Міністерство освіти і науки України
Рада директорів ВНЗ І-ІІ рівнів акредитації
Львівський коледж транспортної інфраструктури
ДНУЗТ ім. ак. В. Лазаряна

ЗБІРНИК

задач для підготовки до обласної студентської олімпіади з математики

(частина 2)

Відповідальні за випуск:
Сеник О. І.
Шимків Г. С.
Кісіль М. М.

Львів 2014

Розділ 1. Комплексні числа

1. Зобразити на площині XOY множину точок, що задовольняють умови:

   1.1. $Re\left(z-\frac{1}{z}\right)=0;$

   1.2. $\begin{cases} log_{\frac{1}{3}}|z-1|>0 \\ arg\, z=\frac{\pi}{6} \end{cases};$

   1.3. $1<|z+2-3i|\leq 2.$

2. Розв`язати рівняння:

   2.1. $(3-i)x^2-(8-i)x+4+7i=0;$

   2.2. $\frac{3x+2iy}{5i-2}=\frac{15}{8x+3iy};$

   2.3. $z\cdot\bar{z}+z^2+2(\bar{z})^2=0.$

3. Обчислити:

   3.1. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}};$

   3.2. $\frac{(1+i)^{15}\left(\sqrt{3}-i\right)^5}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{10}(-2-2i)^9};$

   3.3. $(1+sin\varphi+icos\varphi)^{12}.$

4. Нехай z – комплексне число, модуль якого дорівнює 1, а аргумент φ. Довести: $cos\,\varphi=\frac{z^2+1}{2z}$, $sin\,\varphi=\frac{z^2-1}{2iz}$.

5. Знайти значення виразу $\frac{x^{3333}+x^{333}+x^{33}+x^3+2015}{4(x^2+1)-2015}$, якщо $x^2+x+1=0$.

Розділ 2. Лінійна алгебра

1. Розв`язати систему рівнянь:

$$1.1.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 9x_9 + 10x_{10} = 55 \\ x_2 + 2x_3 + \ldots + 9x_{10} + 10x_1 = 55 \\ \ldots \\ x_{10} + 2x_1 + \ldots + 9x_8 + 10x_8 = 55 \end{cases};$$

$$1.2.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = a_1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + nx_1 = a_2 \\ \ldots \\ x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} = a_n \end{cases};$$

$$1.3.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \ldots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

2. Розв`язати рівняння: $2.1.\begin{vmatrix} x & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & x & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & x \end{vmatrix} = 0;$

$$2.2.\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Довести, що

3.1. $$\begin{vmatrix} \sin 1 & \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 6 \\ \sin 7 & \sin 8 & \sin 9 \end{vmatrix} = 0;$$

3.2. $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

4. Довести, що для всіх допустимих значень x справедливі нерівності:

4.1. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2x-1 & x & x-1 \\ 3x & 2+x & x \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{2}}{2};$$

4.2. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \le 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Побудувати графік функції: 5.1. $y = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}, (a \ne b);$

5.2. $$Y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x+1 & 2 & x+3 & 4 \\ 1 & x+3 & x+4 & x+5 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розділ 2. Векторна алгебра

1.Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь *l*, яка утворює з координатними осями *Ox*, *Oz* кути $\alpha = 120^0$, $\gamma = 45^0$ і тупий кут β з віссю *Oy*, якщо *A (1; 0; –3), B (3; 4; 1)*.

2. Точка перетину медіан трикутника *M* лежить на осі абсцис, дві вершини його – точки *A (2; –3)* і *B (–5; 1)*, а третя вершина *C* лежить на осі ординат. Визначити координати точок *M* і *C*.

3. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$ *і* $|\vec{a} - \vec{b}|$, *якщо* $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$.

4. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 5\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 3\bar{n}$, якщо $\bar{m} = 4\sqrt{2}$, $\bar{n} = 6$ і $(\widehat{\bar{m};\bar{n}}) = \frac{\pi}{4}$.

5. Дано три сили $\overline{F_1}(2;3;5)$, $\overline{F_2}(4;-3;2)$, $\overline{F_3}(1;-4;-2)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась із точки *A (4; 2; –8)* у точку *B (3; –2; 5)*.

6. До вершини куба прикладені три сили, що дорівнюють *1, 2, 3 кН* і напрямлені по діагоналях граней куба, що перетинаються у цій вершині. Знайти величину рівнодійної цих трьох сил.

7. Визначити кут між бісектрисами двох плоских кутів правильного тетраедра, які проведені із однієї вершини.

8. Довести, що при довільному розташуванні точок *A, B, C, D* на площині або в просторі виконується тотожність $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$.

Розділ 4. Аналітична геометрія

1. Написати рівняння площин, що проектують пряму $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ на три координатні площини.

2. Промінь світла, який проходить через точку $A(2;\ 3)$, відбивається від прямої $l : x + y + 1 = 0$ і проходить через точку $B(1;\ 1)$. Знайти рівняння променів, який падає і який відбивається.

3. Написати рівняння сторін трикутника, якщо задано одну з вершин $A(3;\ -4)$ і рівняння двох висот $l_1 : 7x - 2y - 1 = 0$ і $l_2 : 2x - 7y - 6 = 0$. Система координат прямокутна.

4. На еліпсі $x^2 + 5y^2 = 20$ знайти точку, радіуси-вектори якої перпендикулярні.

5. Арка мосту, довжина якого $l = 60$ *м* і висота $h = 12$ *м*, має форму параболи. Визначити висоту h_1 бічних стінок арки, які розташовані на відстані 15 *м* від кінців мосту.

6. Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ і прямої $9x + 2y - 24 = 0$.

7. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 4x + 2$, яка паралельна до прямої $3x - 2y + 6 = 0$.

8. Задано рівняння сторін трикутника: $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, $4x + 3y - 11 = 0$. Написати рівняння вписаного кола.

Розділ 5. Вступ до математичного аналізу

Знайти границі: 1. $lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(ax+1)^{2n}}}{\sqrt{x^{2n}+b}}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}(tg\frac{\pi x}{2x+1})^{\frac{1}{2}}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}...\cos\frac{\pi}{2^{n+1}})$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+2n})$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x\right]$;

6. $lim_{n\to\infty}\frac{1+11+111+111...1}{10^n}$;

7. $lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

8. Зростаюча послідовність натуральних чисел (a_n) така, що всі суми $a_i+a_j, i\le j$, різні. Довести, що $a_n\ge\frac{n^2}{4}$.

9. Знайти таке значення x, що:

9.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2n})\right]=2010$;

9.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-(n-1)^x}{(n+1)^{x-1}+(n+2)^{x-1}}=2008$.

Розділ 6. Диференціальне числення

1. Скласти рівняння дотичної до графіка парної функції $y=f(x)$ в точці з абсцисою $x_0=1$, якщо відомо, що для всіх

дійсних x справедлива рівність
$f(2x^3 - x) - 4x^2 \bullet f(x^2 - x - 1) = 8x^5 - 8x^3 - 11x^2 + 2$.

2. Знайти найбільше та найменше значення функції
$f(x) = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$.

3. Плавець пливе проти течії річки з пункту A в пункт B. У скільки раз його швидкість повинна перевершувати швидкість течії, щоб витрачена робота була найменшою? (Потужність, що розвиває плавець, пропорційна квадрату його швидкості відносно води.)

4. На еліпсі $x^2 + y^2 + xy = 9$ взято дві точки $A(0;3)$ і $B(3;-3)$. Вказати на еліпсі таку точку C, щоб площа трикутника ABC була найбільшою.

5. Канал, ширина якого *27 м*, під прямим кутом впадає в другий канал завширшки *64 м*. Якої найбільшої довжини стовбур можна сплавити цією системою каналів?

6. Знайти похідну функції:

6.1 $y = \dfrac{\ln(x + arctgx)}{arctg \ln x}$;

6.2 $y = \cos \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$;

6.3 $y = (sinx)^{cosx}(cosx)^{sinx}$;

6.4 $y = x^{lnx} + (lnx)^x$.

7. Дослідити функцію та побудувати її графік:

7.1 $y = \dfrac{x^4 - 8}{(x-1)^4}$;

7.2 $y = log_2 log_{x-2}|x - 2|^8$.

Розділ 7. Інтегральне числення

1. Обчислити інтеграли:

1.1 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin^2 x}{1+\cos x}dx$;

1.2 $\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x+\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;

1.3 $\int\limits_0^{\pi} |\sin x-\cos x|dx$;

1.4 $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$;

1.5 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$.

2. Довести, що

2.1 $\int\limits_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int\limits_0^1 e^{x^2}dx = e$;

2.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} |\sin nx|dx = 4$.

3. Знайти площу фігури обмежену лініями:

3.1 $y=2+x^2$ та $(y-2)^3=x^2$;

3.2 $y=\sin|x|$ та $y=|x|-\pi$.

4. Обчислити об`єм тіла, утвореного внаслідок обертання навколо прямої $y=1$ плоскої фігури, яка обмежена

графіком функції $y = 1 + \sin x$ і дотичної до цього графіка, проведеними в точках з абсцисами $x = 0$ і $x = \pi$.

Розділ 8. Текстові задачі

1. Яку найбільшу кількість слонів можна розташувати на шаховій дошці, щоб ані один із слонів не був під подвійною бійкою?

2. Готуючись до ЗНО, щоденно впродовж року абітурієнт розв'язував не менше однієї задачі кожного дня, при цьому кожного тижня він розв'язував не більше як *12* задач. Довести, що знайдеться декілька послідовних днів, в які він розв'язував *20* задач.

3. З *61* монети за *4* зважування відокремити фальшиву (вона тяжча, ніж інші).

4. Кожен із трьох друзів зіграв однакову кількість шахових партій з іншим. При цьому вияснилось, що перший з них виграв найбільшу кількість партій, другий програв найменшу кількість партій, а третій набрав найбільшу кількість очків. Чи могло так бути? Якщо ні, то доведіть. Якщо так, то наведіть приклад.

5. На всесвітньому фестивалі молоді зустрілись *6* делегатів. Виявилось, що серед будь-яких трьох з них двоє можуть порозумітися між собою якоюсь мовою. Доведіть, що тоді найдеться 3 делегатів, кожен з яких може порозумітись з кожним.

6. Трьом студентам в темній кімнаті одягли на голову по чорній шапці. Перед ними поставлено завдання відгадати, хто в якій шапці, якщо всього шапок *5*, причому *2* з них – сірі, а *3* – чорні. Сірі шапки сховали перед тим, як у кімнаті

запалили світло. Через деякий час один студент відгадав, що він стоїть в чорній шапці. Як він це зробив?

7. Серед учасників шахових змагань хлопців було в *7* разів більше, ніж дівчат і вони разом набрали в три рази більше очок, ніж дівчата. Скільки дівчат взяло участь у змаганнях, якщо кожен гравець зіграв з кожним по дві партії (одну чорними, одну білими). За виграш учасник отримував *1* очко, за нічию – *½* очка і за програш – *0*.

8. Відпочиваючи в курортному містечку, кілька друзів дізналася, що в сусідньому місті є дуже гарний музей, який варто відвідати. Щоб зекономити, друзі вирішили йти пішки і о *10.00 год* успішно вийшли з бази відпочинку. Пройшовши *k* кілометрів, їх догнала бричка, керманич якої погодився трохи підвезти друзів, після чого їм довелося ще пройти *k км*, і рівно в полудень товариші прийшли до місця призначення. Скільки часу знадобиться друзям на повернення назад пішки, якщо відомо, що бричкою вони їхали вдвічі швидше, ніж ішли пішки?

9. Один камінь сапфіру і два камінці топазу в двічі дорожчі за смарагд. А сім сапфірів і один топаз, цінніші в *8* разів від того ж таки смарагду. Який з цих каменів дешевший – сапфір, топаз чи смарагд?

10. На участь у благодійному велопробігу зареєструвалися *420* учасників. Група волонтерів зголосилася взятися за монтування необхідної кількості велосипедів, враховуючи статистику, що з *35* велосипедів, при даних умовах, *1* може вийти з ладу. Але *4* особи не змогли долучитися до роботи у зв'язку з іншими терміновими справами. Скільки волонтерів повинні були прийти на роботу, якщо відомо, що

кожному працюючому прийшлося монтувати на *9* велосипедів більше?

11. Вік студента в *2015* році дорівнюватиме сумі цифр його року народження. Скільки років буде студенту в *2015* році?

12. Скількома нулями закінчується число, яке дорівнює добутку всіх натуральних чисел від *1* до *2015* включно?

13. Коли пасажири увійшли в порожній трамвай, *2/7* їх зайняли місця для сидіння. Скільки пасажирів увійшло на початку, якщо після першої зупинки їх кількість збільшилася рівно на *15%* і відомо, що трамвай вміщає не більше *180* осіб?

14. На острові Кольоровому живуть *13* червоних, *15* жовтих і *17* зелених хамелеонів. Якщо зустрічаються два хамелеони різного кольору, то вони одночасно міняють свій колір на третій (червоний і жовтий стають обидва зелені і т.д.). Чи може статись так, що через деякий час всі хамелеони будуть одного кольору? Відповідь поясніть.

15. Хлопчик стоїть на автобусній зупинці і мерзне, а автобуса немає. Йому хочеться пройти до наступної зупинки. Хлопчик бігає в чотири рази повільніше, ніж автобус і може побачити автобус на відстані *2 км*. До наступної зупинки рівно один кілометр. Чи є сенс йти, або є ризик?