знайти всі двоцифрові числа, які збільшуються у 8,5 разів, якщо між їх цифрами вписати 0.

Відповідь: 12, 24, 36, 48.
За умовою задачі $\overline{a0b} = 8{,}5\overline{ab}$. *Тому* $(100a + b) = 8{,}5(10a + b)$, *після спрощення отримаємо :* $2a = b$. *Враховуючи, що* $0 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, *отримаємо, що* $1 \leq a \leq 4$. *Отже, шукані числа :12, 24, 36, 48.*

5. Назар накреслив на листку в клітинку прямокутник (по клітинкам) і намалював в ньому картинку. Після цього він намалював навколо картинки рамку шириною в одну клітинку (див. рис.). Виявилось, що площа картинки рівна площі рамки. Які розміри могла мати Назарова картинка? (Перелічіть всі можливі варіанти, та доведіть, що інших немає.)



Відповідь: $\mathbf{3 \times 10}$ або $\mathbf{4 \times 6}$ клітинок.

Якщо картинка – прямокутник $a \times b$ *клітинок, то площа рамки* $2a + 2b - 4$. *Ці площі рівні, тоді* $2a + 2b - 4 = ab$. *Зведемо цю рівність до виду* $(a-2)(b-2) = 8$. *Звідси випливає що* $(a-2) = 1$ і $(b-2) = 8$ або $(a-2) = 4$ і $(b-2) = 2$. *Звідки знаходимо розміри:* 3×10 або 4×6 клітинок.

8 клас

1. Після повернення цирку з гастролей, знайомі вирішили порозпитувати Лева Львовича про «пасажирів» його автофургона: «Тигри були?» – «Так, їх було у сім разів більше, ніж не тигрів». «А мавпи були?» – «Так, їх було у сім разів менше, ніж не мавп». «А леви були?» Дайте відповідь за Лева Львовича.

Відповідь: «Лише я» або «Левів не було»

Оскільки тигрів було у сім разів більше, чим не тигрів, то кількість тигрів складає $\frac{7}{8}$ *від загальної кількості тварин. Оскільки мавп було у сім разів менше, ніж не мавп, то кількість мавп складає* $\frac{1}{8}$ *від загальної кількості всіх тварин. Так як* $\frac{7}{8}+\frac{1}{8}=1$, *то тварин, відмінних від тигрів і мавп у фургоні не було. Єдиним Левом у фургоні був водій.*

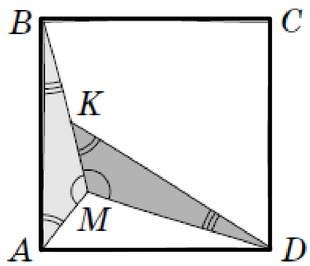
2. Спростіть вираз:

$$\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}$$

Відповідь: $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$.

$\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a-3}-\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a-4}-\frac{1}{a-3}=\frac{3}{(a-1)(a-4)}$.

3. Два рівних трикутники містяться всередині квадрата, як показано на рисунку. Знайти їх кути.



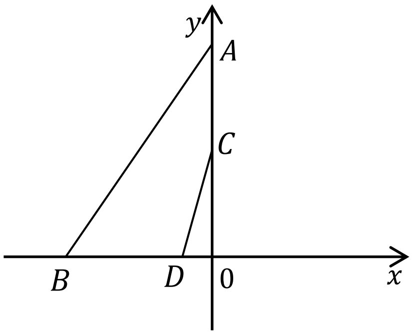
Відповідь: $15°;\ 45°; 120°$.

Трикутник MAD рівний трикутнику MAB – за трьома сторонами: MA – спільна, AD=AB як сторони квадрата, MD=MB за умовою (лежать навпроти відповідних кутів в рівних трикутниках).

Отже, $\angle BAM=\angle MAD=\frac{90°}{2}=45°$. *В точці M сходяться три кути рівних трикутників, тому* $\angle AMB=\frac{360°}{3}=120°$. *Сума кутів трикутника рівна* $180°$, *тому,* $\angle ABM=180°-120°-45°=15°$.

4. Частина графіка лінійної функції, що розташована у другій координатній чверті, разом з осями координат утворюють трикутник. У скільки разів зміниться його площа, якщо кутовий коефіцієнт функції збільшити у два рази, а вільний член в два рази зменшити?

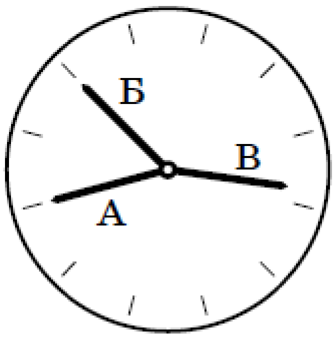
Відповідь: у 8 разів.



Нехай лінійна початкова функція задана рівнянням $y = kx + b$*. З умови задачі випливає, що* $k > 0$ і $b > 0$*. Точки перетину її графіка з осями :* $A(0; b)$ і $B(-\frac{b}{k}; 0)$*. Трикутник* AOB *– прямокутний, тому його площа рівна* $\frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} b \cdot \frac{b}{k} = \frac{b^2}{2k}$.

Після вказаної зміни коефіцієнтів функція буде мати вид: $y = 2kx + 0{,}5b$*. Її графік перетне осі в точках* $C\left(0; \frac{b}{2}\right)$ і $D(-\frac{b}{4k}; 0)$*. Площа прямокутного трикутника* COD *рівна* $\frac{1}{2} OC \cdot OD = \frac{1}{2}\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{4k} = \frac{b^2}{16k}$*. Отже, площа зменшиться в* $\frac{b^2}{2k} : \frac{b^2}{16k} = 8$ *разів.*

5. Для проходження квест-кімнати дітям потрібно було визначити годину, яку показував «зачарований» годинник (див. рисунок). Він відрізняється від звичайного годинника тим, що на циферблаті відсутні цифри, і взагалі не зрозуміло, де у годинника верх; та ще й годинна, хвилинна та секундна стрілки мають однакову довжину. Яку годину показував годинник?



Стрілки А і Б на рисунку дивляться рівно на позначки, а стрілка В трошки не дійшла до позначки.

Відповідь: за десять п'ята.

Визначимо, яка з стрілок вказує годину. Якщо б годинна стрілка дивилась рівно на годинникову позначку, то хвилинна та секундна стрілки мали б дивитись рівно на позначку «12» – але , на рисунку немає стрілок, що співпадають. Отже, годинна стрілка – стрілка В.

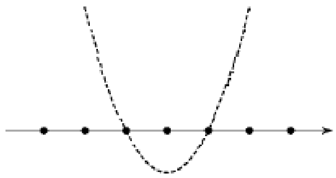
Дві стрілки, які залишились, вказують рівно на годинникові позначки, тому зараз якась година і ціла кількість хвилин, тому секундна стрілка вказує на 12.

Якщо секундна стрілка – стрілка А, то на годиннику трохи менше сьомої години (дивлячись на годинну стрілку), а з іншої сторони – зараз на 10 хвилин більше, ніж якась кількість годин (дивлячись на хвилинну). Так бути не може.

Якщо секундна стрілка – стрілка Б, то на годиннику біля п'ятої години (дивлячись на годинну), дивлячись на хвилинну стрілку – на 10 хвилин менше, ніж якась кількість годин. Тому, на годиннику за десять п'ята.

9 клас

1. На рисунку зображено графік зведеного квадратного тричлена (вісь ординат стерлась, відстань між сусідніми відміченими точками рівна 1) Чому рівний дискримінант цього тричлена? Відповідь обґрунтуйте.



Відповідь: 4.

Нехай x_1 і x_2 *– корені даного тричлена* $(x_1 < x_2)$. *З умови випливає, що* $x_2 - x_1 = 2$. $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2}$, тоді $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$, звідки $D = 4$.

2. Доведіть, що при додатних x та y виконується нерівність

$$x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}.$$

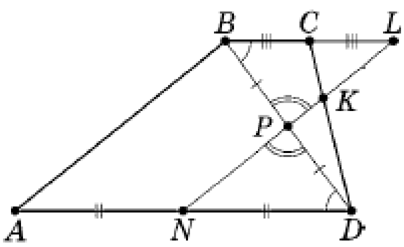
Позначимо: $x^2 = a$, $y^2 = b$. *Тоді*

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} - a^2 - b^2 = \frac{a^2}{b}(a-b) + \frac{b^2}{a}(b-a) = (a-b)\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) = \frac{1}{ab}(a-b)(a^3-b^3) \geq 0.$$

3. В трапеції $ABCD$ основа AD в чотири рази більша, ніж BC. Пряма, що проходить через середину діагоналі BD і паралельна AB, перетинає відрізок CD в точці К. Знайдіть відношення DК: КC.

Відповідь: 2:1.



Нехай P – середина BD, L і N – точки перетину прямої KP з прямими BC і AD відповідно. Так як $PN \parallel AB$ і $BP = PD$, то PN *– середня лінія трикутника ABD, звідси, AN=ND. Чотирикутник ABLN – паралелограм (за означенням), тоді ND=AN=BL. Крім того, AD=4BC, тоді, BC=CL і ND=2CL. Трикутники NKD і LKC подібні, тому, DK:KC=ND:CL=**2:1.***

4. Квадрат 8×8 розрізали на квадрати 2×2 і прямокутники 1×4. При цьому загальна довжина розрізів виявилась рівною 54. Скільки фігурок кожного виду отримали?

Відповідь: прямокутників 6, квадратів 10.

В квадраті 8×8 *– 64 клітинки, а в кожній отриманій фігурці – по 4 клітинки. Тому всього отримали 16 фігурок.*

Знайдемо суму периметрів всіх отриманих фігурок. Так як границя кожного розрізу входить в периметр двох фігурок, то додамо до периметра квадрата подвоєну довжину розрізів: $32 + 2 \cdot 54 = 140$.

Периметр квадрата 2×2 *рівний 8, а периметр прямокутника* 1×4 *рівний 10, тобто на 2 більше. Якщо б всі 16 фігурок були квадратами, то їх периметри у сумі дорівнювали б* $16 \cdot 8 = 128$. *Це на* $140 - 128 = 12$, *менше, ніж насправді. Для збільшення загального периметра на 12 потрібно 6 квадратів замінити на прямокутники. Тому прямокутників було 6, а квадратів – 10.*

Або $8x + 10(16 - x) = 140$, *звідки* $x = 10$.

Або $\begin{cases} 4x + 4y = 64 \\ 8x + 10y = 140 \end{cases}$.

5. Гарі і Герміона розклали на столі 13 різних гральних карт. Кожна карта лежить в одному з двох положень: сорочкою вверх або сорочкою вниз. Гравці повинні по черзі перевертати по одній карті. Програє той гравець, після ходу якого повториться якась з попередніх комбінацій (включаючи початкову). Перший хід зробила Герміона. Хто зможе виграти незалежно від того, як буде грати суперник? Відповідь поясніть.

Відповідь: Герміона.

Виграшна стратегія Герміони полягає у тому, щоб кожного разу перевертати одну і ту саму карту (наприклад, пікову даму). Всі можливі комбінації можна робити на пари, які відрізняються лише розташуванням пікової дами. Якщо у відповідь на хід Герміони Гарі теж переверне пікову даму, то повториться початкова комбінація і він програє. Тому йому доведеться перевертати іншу карту. А Герміона, перевернувши у відповідь пікову даму, отримає комбінацію, парну до тієї, яка тільки що була. Таким чином, з кожним новим ходом Гарі доведеться «починати» нову пару, і Герміона завжди зможе зробити хід у відповідь, «закривши» пару. Так як кількість можливих комбінацій скінченна, то рано чи пізно Гарі не зможе відкрити нову пару і програє.

10 клас

1. Графік квадратичної функції $y = ax^2 + c$ перетинає осі координат у вершинах правильного трикутника. Знайти ac.

Відповідь: -3.

Так як графік перетинає вісь OX у двох точках, то числа a і c мають різні знаки. Точки перетину: $A\left(\sqrt{-\frac{c}{a}};0\right)$; $B\left(-\sqrt{-\frac{c}{a}};0\right)$. Вісь OY графік перетинає у точці $C(0;c)$. Тоді сторона AB правильного трикутника рівна $2\sqrt{-\frac{c}{a}}$, а його висота рівна $|c|$. Так як для сторони і висоти правильного трикутника дійсне співвідношення $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то $|c| = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{-\frac{c}{a}}$, звідки $c^2 = -3\cdot\frac{c}{a}$, тому $ac = -3$.

2. Чи існує таке натуральне число n, більше за 1, щоб значення виразу $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ було натуральним числом?

Відповідь: так існує.

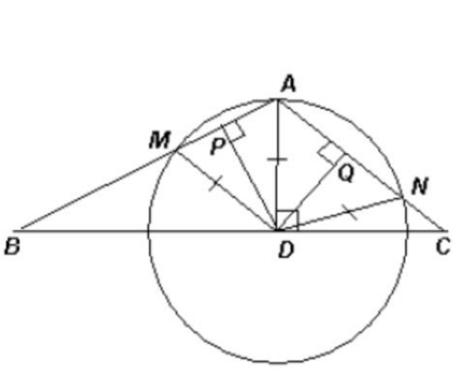
$\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sqrt{n\sqrt{n\cdot n^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{n\cdot n^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{n^{\frac{7}{4}}} = n^{\frac{7}{8}}$. *Тоді, при* $n = k^{8\cdot l}$, де $k, l \in \mathbb{N}$, *значення виразу буде натуральним числом. Наприклад* $n = 2^8 = 256$.

3. З вершини тупого кута A трикутника ABC опущена висота AD. Коло з центром у точці D і радіусом DA, перетинає сторони AB і AC у точках M і N відповідно. Знайдіть AC, якщо $AB = c,\ AM = m,\ AN = n$.

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{mc}{n}}$.

Доведемо, що $AM\cdot AB = AN\cdot AC$.

В прямокутних трикутниках ADB та ADC проведемо висоти DP і DQ відповідно (див. рис.). Тоді $AP\cdot AB = AD^2 = AQ\cdot AC$. Так як трикутники ADM і ADN – рівнобедрені, то $AP = \frac{1}{2}AM$, $AQ = \frac{1}{2}AN$. Замінивши AP і AQ у рівності $AP\cdot AB = AQ\cdot AC$, отримаємо



$AM\cdot AB = AN\cdot AC$. *Звідки* $AC = \boldsymbol{\frac{mc}{n}}$.

4. У просторі (але не в одній площині) розташовані шість різних точок: $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F.$ Відомо, що відрізки AB і $DE,\ \ BC$ і EF, CD і FA попарно паралельні. Доведіть, що ці ж відрізки попарно рівні.

У площині (ABC) *міститься пара прямих* AB *і* BC, *що перетинаються, які відповідно паралельні прямим* DE *і* EF *у площині* (DEF). *Звідси випливає, що площини* (ABC) *і* (DEF) *паралельні (за ознакою паралельності площин), а* CD і FA *– відрізки паралельних прямих, що містяться між паралельними площинами, отже,* $CD = FA$ *(за властивістю паралельних прямих, що перетинають дві паралельні площини).*

Аналогічно доводиться рівність $AB\ = DE$ *і* $BC = EF.$

5. 100 ввімкнутих і 100 вимкнених ліхтариків випадковим чином розкладені у дві коробки. У кожного ліхтарика є кнопка, яка виключає ліхтарик, який світиться і включає ліхтарик, який не світиться. Ваші очі зав'язані, і Ви не можете бачити, чи світиться ліхтарик. Але Ви можете перекладати ліхтарики з коробки в коробку і натискати на їх кнопки. Придумайте спосіб, як досягнути того, щоб ліхтариків, які світяться в обох коробках було порівну. Відповідь обґрунтуйте.

Спочатку перекладемо всі ліхтарики в праву коробку, не чипаючи вимикачі. Потім перекладемо з правої коробки в ліву будь-яких 100 ліхтариків, переключаючи кожний, і мета буде досягнута. Доведемо це.

При перекладанні (з переключанням) одного ліхтарика, різниця між кількістю ліхтариків що світяться справа і зліва зменшиться на 1. Дійсно, якщо ми взяли ліхтарик, який не світився, ввімкнули його і переклали вліво, то справа кількість ліхтариків, які світяться не змінилась, а зліва збільшилась на 1. Якщо ми взяли ліхтарик, який світився, вимкнули його і переклали вліво, то справа кількість ввімкнутих ліхтариків зменшилась на 1, а зліва не змінилась. У той момент, коли всі ліхтарики знаходились у правій коробці, різниця між кількістю ліхтариків, які світяться справа і зліва була рівна 100, тому після 100 перекладань вона стане рівною 0. Тобто кількість ліхтариків, які світяться в обидвох коробках буде однаковою.

11 клас

1. Знайти $\log_{175} 60$, якщо $\log_5 7 = a$ *і* $\log_{12} 84 = b$.

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{a+b-1}{(a+2)(b-1)}}$.

Перетворимо вирази за властивостями логарифмів і перейдемо до основи 7:

$log_{12} 84 = log_{(12)}(12 \cdot 7) = log_{12} 12 + log_{12} 7 = 1 + log_{12} 7 = b \Rightarrow\ log_{12} 7 = b - 1\ \Rightarrow\ log_7 12 = \frac{1}{b-1}$;

$log_5 7 = \frac{1}{log_7 5}\ \Rightarrow\ log_7 5 = \frac{1}{a}$.

$log_{175} 60 = log_{(5^2 \cdot 7)}(5 \cdot 12) = \frac{log_7(5 \cdot 12)}{log_7(5^2 \cdot 7)} = \frac{log_7 5 + log_7 12}{2 log_7 5 + 1} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-1}}{\frac{2}{a} + 1} = \frac{a+b-1}{(a+2)(b-1)}$

2. Визначити знак числа $(\cos(cos1) - cos1)(\sin(sin1) - sin1)$.

Відповідь: відє'мне.

Функція $y = sinx$ *зростає на проміжку* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, *тому з нерівності* $0 < sin1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ *випливає, що* $sin(sin1) < sin1$, *тобто* $sin(sin1) - sin1 < 0$. *Функція* $y = cosx$ *спадає на проміжку* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, *тому з нерівності* $0 < cos1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ *випливає, що* $cos(cos1) > cos1$, *тобто* $cos(cos1) - cos1 > 0$. *Отже,* $(cos(cos1) - cos1)(sin(sin1) - sin1) < 0$.

3. При яких значеннях x *і* y справджується рівність

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}?$$

Відповідь: $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}}$.

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}(4x^2 - 4xy + y^2) + \frac{3}{2}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = 0$$

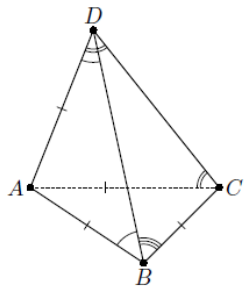
$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}(2x-y)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} 2x - y = 0, \\ y - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

4. Чи існує тетраедр $ABCD$, у якому $AB = AC = AD = BC$, а суми плоских куиів при кожній вершині B і C рівні по $150°$?

Відповідь: не існує.

Припустимо, що такий тетраедр існує. Тоді його грані DAB *і*DAC *– рівнобедрені трикутники. Нехай* $\angle ADB = \angle ABD = \alpha, \angle DBC = \beta, \angle DCB = \gamma, \angle ADC = \angle ACD = \delta$, *тоді* $\angle BDC = 180° - \beta - \gamma$.



Так як трикутник ABC *– рівносторонній, то з умови задачі випливає, що* $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 90°$, *отже,* $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$.

Тоді $\angle BDC = 180° - \beta - \gamma = \alpha + \delta$, *тобто* $\angle BDC = \angle BDA + \angle CDA$. *Це суперечить властивості тригранного кута: у будь якому тригранному куті сума двох плоских кутів більша за третій. Отримана суперечність показує, що тетраедра, який би задовольняв умову не існує.*

5. 100 ввімкнутих і 100 вимкнених ліхтариків випадковим чином розкладені у дві коробки. У кожного ліхтарика є кнопка, яка виключає ліхтарик, який світиться і включає ліхтарик, який не світиться. Ваші очі зав'язані, і Ви не можете бачити, чи світиться ліхтарик. Але Ви можете перекладати ліхтарики з коробки в коробку і натискати на їх кнопки. Придумайте спосіб, як досягнути того, щоб ліхтариків, які світяться в обох коробках було порівну. Відповідь обґрунтуйте.

Спочатку перекладемо всі ліхтарики в праву коробку, не чипаючи вимикачі. Потім перекладемо з правої коробки в ліву будь-яких 100 ліхтариків, переключаючи кожний, і мета буде досягнута. Доведемо це.

При перекладанні (з переключанням) одного ліхтарика, різниця між кількістю ліхтариків що світяться справа і зліва зменшиться на 1. Дійсно, якщо ми взяли ліхтарик, який не світився, ввімкнули його і переклали вліво, то справа кількість ліхтариків, які світяться не змінилась, а зліва збільшилась на 1. Якщо ми взяли ліхтарик, який світився, вимкнули його і переклали вліво, то справа кількість ввімкнутих ліхтариків зменшилась на 1, а зліва не змінилась. У той момент, коли всі ліхтарики знаходились у правій коробці, різниця між кількістю ліхтариків, які світяться справа і зліва була рівна 100, тому після 100 перекладань вона стане рівною 0. Тобто кількість ліхтариків, які світяться в обидвох коробках буде однаковою.