6 клас

1. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 = 2^{10} \cdot 3^3$. Всього дільників: $11 \cdot 4 = 44$.

2. $$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}=\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+$$
$$+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+$$
$$\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

3. 4 сини 3 дочки.

4. 125000 грн.

5. Таким чином при множені множеного на 8 у добутку отримуємо більше цифр, ніж при множенні на 9, що неможливо. Значить запис містить помилку.

```
  ***27
     *8
 ****16
 *****
 ****46
```

```
  ***27
     *8
 ****16
 ****3
 ****46
```

```
  ***27
     98
 ****16
 ***43
 ****46
```

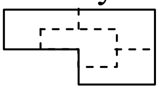
7 клас

1. $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 - 1 = 2519$.

2.

5л	5	0	5	1	1	0	5	0
9л	0	5	5	9	0	1	1	6

3. Ні. Бо сума перших 71 чисел більша, ніж половина суми всіх чисел.

4. 

5. $|3x-2y| = -|y-2013|$. Тому $y = 2013$, $x = 1342$.

8 клас

1. $\begin{cases} 10a+b=4(a+b)+3 \\ 10a+b-2(a+b)=25 \end{cases}$. Шукане число 47.

2. 40°.

3. $\frac{7}{6}x=\frac{6}{5}(x-1)$. $x=36$. 42 учні.

4. Ні. При таких перетвореннях незмінною залишається парність суми чисел у всіх вершинах куба. А початкова сума є непарною.

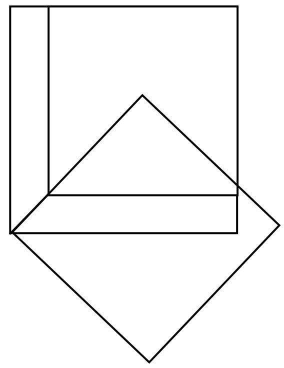
5. 0. Сума коефіцієнтів многочлена стандартного виду дорівнює значенню цього многочлена, коли $x=1$.

9 клас

1. $$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-$$
$$\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}.$$

2. Ні. Сума чисел в кожній групі буде парною, а отже парною має бути і сума всіх натуральних чисел від 1 до 65. Але $\frac{1+65}{2}\cdot 65=33\cdot 65$ – непарне число.

3. Перпендикуляр MN, проведений на BC, дорівнює половині AH, а, отже, половині BM. Шуканий кут 30°.



4. 4 розв'язки. Коло $x^2+y^2=25$ і парабола $y=x^2-x-6$ перетинаються у 4-х точках.

5. Оскільки $2014=671\cdot 3+1$, то достатньо розбити квадрат 6×6 на три частини, кожна з яких накривається квадратом 5×5. Наприклад, так як на малюнку.

10 клас

1. $\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{5+4x-x^2}+\sqrt{12+4x-x^2}=\sqrt{4-(x-2)^2}+\sqrt{9-(x-2)^2}+\sqrt{16-(x-2)^2}\le 2+3+4=9$. Тому, єдиний розв'язок рівняння $x=2$.

2. Нехай O_1, O_2, O_3, O_4 – центри квадратів, побудованих на сторонах AB, BC, CD і DA відповідно. При повороті навколо точки O_1 на 90° трикутник O_1AO_4 переходить у трикутник O_1BO_2, тому $O_1O_4=O_1O_2$ і $O_1O_4\perp O_1O_2$. Але в силу центральної симетрії рисунка відносно центра паралелограма $O_1O_2O_3O_4$ – паралелограм. Отже, $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат.

3.
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2014}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2014}-\sqrt{2013}}{2014-2013}=$$
$$=\sqrt{2014}-1.$$

4. За формулою Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Але за нерівністю Коші $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\le\dfrac{p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{4}$, причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли $|p|=|p-a|=|p-b|=|p-c|$, а це можливо, лише коли $a=b=c$.

5. Центр n-го квадрата має координати $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2}+\ldots+\dfrac{n}{2},\dfrac{n}{2}\right)$ або $\left(\dfrac{n^2+n}{4},\dfrac{n}{2}\right)$, тобто належить параболі $x=y^2+\dfrac{1}{2}y$.

11 клас

1. Нехай $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – одиничні вектори, напрямлені вздовж ребер тригранного кута. Тоді напрями бісектрис плоских кутів при його вершині задаються векторами $\vec{l}_1=\vec{a}+\vec{b},\vec{l}_2=\vec{b}+\vec{c},\vec{l}_3=\vec{c}+\vec{a}$. Їхні скалярні добутки
$$\vec{l}_1\cdot\vec{l}_2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+\vec{b}^2=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+1,$$
$$\vec{l}_1\cdot\vec{l}_3=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+\vec{a}^2=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+1,$$
$$\vec{l}_2\cdot\vec{l}_3=(\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}^2=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+1$$
рівні між собою. Тому, оскільки один з них дорівнює нулю, то і два інші також дорівнюють нулю.

2. Оскільки 4027=2013+2014, то рівняння матиме розв'язки лише коли $\begin{cases}\cos 2\pi\sqrt[3]{x}=1\\ \cos 2\pi\sqrt[3]{x-1}=1\end{cases}$.Звідси $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=n, n\in Z\\ \sqrt[3]{x-1}=m, m\in Z\end{cases}$, $m^3+1=n^3$, m=0, n=1 або m=–1, n=0. x=1 або x=0.

3. Оскільки $\begin{cases}y+z=2-x\\ yz=1-x(2-x)\end{cases}$, то y і z є коренями квадратного рівняння $t^2-(2-x)t+(1-2x+x^2)=0$. Тоді його дискримінант має бути невід'ємним, тобто $(2-x)^2-4+8x-4x^2\geq 0,\ 4x-3x^2\geq 0$. Отже, $0\leq x\leq \frac{4}{3}$. Але в силу симетрії системи y і z також належать відрізку [0; 4/3].

4. За нерівністю Коші $ac+bd\leq \frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2}=\frac{a^2+c^2+b^2+d^2}{2}=\frac{2}{2}=1$.

5. Якщо в основі піраміди $AB\parallel CD$, то PQ проводимо паралельно CD. $MNPQ$ – шуканий переріз. Якщо ж AB не паралельна CD (див. рис.), то проводимо NP до перетину з BC в точці F. Через точку F проводимо паралельну до AB пряму до перетину з BD в точці G. Сполучаємо G з N. Перетин GN з SD позначимо Q. $MNPQ$ – шуканий переріз.